Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)
Том 15 • № 1 • 2019 С. 19 – 24
https://doi.org/10.18372/2411-6602.15.04

УДК 521.82

Метод побудови тривимірного розподілу мас гідростатично врівноваженої еліпсоїдальної планети

М.М. Фис, П.М. Зазуляк, А.М. Бридун, М.І. Юрків, А.Р. Согор

Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. Карпінського, 6

Виведені формули та співвідношення для реалізації методики побудови тривимірного розподілу мас гідростатично врівноваженої еліпсоїдальної планети. По-перше, з'являється можливість інтерпретувати аномалії зовнішнього гравітаційного поля відхиленням тривимірної густини розподілу мас від гідростатично врівноваженого стану. По-друге, умови, що забезпечують мінімум гравітаційної енергії дозволяють робити висновки про стан спокою або динамічних змін в середині тіла. Визначення умов, при яких планета перебуває в стані гідростатичної рівноваги, або ж відхилення від неї реального тіла дає можливість встановлювати причини механізму перерозподілу мас. Це в свою чергу дає основу для дослідження та інтерпретації динамічних процесів в середині небесного тіла. Стан гідростатичної рівноваги дозволяє розв'язувати ряд задач астрономії та фізики планет. Оцінки значень потенціалу та енергії в тектоносфері розкривають механізми, що спричиняють рух континентальних плит. Відомо, що умова гідростатичної рівноваги забезпечується мінімумом гравітаційної енергії E. В такому випадку функція кусково-неперервного розподілу мас описується виразом через многочлени Лежандра. Потенціал функції кусково-неперервного розподілу мас є рівномірно збіжним для приведеного класу функцій. Вираз для гравітаційної енергії E залежить від заданої функції $\delta^0(\rho)$ та фіксованої фігури у вигляді еліпсоїда. Тому перерозподіл густини, що здійснюється зміною коефіцієнтів b_{mnk}, дає варіації енергії E. Також величини b_{mnk} визначають Стоксові постійні C_{NK}, S_{NK}. Мінімум гравітаційної енергії E визначається як задача на умовний екстремум функції Лагранжа. Її розв'язок відносно величин λ_{nk}, γ_{nk}, b_{pqs} визначає такий розподіл мас, що дає мінімум енергії E для конкретного гравітаційного поля. Детальний аналіз даної системи рівнянь дозволяє зробити висновок, що вона розпадається на вісім груп, що формуються за відповідними Стоксовими постійними. Розв'язок цієї системи отримується за допомогою послідовності матричних перетворень для реалізації наведеної методики. Таким чином, приведені всі необхідні формули та співвідношення описаної методики побудови тривимірного розподілу мас гідростатично врівноваженої еліпсоїдальної планети, що дозволяє виконувати потрібні дослідження.

Ключові слова: тривимірний розподіл мас; гідростатично врівноважена еліпсоїдальна планета; аномалії зовнішнього гравітаційного поля; умова гідростатичної рівноваги; функція кусково-неперервного розподілу мас; многочлени Лежандра; Стоксові постійні.

Визначення умов [3, 10], при яких планета перебуває в стані гідростатичної рівноваги, або ж відхилення від неї реального тіла дає можливість встановлювати причини механізму перерозподілу мас [8]. Це, в свою чергу, дає основу для дослідження і інтерпретації динамічних процесів всередині небесного тіла. Стан гідростатичної рівноваги дозволяє розв'язувати ряд задач астрономії [9] та фізики планет [1]. По-перше, з'являється можливість інтерпретувати аномалії зовнішнього гравітаційного поля відхиленням тривимірної густини розподілу мас від гідростатично врівноваженого стану. По-друге, умови, що забезпечують мінімум гравітаційної енергії дозволяють робити висновки про стан спокою або динамічних змін в середині тіла [8]. Оцінки значень потенціалу та енергії в тектоносфері розкривають механізми, що спричиняють рух континентальних плит.

Відомо, що умова гідростатичної рівноваги забезпечується мінімумом гравітаційної енергії E [3, 10]:

$$E = -\frac{1}{2}\int_{\tau} U\delta\, d\tau, \tag{1}$$

де δ — функція розподілу мас надр планети; U — потенціал всередині тіла τ, що генерується цим розподілом δ; τ — тіло інтегрування, яке в подальшому приймаємо як еліпсоїд $\tau\left\{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\leqslant 1\right\}$.

В такому випадку функція кусково-неперервного розподілу мас описується виразом [2]

$$\delta(x_1,x_2,x_3) = \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk} W_{mnk}(x_1,x_2,x_3), \tag{2}$$

де $\delta^0(\rho)$ – одновимірна сферична модель розподілу мас (для Землі це референцна модель PREM [11]);

$$W_{mnk} = \frac{1}{m!\,n!\,k!\,2^N}\frac{\partial^N}{\partial x_1^m\,\partial x_2^n\,\partial x_3^k}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-1\right)^N$$

* Фис Михайло Михайлович; ✉ fysmikhail@gmail.com

— многочлени Лежандра [2]; b_{mnk} — коефіцієнти розкладу, причому кожен набір визначає свій розподіл δ.

Потенціал функції (2) визначається так [5]:

$$U(P) = U_0(P) + \sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk} U_{mnk}(P), \tag{3}$$

де

$$U_0(P) = G \int_\tau \frac{\delta^0(P)}{r(Q,P)}\, d\tau, \qquad U_{mnk}(P) = G \int_\tau \frac{W_{mnk}(P)}{r(Q,P)}\, d\tau. \tag{4}$$

Зауважимо, що ряд (3) є рівномірно збіжним для приведеного класу функцій.

Вираз для гравітаційної енергії E з урахуванням (3), (4) є таким:

$$E = -\frac{1}{2}\left(\int_\tau U_0\delta^0\, d\tau + \sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk} \int_\tau \left(U_{mnk}\delta^0 + W_{mnk}U_0\right) d\tau + \sum_{m_1+n_1+k_1=0}^{N} \sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk} b_{m_1n_1k_1} \int_\tau W_{m_1n_1k_1} U_{mnk}\, d\tau\right)$$

та залежить від заданої функції $\delta^0(\rho)$ та фіксованої фігури у вигляді еліпсоїда. Тому перерозподіл густини, що здійснюється зміною коефіцієнтів b_{mnk}, дає варіації E. Також величини визначають Стоксові постійні C_{NK}, S_{NK} [4]:

$$C_{NK} + iS_{NK} = \sum_{t=0}^{n} \left(c_{nk}^t + is_{nk}^t\right) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{p+q+s=t} \left(\alpha_{pqs}^{nk} + i\beta_{pqs}^{nk}\right) b_{pqs}, \tag{5}$$

де

$$\alpha_{pqs}^{nk} + i\beta_{pqs}^{nk} = \int_\tau \left(u_{nk} + iv_{nk}\right) W_{pqs}\, d\tau, \tag{6}$$

u_{nk}, v_{nk} — кульові функції n-го порядку.

Мінімум величини E при умові (5) визначається як задача на умовний екстремум функції Лагранжа [6]

$$F(E, c_{nk}, s_{nk}) = E + \sum_{n,k} \left(\lambda_{nk}\left(c_{nk} - \sum_{t=0}^{n} \sum_{p+q+s=t} \alpha_{pqs}^{nk} b_{pqs}\right) + \gamma_{nk}\left(s_{nk} - \sum_{t=0}^{n} \sum_{p+q+s=t} \beta_{pqs}^{nk} b_{pqs}\right)\right), \tag{7}$$

λ_{nk}, γ_{nk} — множники Лагранжа.

Її диференціювання дає наступну систему:

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk}\left(\int_\tau U_{mnk}W_{000}\, d\tau + \int_\tau W_{mnk}U_{000}\, d\tau\right) - \sum_{n,k}\left(\lambda_{nk}\alpha_{000}^{nk} b_{000} + \gamma_{nk}\beta_{000}^{nk} b_{000}\right) = \\
\qquad\qquad\qquad \displaystyle = -\int_\tau \delta^0 U_{000}\, d\tau - \int_\tau W_{000}U_0\, d\tau, \\
\displaystyle\sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk}\left(\int_\tau U_{mnk}W_{001}\, d\tau + \int_\tau W_{mnk}U_{001}\, d\tau\right) - \sum_{n,k}\left(\lambda_{nk}\alpha_{001}^{nk} b_{001} + \gamma_{nk}\beta_{001}^{nk} b_{001}\right) = \\
\qquad\qquad\qquad \displaystyle = -\int_\tau \delta^0 U_{001}\, d\tau - \int_\tau W_{001}U_0\, d\tau, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\displaystyle\sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk}\left(\int_\tau U_{mnk}W_{00N}\, d\tau + \int_\tau W_{mnk}U_{00N}\, d\tau\right) - \sum_{n,k}\left(\lambda_{nk}\alpha_{00N}^{nk} b_{00N} + \gamma_{nk}\beta_{00N}^{nk} b_{00N}\right) = \\
\qquad\qquad\qquad \displaystyle = -\int_\tau \delta^0 U_{00N}\, d\tau - \int_\tau W_{00N}U_0\, d\tau, \\
\displaystyle C_{NK} = \sum_{t=0}^{n} \sum_{p+q+s=t} \alpha_{pqs}^{nk} b_{pqs}, \\
\displaystyle S_{NK} = \sum_{t=0}^{n} \sum_{p+q+s=t} \beta_{pqs}^{nk} b_{pqs}.
\end{cases} \tag{8}$$

Її розв'язок відносно величин λ_{nk}, γ_{nk}, b_{pqs} визначає такий розподіл мас, що дає мінімум енергії E для конкретного гравітаційного поля.

Детальний аналіз системи рівнянь (8) дозволяє зробити висновок, що вона розпадається на вісім груп, що формуються за відповідними Стоксовими постійними:

$$
\begin{array}{ll}
C_{0,0}, C_{2,0}, C_{2,2}, \ldots, C_{2N,0}, C_{2N,2}, \ldots, C_{2N,2N} & (\mathrm{I}), \\
S_{2,2}, S_{4,2}, S_{4,4}, \ldots, S_{2N,2}, \ldots, S_{2N,2N} & (\mathrm{II}), \\
C_{2,1}, C_{4,1}, C_{4,3}, \ldots, C_{2N,1}, C_{2N,3}, \ldots, C_{2N,2N-1} & (\mathrm{III}), \\
S_{2,1}, S_{4,1}, S_{4,3}, \ldots, S_{2N,1}, S_{2N,3}, \ldots, S_{2N,2N-1} & (\mathrm{IV}), \\
C_{3,0}, C_{3,2}, \ldots, C_{2N+1,0}, C_{2N+1,2}, \ldots, C_{2N+1,2N} & (\mathrm{V}), \\
S_{3,2}, S_{5,2}, S_{5,4}, \ldots, S_{2N+1,2}, \ldots, S_{2N+1,2N} & (\mathrm{VI}), \\
C_{1,1}, C_{3,1}, C_{3,3}, \ldots, C_{2N+1,1}, C_{2N+1,3}, \ldots, C_{2N+1,2N+1} & (\mathrm{VII}), \\
S_{3,1}, S_{3,3}, \ldots, S_{2N+11}, S_{2N+1,3}, \ldots, S_{2N+1,2N+1} & (\mathrm{VIII}).
\end{array}
\tag{9}
$$

Відповідно кожна з них включає в себе наступну низку коефіцієнтів (невідомих):

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I}. & b_{0,0,0}, b_{0,0,2}, b_{2,0,0}, b_{0,2,0}, \ldots, b_{0,0,2N}, b_{2,0,2N-2}, b_{0,2,2N-2}, b_{4,0,2N-4}, b_{2,2,2N-4}, b_{0,4,2N-4}, \ldots, b_{2,2N-2,0}, \ldots, b_{0,2N,0}; \\
\mathrm{II}. & b_{1,1,0}, b_{1,1,2}, b_{3,1,0}, b_{1,3,0}, \ldots, b_{1,1,2N-2}, b_{3,1,2N-4}, b_{1,3,2N-4}, b_{5,1,2N-6}, b_{3,3,2N-6}, b_{1,5,2N-6}, \ldots, b_{3,2N-3,0}, \ldots, b_{1,2N-1,0}; \\
\mathrm{III}. & b_{1,0,1}, b_{1,0,3}, b_{3,0,1}, b_{1,2,1}, \ldots, b_{1,0,2N-1}, b_{3,0,2N-3}, b_{1,2,2N-3}, b_{5,0,2N-5}, b_{3,2,2N-5}, b_{1,4,2N-5}, \ldots, b_{3,2N-4,1}, \ldots, b_{1,2N-2,1}; \\
\mathrm{IV}. & b_{0,1,1}, b_{0,1,3}, b_{2,1,1}, b_{0,3,1}, \ldots, b_{0,1,2N-1}, b_{2,1,2N-3}, b_{0,3,2N-3}, b_{4,1,2N-5}, b_{2,3,2N-5}, b_{0,5,2N-5}, \ldots, b_{2,2N-3,1}, \ldots, b_{0,2N-1,1}; \\
\mathrm{V}. & b_{0,0,1}, b_{0,0,3}, b_{2,0,1}, b_{0,2,1}, \ldots, b_{0,0,2N+1}, b_{2,0,2N-1}, b_{0,2,2N-1}, b_{4,0,2N-3}, b_{2,2,2N-3}, b_{0,4,2N-3}, \ldots, b_{2,2N-2,1}, \ldots, b_{0,2N,1}; \\
\mathrm{VI}. & b_{1,1,1}, b_{1,1,3}, b_{3,1,1}, b_{1,3,1}, b_{1,1,2N-1}, b_{3,1,2N-3}, b_{1,3,2N-3}, b_{5,1,2N-5}, b_{3,3,2N-5}, b_{1,5,2N-5}, \ldots, b_{1,2N-1,1}, \ldots, b_{1,2N-1,1}; \\
\mathrm{VII}. & b_{1,0,0}, b_{1,0,2}, b_{3,0,0}, b_{1,2,0}, \ldots, b_{1,0,2N}, b_{3,0,2N-2}, b_{1,2,2N-2}, b_{5,0,2N-4}, b_{3,2,2N-4}, b_{1,4,2N-4}, \ldots, b_{3,2N-2,0}, \ldots, b_{1,2N,0}; \\
\mathrm{VIII}. & b_{0,1,0}, b_{0,1,2}, b_{2,1,0}, b_{0,3,0}, b_{0,1,2N}, b_{2,1,2N-2}, b_{0,3,2N-2}, b_{4,1,2N-4}, b_{2,3,2N-4}, b_{0,5,2N-4}, \ldots, b_{0,2N-1,2}, \ldots, b_{0,2N+1,0}.
\end{array}
\tag{10}
$$

Відповідні системи рівнянь подаємо в матричному вигляді:

$$
\begin{cases} T_i B_i - R_i \lambda_i = D_i, \\ \alpha_i B_i = C_i, \end{cases} \qquad (i = \mathrm{I–VIII}). \tag{11}
$$

Тут введені позначення:

$$
\begin{gathered}
b_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} b_{0,0,2} \\ \ldots \\ b_{0,0,2N} \\ b_{2,0,2N-2} \\ \ldots \\ b_{0,2N,0} \end{bmatrix}, \quad
b_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} b_{1,1,0} \\ \ldots \\ b_{1,1,2N-2} \\ b_{3,1,2N-4} \\ \ldots \\ b_{1,2N-1,0} \end{bmatrix}, \quad
b_{\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} b_{1,0,1} \\ \ldots \\ b_{1,0,2N-1} \\ b_{3,0,2N-3} \\ \ldots \\ b_{1,2N-2,1} \end{bmatrix}, \quad
b_{\mathrm{IV}} = \begin{bmatrix} b_{0,1,1} \\ \ldots \\ b_{0,1,2N-1} \\ b_{2,1,2N-3} \\ \ldots \\ b_{0,2N-1,1} \end{bmatrix}, \\
b_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} b_{0,0,1} \\ \ldots \\ b_{0,0,2N+1} \\ b_{2,0,2N-1} \\ \ldots \\ b_{0,2N,1} \end{bmatrix}, \quad
b_{\mathrm{VI}} = \begin{bmatrix} b_{1,1,1} \\ \ldots \\ b_{1,1,2N-1} \\ b_{3,1,2N-3} \\ \ldots \\ b_{1,2N-1,1} \end{bmatrix}, \quad
b_{\mathrm{VII}} = \begin{bmatrix} b_{1,0,0} \\ \ldots \\ b_{1,0,2N} \\ b_{3,0,2N-2} \\ \ldots \\ b_{1,2N,0} \end{bmatrix}, \quad
b_{\mathrm{VIII}} = \begin{bmatrix} b_{0,1,0} \\ \ldots \\ b_{0,1,2N} \\ b_{2,1,2N-2} \\ \ldots \\ b_{0,2N+1,0} \end{bmatrix}, \\
c_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ \ldots \\ c_{2N,0} \\ c_{2N,2} \\ \ldots \\ c_{2N,2N} \end{bmatrix}, \quad
c_{\mathrm{VII}} = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ \ldots \\ c_{2N+1,1} \\ c_{2N+1,3} \\ \ldots \\ c_{2N+1,2N+1} \end{bmatrix}, \quad
c_{\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} c_{2,1} \\ \ldots \\ c_{2N,1} \\ c_{2N,3} \\ \ldots \\ c_{2N,2N-1} \end{bmatrix}, \quad
c_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} c_{1,0} \\ \ldots \\ c_{2N+1,0} \\ c_{2N+1,2} \\ \ldots \\ c_{2N+1,2N} \end{bmatrix}, \\
c_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} s_{2,2} \\ \ldots \\ s_{2N,2} \\ s_{2N,4} \\ \ldots \\ s_{2N,2N} \end{bmatrix}, \quad
c_{\mathrm{VIII}} = \begin{bmatrix} s_{1,1} \\ \ldots \\ s_{2N+1,1} \\ s_{2N+1,3} \\ \ldots \\ s_{2N+1,2N+1} \end{bmatrix}, \quad
c_{\mathrm{IV}} = \begin{bmatrix} s_{2,1} \\ \ldots \\ s_{2N,1} \\ s_{2N,3} \\ \ldots \\ s_{2N,2N-1} \end{bmatrix}, \quad
c_{\mathrm{VI}} = \begin{bmatrix} s_{3,2} \\ \ldots \\ s_{2N+1,2} \\ s_{2N+1,2} \\ \ldots \\ s_{2N+1,2N} \end{bmatrix}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Елементами матриць T_i є

$$
t_{ts} = \int_{\tau} U_{mnk} W_{m_1 n_1 k_1} \, d\tau + \int_{\tau} W_{mnk} U_{m_1 n_1 k_1} \, d\tau,
$$

де t — порядковий номер індексів $m_1 n_1 k_1$ в ряді (12) та s — порядковий номер індексів mnk в позначеннях

(12); D_i — стовпець елементів

$$d_t = \int\limits_\tau \delta^0 U_{mnk}\, d\tau + \int\limits_\tau W_{mnk} U_0\, d\tau$$

(t відповідає номеру рядка з індексом mnk у виразах (12)).

Елементи матриць r_{ts}, R_i — коефіцієнти α_{mnk}^{nk} або β_{mnk}^{nk} зі значеннями номерів індексів з формул (12); λ_i — стовпець невідомих λ_t (λ_{nk}, γ_{nk}).

Розв'язок системи (9) отримується за допомогою послідовності матричних перетворень:

$$\begin{aligned}
&T_i B_i = R_i \lambda_i + D_i,\\
&B_i = T_i^{-1}(R_i \lambda_i + D_i),\\
&\alpha_i T_i^{-1}(R_i \lambda_i + D_i) = C_i,\\
&\lambda_i = (\alpha_i T_i^{-1} R_i)^{-1}(C_i - \alpha_i T_i^{-1} D_i),\\
&B_i = T_i^{-1}\big(R_i(\alpha_i T_i^{-1} R_i)^{-1}(C_i - \alpha_i T_i^{-1} D_i) + D_i\big).
\end{aligned}$$

Знайдемо формули визначення співвідношень у приведеному алгоритмі.

Нагадаємо, що потенціал (4,b)) подається [5] так:

$$U_{mnk} = \frac{3V_e(-1)^N}{4m!\, n!\, k!\, 2^N (N+1)} \frac{\partial^N}{\partial x_1^m\, \partial x_2^n\, \partial x_3^k} \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2+u} - \frac{x_2^2}{a_2^2+u} - \frac{x_3^2}{a_3^2+u}\right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)} \tag{13}$$

і його можна записати

$$U_{mnk} = \frac{3V_e(-1)^N N!}{4m!\, n!\, k!\, 2^N} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!\, l!} \frac{\partial^N}{\partial x_1^m\, \partial x_2^n\, \partial x_3^k} \int\limits_0^\infty (\mu^2)^l du \tag{14}$$

де $\mu^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2+u} + \frac{x_2^2}{a_2^2+u} + \frac{x_3^2}{a_3^2+u}$.

Тоді елементи $\int\limits_\tau W_{m_1 n_1 k_1} U_{mnk}\, d\tau$ визначаються як:

$$\int\limits_\tau W_{m_1 n_1 k_1} U_{mnk}\, d\tau = \frac{3V_e(-1)^N N!\, N_1!\, 2^{l-N}}{4m!\, n!\, k!\, m_1!\, n_1!\, k_1!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!(N_1-N+2l+3)!!} L_{N',N_1,l}^{m',n',k'},$$

$$m' = m+m_1, \quad n' = n+n_1, \quad k' = k+k_1, \quad N' = N+N_1,$$

де

$$L_{N',N_1,l}^{m',n',k'} = \frac{\partial^{N'}}{\partial x_1^{m'}\, \partial x_2^{n'}\, \partial x_3^{k'}} \int\limits_\tau \left(\int\limits_0^\infty (\mu^2)^l \frac{du}{Q(u)} \right) (\rho^2-1)^{N_1} d\tau = \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!\,(2t_2-1)!!\,(2t_3-1)!!\, M_{t_1 t_2 t_3}}{(2t_1-m)!!\,(2t_2-n)!!\,(2t_3-k)!!},$$

$$M_{t_1 t_2 t_3} = a^{2t_1} b^{2t_2} c^{2t_3} \left(\int\limits_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{t_1}(b^2+u)^{t_2}(c^2+u)^{t_3} Q(u)} \right).$$

Аналогічно визначаються величини

$$\int\limits_\tau \delta^0(\rho) U_{mnk}\, d\tau = \frac{(-1)^N N!}{4m!\, n!\, k!\, 2^N} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!\, l!} \frac{\partial^N}{\partial x_1^m\, \partial x_2^n\, \partial x_3^k} \int\limits_\tau \left(\int\limits_0^\infty (\mu^2)^l du \right) \delta^0(\rho)\, d\tau =$$

$$= \frac{(-1)^N N!}{4m!\, n!\, k!\, 2^N} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!} K'_{mnk},$$

де

$$K'_{mnk} = \frac{2^l N!}{(2l-N+1)!!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!\,(2t_2-1)!!\,(2t_3-1)!!\, M_{t_1 t_2 t_3}}{(2t_1-m)!!\,(2t_2-n)!!\,(2t_3-k)!!} R_{2l-N+2}, \qquad R_s = \int\limits_0^1 \delta^0(\rho) \rho^s\, d\rho.$$

Значення $\int_\tau W_{mnk} U_0 d\tau$ обчислюємо, подаючи функцію $\delta^0(\rho)$ рядами за поліномами Лежандра [7]:

$$\delta^0(\rho) = \sum_{n=0}^\infty c_n P_n(2\rho^2-1), \qquad c_n = 2(2n+1) \int \delta^0(\rho) \rho P_n(2\rho^2-1)\, d\rho = 2(2n+1) \sum_{l=0}^n d_n^l S_l$$

$$S_l = \int\limits_0^1 \delta^0(\rho) \rho (2\rho^2-1)^l\, d\rho = \sum_{t=0}^l 2^t C_l^t (-1)^{l-t} R_{2t+1}.$$

Відповідно внутрішній потенціал такого представлення визначається за допомогою виразів:

$$U_0 = \int\limits_\tau \frac{\delta^0(\rho)}{r} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_\tau \frac{P_n(2\rho^2-1)}{r}\, d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{l=0}^{n} d_n^l \sum_{t=0}^{l} 2^t C_l^t (-1)^{l-t} u_t,$$

де

$$u_t = \int\limits_\tau \frac{\rho^{2t}}{r} d\tau = \frac{3V_e t!}{4} \sum_{l=0}^{t} \frac{(-1)^{t-l}}{(t-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{x_1^{2t_1} x_2^{2t_2} x_3^{2t_3}}{t_1!\, t_2!\, t_3!\, a_1^{2t_1} a_2^{2t_2} a_3^{2t_3}} M_{t_1 t_2 t_3}.$$

Це дозволяє знайти

$$\int\limits_\tau W_{mnk} u_t \, d\tau = \frac{3V_e t!}{4m!\, n!\, k!} \sum_{l=0}^{t} \frac{(-1)^{t-l}}{(t-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{2^l (2t_1-1)!!\, (2t_2-1)!!\, (2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!!\, (2t_2-n)!!\, (2t_3-k)!!(2l+N+3)!!} M_{t_1 t_2 t_3}$$

і остаточно

$$\int\limits_\tau W_{mnk} U_0 \, d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{l=0}^{n} d_n^l \sum_{t=0}^{l} 2^t C_l^t (-1)^{l-t} \int\limits_\tau W_{mnk} u_t \, d\tau.$$

Таким чином, приведені всі необхідні формули та співвідношення для реалізації наведеної методики, що дозволяє виконувати потрібні дослідження.

1. *Жарков В.Н., Трубицын В.П.* Физика планетарных недр. — М: Наука; Гл. ред. физ-мат. лит., 1980. — 448 с.
2. *Мещеряков Г.А.* Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. — М.: Наука, 1991. — 216 с.
3. *Мориц Г.* Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. — Киев, 1994. — 240 с.
4. *Фис М.М.* О вычислении модельных стоксовых постоянных Земли, соответствующих представлению ее плотности частной суммой обобщенного ряда Фурье // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. — 1982. — Вып. 36. — С.103–107.
5. *Фис М.М., Нікулішин В.І.* Про єдиний алгоритм визначення значень густини, потенціалу та енергії одновимірного розподілу мас еліпсоїдальної планети // Геодезія, картографія та аерофотознімання. — 2009. — № 71. — С.90–95.
6. *Фис М., Нікулішин В., Покотило І.* Метод дослідження стану гідростатичної рівноваги трьохвимірної еліпсоїдальної планети // XVI Міжнародний симпозіум "Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS-технології" (12–17 вересня 2011 р., Алушта, Крим). — С.99–103.
7. *Фис М., Нікулішин В., Покотило І.* Методи апроксимації радіальних розподілів густини мас планет многочленами Лежандра і дослідження їх збіжності // Матеріали XV міжнародного науково-технічного симпозіуму "Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GPS і GIS-технології" (13–18 вересня 2010 р., Алушта, Крим). — С.258–259.
8. *Церклевич А.Л., Заяць О.С., Шило Є.О.* Динаміка трансформації фігури Землі // Кинематика и физика небесных тел. — 2010. — Т. 26, № 2. — С.59–73.
9. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973. — 288 с.
10. *Шен Э.Л.* О вариационном подходе к построению плотностной модели Земли // Геофизический сборник АН УССР. — 1977. — Вып. 80. — С.44–77.
11. *Dzewonski A., Anderson D.* Preliminary reference Earth model // Physics of the Earth and Planet Inter. — 1981. — № 25. — P.297–356. https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7

Метод построения трехмерного распределения масс гидростатически уравновешенной эллипсоидальной планеты

Фыс М.М., Зазуляк П.М., Брыдун А.М., Юркив М.И., Согор А.Р.

Национальный университет «Львовская политехника», 79013, г. Львов, ул. Карпинского, 6

Выведены формулы и соотношения для реализации методики построения трехмерного распределения масс гидростатически уравновешенной эллипсоидальной планеты. Во-первых, появляется возможность интерпретировать аномалии внешнего гравитационного поля отклонением трехмерной плотности распределения масс от гидростатически уравновешенного состояния. Во-вторых, условия, обеспечивающие минимум гравитационной энергии, позволяют делать выводы о состоянии покоя или динамических изменений внутри тела.

Ключевые слова: трехмерное распределение масс; гидростатически уравновешенная эллипсоидальная планета; аномалии внешнего гравитационного поля; условие гидростатического равновесия; функция кусочно-непрерывного распределения масс; многочлены Лежандра; Стоксовы постоянные.

Method of construction of three-dimensional mass distribution of hydrostatically introduced ellipsoidal planet

Fys M.M., Zazuliak P.M., Brydun A.M., Yurkiv M.I., Sohor A.R.
Lviv Polytechnic National University, 79013, Lviv, Karpinskyi street 6

Formulas and relations for the realization of the method of construction of three-dimensional mass distribution of hydrostatically balanced ellipsoidal planet are derived. First, it is possible to interpret the anomalies of the external gravitational field by deviating the three-dimensional density of mass distribution from the hydrostatically balanced state. Second, conditions that provide a minimum of gravitational energy allow us to draw conclusions about the state of rest or dynamic changes in the middle of the body. Determining the conditions under which the planet is in a state of hydrostatic equilibrium, or deviation from it of the real body makes it possible to establish the causes of the mechanism of mass redistribution. This in turn provides the basis for the study and interpretation of dynamic processes in the mid-celestial body. The state of hydrostatic equilibrium allows to solve a number of problems of the astronomy and physics of the planets. Estimates of potential and energy values in the tectonosphere reveal the mechanisms that cause the movement of continental plates. It is known that the hydrostatic equilibrium condition is ensured by a minimum of gravitational energy E. In this case, the piecewise continuous mass distribution function is described by the expression through Legendre polynomials. The potential of the piecewise-continuous mass distribution function is uniformly convergent for the given class of functions. The expression for gravitational energy E depends on a given function $\delta^0(\rho)$ and a fixed shape in the form of an ellipsoid. Therefore, the redistribution of the density produced by the change in the coefficients b_{mnk} gives variations in the energy E. Also, the values b_{mnk} are determined by the Stokes constants C_{NK}, S_{NK}. The minimum of gravitational energy E is defined as the problem for the conditional extremum of the Lagrange function. Its intersection with respect to magnitudes λ_{nk}, γ_{nk}, b_{pqs} determines the mass distribution that gives the minimum energy E for a particular gravitational field. A detailed analysis of this system of equations leads to the conclusion that it is divided into eight groups formed by the corresponding Stokes constants. The solution of this system is obtained by using a sequence of matrix transformations to implement the above method. Thus, all the necessary formulas and ratios of the described method of construction of three-dimensional mass distribution of hydrostatically balanced ellipsoidal planet are presented, which allows to perform the necessary studies.

Keywords: three-dimensional mass distribution; hydrostatically equilibrated ellipsoidal planet; anomalies of the external gravitational field; condition of hydrostatic equilibrium; function of lump continuous mass distribution; Legendre polynomial; Stokes constant.

Надійшла до редакції / Received 29.07.2019
Виправлена авторами / Revised 19.09.2019
Прийнята до друку / Accepted 23.09.2019