Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)
Том 15 • № 2 • 2019 С. 38 – 42
https://doi.org/10.18372/2411-6602.15.07

УДК 528.11

Оптимальне використання методу квадратичного програмування для вирівнювання геодезичних мереж

О.С. Гончаренко[1], **В.М. Гладілін**[2]*, **Л. Шяудініте**[3]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 2а
[2]Національний авіаційний університет, 03058, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1
[3]Вільнюський технічний університет Гедиміна, LT-10223 Вільнюс, Saulėtekio al. 11

В теорії похибок вимірів до грубих відносять виміри, в процесі яких виникають промахи, або виміри, похибки яких перевищують граничні похибки за умови вимірів. Грубі похибки можуть виникнути не тільки в процесі вимірювань, але і в процесі обчислень. Із обчислень повинні бути виключені результати, які мають грубі похибки. При проектуванні геодезичних вимірювань вибирають такі прилади та методику вимірювань, щоб отримані похибки були в межах наперед заданих допустимих значень. Виявлення грубих похибок є особливим завданням в сучасній геодезії і є актуальним при автоматизованому збиранні даних, оскільки грубі похибки можуть бути не помічені оператором під часу процесу вимірювань, тому відбраковка грубих похибок не завжди задовольняє необхідній точності вимірювань. В теперішній час важливою проблемою є вирівнювання при великій кількості визначаємих невідомих, а також з урахуванням систематичних похибок та похибок вихідних даних. Метод найменших квадратів, який застосовується при вирівнюванні, обмежує характер інформації, що використовується при вирівнюванні, тільки рівностями і не передбачає врахування сумісної дії випадкових і систематичних похибок, які мають вид нерівності. Розв'язання задачі вирівнювання при дотриманні рівностей і нерівностей виконується за допомогою метода математичного програмування. За допомогою робастного метода вирівнювання визначається наявність грубих і систематичних похибок по функції Хьюбера, яка використовується в стійкій регресії і малочутлива до викидів, тобто до грубих похибок.

Ключові слова: грубі і систематичні похибки; вирівнювання.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Підвищення якості оброблення результатів геодезичних вимірювань пов'язане з урахуванням усієї інформації про вимірювання і допуски на точність вимірювань. Загальновідомо, що при проектуванні геодезичних вимірювань вибирають прилади та методику вимірювань так, щоб отримана похибка не спотворювала результати і знаходилась у межах наперед заданого допустимого значення. Проблему виявлення грубих похибок слід вважати завданням, що заслуговує особливої уваги у сучасній геодезії. Ця проблема стала надзвичайно актуальною за умови автоматизації збирання даних, оскільки грубі похибки можуть бути не помічені оператором під час процесу вимірювання.

2. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Останнім часом однією з актуальних проблем математичної обробки геодезичних вимірів є проблема контролю, пошуку і обліку грубих похибок вимірів [1, 3–6, 8]. За походженням грубі похибки є випадковими, оскільки груба похибка в конкретному вимірі може або з'явитися, або вона відсутня. Причини їх появи різні: промахи і прорахунки спостерігача, різкі зміни зовнішніх умов вимірів, некоректне введення інформації про результати вимірів у відповідне програмне забезпечення ЕОМ тощо. Проте в теорії обробки вимірів грубі похибки не підкоряються статистичним закономірностям випадкових похибок і мають властивості, відмінні від властивостей випадкових похибок. За абсолютною величиною грубі похибки перевищують межу, встановлену для випадкових похибок вимірів. Математичне сподівання грубої похибки дорівнює значенню самої похибки. Ймовірність появи грубої похибки $P_{\text{груб.}}$ залежить від прийнятого рівня довірчої вірогідності $P_{\text{дов.}}$, для якої визначена межа абсолютних значень випадкових похибок вимірів. Її можна обчислити за формулою

$$P_{\text{груб.}} = 1 - P_{\text{дов.}} \tag{1}$$

Згідно [1], «контроль грубих похибок — це набір тестів, що дозволяють встановлювати наявність в n вимірах хоча б одного грубого». Такими тестами можуть виступати наступні загальновідомі ознаки наявності грубих похибок вимірів в геодезичній мережі:

– наявність однієї або декількох нев'язок умовних рівнянь, що перевищують допустимі значення при зрівнюванні геодезичної мережі корелатним способом;

* Гладілін Валерій Миколайович; ✉ vgladilin.55@gmail.com

– наявність одного або декількох вільних членів надлишкових вимірів, що перевищують допустимі значення при зрівнюванні геодезичної мережі рекурентним способом;
– наявність неприпустимих значень поправок вимірів, що обчислюються при зрівнюванні геодезичної побудови параметричним або корелатним способом за методом найменших квадратів (МНК);
– збільшення середньої квадратичної похибки одиниці ваги $\mu_{\text{зр.}}$ після вирівнювання у порівнянні із її проектним значенням μ_0;
– збільшення після вирівнювання значень середніх квадратичних похибок та їх функцій у порівнянні із проектними значеннями;
– порушення умови

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P_i v_i^2\right) \leqslant \mu_0 \chi^2_{p_0,r}, \tag{2}$$

де n — кількість вимірів в геодезичній мережі; P_i — вага i-го виміру; v_i — поправка в i-те вимірювання; μ_0 — проектне значення похибки одиниці ваги; $\chi^2_{p_0,r}$ — коефіцієнт, значення якого залежить від прийнятого довірчого інтервалу.

В результаті виконаних досліджень встановлено, що найбільш перспективними для вирішення перерахованих завдань є методи, в яких використовуються рівняння, що зв'язують поправки у виміри з істинними похибками вимірів.

Такі рівняння є тільки в теорії параметричного способу МНК-зрівнювання; їх кількість дорівнює кількості вимірів, що дає можливість тестувати на грубі похибки усі виміри без виключення. Ці рівняння служать основою для пошуку грубих похибок в методиці Коугия В.А. [3, 4], у методиці Дьякова Б.Н. і Федоровой Н.В. [5] і в деяких інших. Проте серед відомих методів до недавнього часу не було жодного, який дозволяв би вирішувати усю сукупність позначених завдань, тому існує гостра необхідність розробки нового поліфункціонального методу.

3. ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Сучасні дослідження точності геодезичних вимірювань свідчать про досить широкий діапазон видів похибок вимірювань. Їх випадкова складова не завжди має нормальний або близький до нього розподіл. Цей факт вимагає не зупинятися лише на традиційних методах вирівнювання, а знаходити інші шляхи вирівнювання геодезичних вимірювань.

Аналіз реальних геодезичних побудов нерідко виявляє значні відхилення дійсного закону розподілу від нормального: на практиці не завжди виконуються умови центральної граничної теореми А.М. Ляпунова. В такому випадку під час виконання умови незміщеності похибок метод найменших квадратів гарантує лише мінімальність дисперсії кожної з отриманих оцінок порівняно з усіма іншими лінійними незміщеними оцінками невідомих і лінійних функцій від них. Метод найменших квадратів обмежує характер інформації, що використовується при вирівнюванні тільки рівностями, зокрема, не передбачає врахування сумісної дії випадкових і залишкових систематичних похибок, що мають вид нерівності.

Розв'язання такої задачі, коли при вирівнюванні необхідно дотриматись не тільки рівностей, а і нерівностей, належить до сфери прикладної математики, в якій для розв'язання задач застосовують метод математичного програмування.

Вирівнювання за допомогою методу математичного програмування має такі особливості:

1) в обмеженнях на поправки є як умови рівності, так і нерівності;
2) вирівнювання прямих та посередніх вимірів здійснюється за єдиним розрахунковим алгоритмом, при цьому зникає необхідність складання і розв'язання нормальних рівнянь;
3) обмеження частіше є двосторонніми, при цьому порядок їх розташування не впливає на точність результатів.

У такий спосіб усувається проблема обумовленості матриць систем нормальних рівнянь.

В загальному вигляді завдання вирівнювання методом математичного програмування, виходячи з принципу мінімізації суми квадратів поправок, можна відтворити як стандартне вирівнювання, у якому до загальних обмежень геометричного порядку додаються обмеження у вигляді $-\delta \leqslant v_i \leqslant \delta$, що відповідають інтервалу допустимої похибки вимірювання.

Завданням є мінімізація функції

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

в області A, що встановлюється обмеженням $\psi_j(v) = a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \ldots + a_{jn}v_n + a_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m$. Для розв'язання такого завдання використовується метод квадратичного програмування. Завдання полягає у знаходженні серед точок області A такої точки v, для якої досягається $f(v) = \min$.

Коли йде мова про низку вимірювань однієї величини, груба похибка достатньо надійно локалізується з використанням простих статистичних критеріїв. Інакша ситуація при вирівнюванні геодезичних мереж або виконанні апроксимації з використанням складних математичних функцій. Результати геодезичних вимірювань можуть бути обтяжені грубими похибками. Їх кількість за результатами багатьох досліджень оцінюються у межах від 0,1 до 1%, а іноді й більше [10].

З появою потужних комп'ютерних програм особливої популярності набули робастні методи. На відміну від статистичних методів виявлення грубих похибок, робастні методи не передбачають виключення грубих вимірювань. Врахування впливу можливих грубих похибок у робастних методах здійснюється шляхом моделювання ваг вимірювань. Головною проблемою робастних методів є вибір моделі вагової функції та встановлення критичних меж, яким вона має відповідати. Ці межі приймаються постійними або розраховуються на основі апріорного значення середньої квадратичної похибки одиниці ваги.

Загалом ідею робастного вирівнювання можна описати такою послідовністю. Спочатку виконується процедура звичайного вирівнювання. За отриманими величинами поправок та обраною моделлю вагової функції розраховують нові величини ваг вимірювань. Із новими ваговими коефіцієнтами виконують повторне вирівнювання і отримують нові поправки до виміряних величин, за якими знову розраховують вагові коефіцієнти. Процедура вирівнювання є ітераційною і припиняється з виконанням умов для вагових функцій або середніх квадратичних похибок одиниці ваги.

При вирівнюванні складних високоточних мереж доцільно виконувати окремі дослідження і випробовувати декілька варіантів вагових функцій. У випадку збігу результатів робастного вирівнювання за декількома методами у межах точності обчислень зупиняються на будь-якому з них. При суттєвих відмінностях в отриманих результатах необхідно виконати поглиблені статистичні дослідження на наявність у групах результатів вимірювань грубих похибок і систематичних похибок зі складним законом впливу.

Для робастного вирівнювання була вибрана функція Хьюбера (рис. 1), яка використовується в стійкій регресії і малочутлива до сплесків (викидів), ніж середня квадратична похибка [10].

Хьюбер [10] описав її як кусково-визначену функцію вигляду

$$L_\delta(a)=\begin{cases}\frac{1}{2}a^2 & \text{для } |a|\leqslant\delta,\\ \delta\left(|a|-\frac{1}{2}\delta\right) & \text{інакше.}\end{cases}$$

Ця функція квадратична для малих значень a і лінійна для великих значень, з однаковим значенням і ухилом для різних ділянок двох точок, де $|a|=\delta$. Змінну a часто розглядають як залишок, тобто як різницю між значенням що спостерігають та прогнозованим значенням $a=y-f(x)$ (рис. 1), тому вихідне значення може бути розширене до

$$L_\delta(y,f(x))=\begin{cases}\frac{1}{2}\big(y-f(x)\big)^2 & \text{для } |y-f(x)|\leqslant\delta,\\ \delta\left(|y-f(x)|-\frac{1}{2}\delta^2\right) & \text{інакше.}\end{cases}$$

Для порівняння було виконано вирівнювання системи нівелірних ходів з вузловими точками методом математичного програмування з використанням функції Хьюбера та методом найменших квадратів. Результати представлені в табл. 1. В ній τ_1, τ_2, τ_3 — корелати, які одержані при розв'язанні нормальних

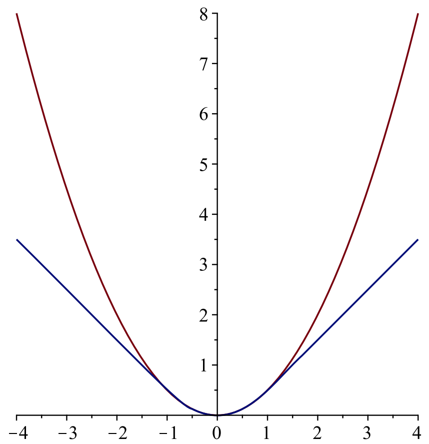

Рис. 1. Функція Хьюбера (нижній графік) та середня квадратична функція втрат (верхній графік) як функція $y=f(x)$

Таблиця 1. Результати вирівнювання за МНК і методом квадратичного програмування

Метод найменших квадратів		Метод квадратичного програмування	
Ваги p	Поправки v, мм	Ваги p	Поправки v, мм
0,943	−3,3	0,943	−5,0
0,800	−7,3	0,800	−6,0
1,205	2,6	1,205	3,0
1,408	4,4	1,408	6,0
1,111	8,0	1,111	6,0
1,000	−2,7	1,000	−6,0
τ_1, мм	−3,3	τ_1, мм	−5,0
τ_2, мм	−2,6	τ_2, мм	−3,0
τ_3, мм	4,4	τ_3, мм	6,0
СКП μ, мм	±7,4	СКП μ, мм	±8,0
$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2$	166,7	$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2$	189,9
$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i$	29,9	$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i$	34,2
$\lvert v_{\max}\rvert$	8,0	$\lvert v_{\max}\rvert$	6,0

рівнянь для обчислення поправок v_i.

З таблиці видно, що вирівнювання за методом квадратичного програмування призвело лише до незначного зниження точності, однак величини поправок до виміряних величин не перевищують заданого допустимого значення (± 6 мм).

4. ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У порівнянні з іншими методами застосований метод дозволяє виявити всі комбінації, в яких принципово неможливо виявити грубі похибки.

Необхідною і достатньою ознакою принципової неможливості виявлення грубих похибок у певній комбінації вимірювань є близьке до нуля значення визначника системи рівнянь.

Підсумовуючи результати досліджень можливості пошуку грубих похибок вимірювань в різних геодезичних мережах, необхідно зазначити, що ефективність пошуку визначається не тільки можливостями застосованого методу, але й суттєве значення має геометрія геодезичної мережі. Вказану обставину слід враховувати під час проектування геодезичних мереж.

1. *Дьяков Б.Н., Рудикова М.П.* О контроле, поиске и учете грубых ошибок измерений // Геодезия и картография. — 1997. — №6. — С.21–24.
2. *Гудков В.М., Хлебников А.В.* Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений: учеб. для вузов. — М.: Недра, 1990. — 335 с.
3. *Коугия В.А.* Обнаружение грубых ошибок измерений по результатам уравнивания // Геодезия и картография. — 1995. — №6. — С.14–19.
4. *Коугия В.А.* Сравнение методов обнаружения и идентификации грубых ошибок измерений // Геодезия и картография. — 1998. — №5. — С.23–28.
5. *Дьяков Б.Н., Федорова Н.В.* Пошаговый поиск грубых ошибок измерений // Геодезия и картография. — 2001. — №3. — С.16–20.
6. *Дьяков Б.Н., Родионова Ю.В.* Поиск грубых ошибок измерений методом наложения графиков поправок // Геодезист. — 2002. — №4. — С.22–24.
7. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1962. — 352 с.
8. *Родионова Ю.В.* Поиск грубых ошибок в разомкнутом линейно-угловом ходе. — Новосибирск, 2002. — Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК, №748-гд 2002.
9. *Герасименко М.Д.* Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — 101 с.
10. *Huber P.J.* Robust Estimation of a Location Parameter // Annals of Statistics. — 1964. — Vol. 53, No. 1. — P.73–101. https://doi.org/10.1214/aoms/1177703732

Оптимальное использование метода квадратичного программирования для уравнивания геодезических сетей

Гончаренко А.С.[1], *Гладилин В.Н.*[2], *Шяудините Л.*[3]

[1]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 03127, г. Киев, пр. Академика Глушкова, 2а

[2]Национальный авиационный университет, 03058, г. Киев, пр. Космонавта Комарова, 1

[3]Вильнюсский технический университет Гедимина, LT-10223 Вильнюс, Saulėtekio al. 11

В теории погрешности измерений к грубым относят измерения, в процессе которых возникают промахи, или измерения, погрешности которых превышают граничные погрешности при условии измерений. Грубые ошибки могут возникать не только в процессе измерений, но и в процессе вычислений. Во время вычислений должны быть исключены результаты, которые имеют грубые ошибки. При проектировании геодезических измерений выбирают приборы и методику измерений так, чтобы полученные погрешности были в пределах наперед заданных допустимых значений. Определение грубых ошибок является важным заданием в современной геодезии и актуально при автоматизированном сборе данных, поскольку грубые ошибки могут быть не замечены оператором во время процесса измерений, поэтому отбраковка грубых ошибок не всегда удовлетворяет необходимой точности измерений. В настоящее время важной проблемой является уравнивание при большом количестве определяемых неизвестных, также с учетом систематических погрешностей и погрешностей исходных данных. Метод наименьших квадратов, применяющийся при уравнивании, ограничивает характер информации, которая используется при уравнивании, только равенствами и не предусматривает совместное действие случайных и систематических погрешностей, которые имеют вид неравенств. Решение задачи уравнивания при учете равенств и неравенств выполняется методом математического программирования. При помощи робастного метода уравнивания определяется наличие грубых и систематических ошибок по функции Хьюбера, которая используется в устойчивой регрессии и малочувствительна к выбросам, то есть к грубым ошибкам.

Ключевые слова: грубые и систематические погрешности; уравнивание.

Optimal use of quadratic programming method for alignment of geodesic networks

Goncharenko O.S.[1], *Gladilin V.N.*[2], *Šiaudinytė L.*[3]

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Hlushkova Avenue 2a, 03127 Kyiv, Ukraine

[2]National Aviation University, Kosmonavta Komarova Avenue 1, 03058 Kyiv, Ukraine

[3]Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania

In the theory of measurement errors, gross measurements include measurements, when blunders occur, or measurements, whose errors exceed the marginal errors for measurement condition. Gross errors can occur not only during the measurement process, but also during the calculation process. Results that have gross errors should be excluded from the calculations. When designing geodetic measurements, they select devices and measurement methods which have errors within the predefined acceptable values. The detection of gross errors is a special task in modern geodesy and is relevant for automated data collection, since gross errors may not be noticed by the operator during the measurement process, so the rejection of gross errors does not always satisfy the required measurement accuracy. Currently, an important problem is adjustment with a large number of determined unknowns, as well as taking into account systematic errors and errors of the original data. The least squares method used in adjustment limits the nature of information, used in equalization, only by equations and does not permit the combined effect of random and systematic errors that have the form of inequality. The solution of the adjustment problem with accounting the equalities and inequalities is performed using the mathematical programming method. The robust adjustment method determines the presence of gross and systematic errors using the Huber loss function, which is used in robust regression and is low sensitive to outliers, i.e. to gross errors.

Keywords: gross and systematic errors; adjustment.

Надійшла до редакції	/ Received	2.12.2019
Виправлена авторами	/ Revised	25.12.2019
Прийнята до друку	/ Accepted	30.12.2019