



ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)

Том 13 • № 2 • 2017 С. 91 – 94

УДК 524.31

О времени горения водорода в недрах звезд. Новые аппроксимационные формулы

В.А. Захожай*, С.И. Забуга

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 61022, г. Харьков, площадь Свободы, 4

Получены новые аппроксимационные формулы, описывающие зависимость времени горения водорода от масс звезд нулевого возраста для интервалов масс и элементного состава звезд, которые образовывались на протяжении всего времени жизни Вселенной.

Ключевые слова: главная последовательность; статистические закономерности; звездные населения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Под временем горения водорода (Н-время) в недрах звезд населений I и II понимается продолжительность ядерных реакций протон-протонного ($p-p$) цикла у звезд с начальными массами $M \lesssim 1 M_{\odot}$ и углеродно-азотного (C-N) цикла — для $M > 1 M_{\odot}$. У звезд населения III, с нулевым содержанием тяжелых химических элементов (называемых «металлами», если их ядра массивнее ядра гелия), возникают условия только для $p-p$ цикла ядерных реакций. С другой стороны, такое горение водорода определяет условие, во-первых, принадлежности космических тел к звездам как космическим телам, во-вторых, нахождению их на главной последовательности — ключевой стадии их эволюции. Этой эволюционной стадии соответствует нахождение на диаграмме Герцшпрунга–Рессела (Г-Р) звезд с солнечным элементным составом (население I) на главной последовательности, с пониженным содержанием металлов (население II) — на последовательности субкарликов. Локализация представителей звезд населения III на диаграмме Г-Р ожидается ниже последовательности субкарликов, но до настоящего времени ни один из таких объектов не обнаружен. Открыты лишь три звезды с промежуточным содержанием металлов, между населением II и III: HE 1327-2326 [7] и SDSS J102915+172927 [11], HE 0107-5240 2326 [20]. Для них специально ввели понятие промежуточного населения — II.5.

С ростом масс звезд M интенсивность ядерных реакций растет, что ведет к уменьшению времени горения водорода τ_H . Точную аналитическую зависимость этого свойства звезд $\tau_H(M)$ получить нельзя, поскольку это время является следствием решения известных систем дифференциальных уравнений, определяющих их внутренне строение, которые решаются численными методами прикладной математики. Поэтому предложенные аппроксимации полученных зависимостей $\tau_H(M)$ разные, описывающее связи, как правило, на определенных интервалах масс. В большинстве случаев это степенные функции с показателями степени $\alpha \approx -3 \div -4$ для масс звезд $M < 1 M_{\odot}$ [6]; $\alpha \approx -3,7$ для $M \sim 1 M_{\odot}$; $\alpha \approx -2,5$ для $M = 2,3 \div 8 M_{\odot}$; $\alpha \approx -1$ для $M = 8 M_{\odot} \div M_{\max}$ [3]; и квадратичные линейно-логарифмические [4, 5, 8, 17], значения свободных членов которых различные на интервалах звездных масс $1 \div 100 M_{\odot}$, $0,2 \div 100 M_{\odot}$, $0,6 \div 120 M_{\odot}$ и $0,8 \div 120 M_{\odot}$, соответственно, и отмечается зависимость от содержания металлов [8, 17]. Для населений звезд I и III всего интервала звездных масс была предложена логарифмическая полиномиальная связь с показателями степени 4 и 5, соответственно [2]. Предложенное обобщение довольно надежно описывает зависимости для $\tau_H(M)$ всех известных надежно рассчитанных моделей [6, 8, 13, 14, 16–19], однако оно обладает одним существенным недостатком. Из этого выражения нет возможности записать в удобном аналитическом виде обратную функцию $M(\tau_H)$, наличие которой необходимо при решении определенного круга задач звездной статистики и космогонии.

Целью настоящей работы является поиск неполиномиально-логарифмической зависимости между временем горения водорода в недрах звезд с солнечным ($Z_{\odot} = Z = 0,02$ [9]) и нулевым ($Z = 0$) содержанием металлов и их обратных аналитических функций.

2. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ «Н-ВРЕМЯ–МАССА»

Для поиска искоемых зависимостей $\tau_H(M)$, по которым можно в аналитическом виде получить их обратные функции $M(\tau_H)$, использовались те же работы, что и для полученных ранее полиномиально-логарифмических связей между временем жизни звезд на главной последовательности и их

*Захожай Владимир Анатольевич; ✉ zakhzhay.vladimir@gmail.com

массой [2]. Т.е. в основу были положены результаты моделирования звезд населений I и III, приведенные в статьях [6, 13, 14, 16, 18, 19], и данные об обобщенных зависимостях [3–5, 6, 8, 17].

С учетом качественного поведения зависимости (убывания времени горения водорода с ростом массы звезд) в логарифмических единицах « $\lg \tau_{H_i} - \lg M$ » исследовались три класса функций с двумя, тремя и четырьмя свободными параметрами для каждого i -го ($i = I$ и III) населения:

– логарифмически-степенные

$$\lg \tau_{H_i} = a_i (\lg M + b)^{c_i} \Big|_{\substack{b = \text{const.} \\ b = b_i}} \quad (1)$$

– логарифмически-показательные

$$\lg \tau_{H_i} = \left(\sum_{k=1}^2 a_k^i e^{b_k^i \lg M} + c \right) \Big|_{\substack{a_1^i = 0, c = 0, \\ a_2^i = 0, c = c_i, \\ c = 0}} \quad (2)$$

– обратные логарифмически-линейные

$$\lg \tau_{H_i} = [a + b(c \lg M + d)^{-1}] \Big|_{\substack{a = 0, b = 1, c = c_i, d = d_i, \\ a = a_i, b = b_i, c = 1, d = d_i}} \quad (3)$$

Выполнить линейризацию выбранных для аппроксимации зависимостей (1)–(3) для применения метода наименьших квадратов (например, при решении методом Гаусса) не представляется возможным. Поэтому был использован стандартный пакет программы Microsoft Excel «Поиск решения», позволяющий методом итераций реализовать метод наименьших квадратов и вычислить сумму квадратов отклонений $\sum_k \Delta_k^2$, служащую мерой достоверности полученного решения, для окончательно полученных таким образом свободных членов. В табл. 1 приведены вычисленные значения $\sum_k \Delta_k^2$ для всех выбранных для аппроксимации функций (1)–(3).

Как видно из табл. 1, минимальным значениям отвечают логарифмические показательные функции (2) с тремя и четырьмя свободными членами. Им соответствует следующие аналитические связи (для четырех свободных членов с самыми минимальными значениями $\sum_k \Delta_k^2$):

$$\lg \tau_{H_I} = 9,809e^{-0,347 \lg M} + 0,105e^{1,3381 \lg M}, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 11,39, \quad (4)$$

$$\lg \tau_{H_{III}} = 8,910e^{-0,404 \lg M} + 0,868e^{0,524 \lg M}, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 3,27. \quad (5)$$

После приведения им отвечают соответствующие логарифмически-степенные функции

$$\lg \tau_{H_I} = 9,809M^{-0,150} + 0,105M^{0,581}, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 11,39, \quad (6)$$

$$\lg \tau_{H_{III}} = 8,910M^{-0,175} + 0,868M^{0,228}, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 3,27. \quad (7)$$

Для трех свободных членов лучшими аппроксимациями оказались функции

$$\lg \tau_{H_I} = 5,189e^{-0,588 \lg M} + 4,699, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 14,69, \quad (8)$$

$$\lg \tau_{H_{III}} = 4,240e^{-0,702 \lg M} + 5,481, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 7,41. \quad (9)$$

которым, как и выше, можно привести в соответствие логарифмически-степенные функции

$$\lg \tau_{H_I} = 5,189M^{-0,255} + 4,699, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 14,69, \quad (10)$$

$$\lg \tau_{H_{III}} = 4,240M^{-0,305} + 5,481, \quad \sum_k \Delta_k^2 = 7,41. \quad (11)$$

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Логарифмически-степенные функции (6)–(7), общий вид которых можно представить как

$$\lg \tau_H = a_1 M^{b_1} + a_2 M^{b_2}. \quad (12)$$

Если показатели степени имеют разные знаки, функция (12) имеет экстремум, который, как не сложно показать, определяется выражением

$$M = \left(-\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right)^{\frac{1}{b_2 - b_1}}. \quad (13)$$

Подставляя в него значения, приведенные в формулах (6) и (7), получим значения масс, больше которых полученные логарифмически-степенные функции после убывания, начинают расти. Для населений I и III значения масс, соответственно, равны: $M_I = 78 M_\odot$ и $M_{III} = 168 M_\odot$. Эти значения меньше максимальных масс звезд населений I и III: $\max M_I = 150 M_\odot$ [1, 12] и $\max M_{III} = 500 - 600 M_\odot$ [10, 15]. Следовательно, хотя полученные решения и имеют наименьшие значения $\sum_k \Delta_k^2$, применимость их следует ограничить этими массами.

Таблица 1. Суммы квадратов отклонений $\sum_k \Delta_k^2$ выбранных для аппроксимации функций

Логарифмические степенные функции (1)				
	$b = \text{const} = 1,5$		$b = b_i$	
i	I	III	I	III
$\sum_k \Delta_k^2$	43,06	26,67	16,61	12,13
Логарифмические показательные функции (2)				
	$a_2^i, c = 0$		$a_2^i, c = c_i$	
i	I	III	I	III
$\sum_k \Delta_k^2$	29,32	31,76	<u>14,69</u>	<u>7,41</u>
	$c = 0$			
i	I	III		
$\sum_k \Delta_k^2$	<u>11,39</u>	<u>3,27</u>		
Обратные логарифмические линейные функции (3)				
	$a = 0, b = 1, c = c_i, d = d_i$		$a = a_i, b = b_i, c = 1, d = d_i$	
i	I	III	I	III
$\sum_k \Delta_k^2$	17,29	20,65	16,62	11,34

Второе полученное решение, определяемое формулами (10)–(11), хотя и имеет несколько большую сумму квадратов отклонений, удовлетворяет физическому смыслу: время жизни звезд убывает с ростом их начальных масс. Общему виду этих формул

$$\lg \tau_{H_i} = f_i M^{g_i} + k_i \quad (14)$$

соответствует обратная функция

$$M = \left(\lg \tau_{H_i}^{1/f_i} - k_i/f_i \right)^{1/g_i}. \quad (15)$$

В соответствии со значениями свободных членов формул (10)–(11) и выражения (15) обратные функции (10)–(11) есть

$$M = \left(\lg \tau_{H_I}^{0,193} - 0,906 \right)^{-3,922}, \quad (16)$$

$$M = \left(\lg \tau_{H_{III}}^{0,236} - 1,293 \right)^{-3,279}. \quad (17)$$

4. ВЫВОДЫ

Исследовались три класса функций с двумя, тремя и четырьмя свободными параметрами для звездных населений I и III: логарифмические степенные, логарифмически-показательные и обратные логарифмически-линейные, общий вид которых отражают выражения (1)–(3). Минимальная сумма квадратов отклонения при сравнении моделируемых рядов времен жизни звезд с исследуемыми классами функций, служащих мерой достоверности искомых решений, оказалась для логарифмических показательных функций с тремя и четырьмя свободными членами.

Применимость полученных логарифмически-степенных функций (6)–(7) ограничена массами звезд, принадлежащих к населению I и III: $M_I = 78 M_\odot$ и $M_{III} = 168 M_\odot$ соответственно. Аналитического решения в получении обратных функций этих зависимостей получить не представляется возможным.

Для вычисленных функций с тремя свободными членами аналитически вычислена обратная функциональная зависимость в виде общего выражения (15). Это позволило связать логарифмически-степенные выражения (10)–(11) с их обратными функциями (16)–(17). Применимость полученных зависимостей распространяется на весь интервал звездных масс населений I и III.

1. Захожай В.А. Космические тела Галактики: классификация и эволюция // Вісник Астрономічної школи. — 2002. — Т. 3, № 2. — С. 81–99.
2. Захожай В.А. Время жизни звезд на главной последовательности и максимальная масса звезд диска Галактики // Кинем. и физ. неб. тел. — 2013. — Т. 29, № 4. — С. 61–72.
3. Масевич А.Г., Тутуков А.В. Эволюция звезд: теория и наблюдения. — М.: Наука, 1988. — 280 с.
4. Еволюція зір / В кн.: Астрономічний енциклопедичний словник / За заг. ред. І.А. Клімишина та А.О. Корсунь. — Львів, 2003. — С. 142.
5. Сурдин В.Г. Рождение звезд. — М.: УРСС, 2001. — 262 с.
6. Adams F.C., Laughlin Gr. A dying universe: the long-term fate and evolution of astrophysical objects // Rev. Mod. Phys. — 1997. — Vol. 69, No. 2. — P. 337–372.
7. Aoki W., Frebel A., Christlieb N., et al. HE 1327-2326, An unevolved star with $[\text{Fe}/\text{H}] < -5.0$. I. A comprehensive abundance analysis // Astron. J. — 2006. — Vol. 639. — P. 897–917.
8. Argast D., Samland M., Gerhard O.E., Thielemann F.-K. Metal-poor halo stars as tracers of ISM mixing processes during halo formation // Astron. Astrophys. — 2000. — Vol. 356. — P. 873–887.

9. *Basu S., Antia H.M.* Helioseismology and solar abundances // *Phys. Rep.* — 2008. — Vol.457, Iss. 5–6. — P.217–283.
10. *Bromm V., Larson R.B.* The first stars // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* — 2004. — Vol.42. — P.79–118.
11. *Caffau E., Bonifacio P., François P., Sbordone L., et al.* An extremely primitive star in the Galactic halo // *Nature.* — Vol. 477, No. 7362. — P.67–69.
12. *Figer D.F.* An upper limit to the masses of stars // *Nature.* — 2005. — Vol.434. — P.192–194.
13. *Marigo P., Chiosi C., Kudritzki R.-P.* Zero-metallicity stars. II. Evolution of very massive objects with mass loss // *Astron. Astrophys.* — 2003. — Vol. 399, Iss. 2. — P.617–630 (arXiv: astro-ph/0212057 v1 3Dec 2002).
14. *Marigo P., Girardi L., Chiosi C., Wood P.R.* Zero-metallicity stars. I. Evolution at constant mass // *Astron. Astrophys.* — 2001. — Vol. 371. — P. 152–173.
15. *Omukai K., Palla F.* Formation of the first stars by accretion // *Astrophys. J.* — 2003. — Vol. 589. — P.677–687.
16. *Portinari L., Chiosi C., Bressan A.* Galactic chemical enrichment with new metallicity dependent stellar yields // *Astron. Astrophys.* — 1998. — Vol. 334. — P.505–539.
17. *Raiteri C.M., Villata M., Navarro J.F.* Simulation of Galactic chemical evolution. I. O and Fe abundances in a simple collapse model // *Astron. Astrophys.* — 1996. — Vol. 315. — P.105–115.
18. *Schaerer D.* On the properties of massive Population III stars and metal-free stellar populations // *Astron. Astrophys.* — 2002. — Vol. 382, Iss. 1. — P.28–42 (arXiv: astro-ph/0110697 v2 10Dec 2001).
19. *Siess L., Livio M., Lattanzio J.* Structure, evolution, and nucleosynthesis of primordial stars // *Astrophys. J.* — 2002. — Vol. 570. — P.329–343.
20. *Takuma S., Masayuki A., Masahiro M.N., et al.* Is HE 0107-5240 A Primordial Star? The Characteristics of Extremely Metal-Poor Carbon-Rich Stars // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 611. — P.476–492.

Про час горіння гідрогену в надрах зір. Нові апроксимаційні формули

Захожай В.А., Забуга С.І.

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4

Залежність між тривалістю певних ядерних реакцій і початковою масою зорі є важливою складовою широкого кола астрофізичних задач. Зокрема, встановлення зв'язку між часом ядерного горіння гідрогену та початковою масою зорі визначає час перебування зір на головній послідовності. Були використані результати сучасних розрахунків моделей зір з сонячним (населення I) і нульовим (населення III) вмістами важких хімічних елементів, в яких містились дані щодо часу ядерного горіння гідрогену. Пошук залежностей проводився методом найменших квадратів з використанням стандартного пакету програми Microsoft Excel «Пошук розв'язку», з подальшим аналізом одержаних результатів. В роботі досліджувалися три види функціональних зв'язків: логарифмічно-степеневі функції, логарифмічно-показникові функції та обернені логарифмічно-лінійні функції. Встановлення зв'язків проводилося таким чином, щоб сума квадратів відхилень у апроксимованій функції була мінімальною. З урахуванням того, що максимальна маса зір з сонячним і нульовим вмістом металів обмежена значеннями 150 і 500–600 сонячних мас, відповідно, не всі одержані функціональні залежності задовольняють вимозі до необхідної залежності: зорі з більшими масами перебувають на головній послідовності менше часу. Виявилось, що деякі з отриманих залежностей мають мінімум на інтервалі досліджуваних мас, що не відповідає фізичному змісту. Мінімальним значенням суми квадратів відхилень відповідають логарифмічно-показникові функції з трьома та чотирма вільними членами. Всі отримані апроксимаційні формули, що описують залежність часу ядерного горіння гідрогену від маси зір нульового віку для інтервалів мас і елементного складу зір, є новими і раніше не пропонувалися для використання в таких класах задач.

Ключові слова: головна послідовність; статистичні закономірності; зоряні населення.

About time of hydrogen burning in stellar entrails. New formulas for approximation

Zakhzhay V.A., Zabuga S.I.

V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq. 4, 61022 Kharkiv, Ukraine

The relationship between the duration of nuclear reactions and initial mass of the star is an important component a wide variety of astrophysical problems. In particular, the links between combustion times of hydrogen burning determines and initial mass of the star the residence time on the main sequence stars. Results of calculations star modern models were utilized with the sun (population I) and zero (population III) content of heavy chemical elements, which contained data on nuclear hydrogen burning time. Search dependencies held by least squares using a standard package of Microsoft Excel “Search Solutions” program, with a further analysis of the results. We used three kinds of functional relationships: The logarithmic power functions, logarithmic and exponential functions inverse log-linear functions. Establishing communication wires so that the scrip squares deviation was minimal in the approximate function. Given the fact that the maximum star mass with the sun and zero metal content is limited to 150 solar masses and 500–600, respectively, not all the obtained functional dependencies required to satisfy the requirement of the relationship: Star with large masses are on the main sequence less time. It was found that some of the dependencies have received at least investigated mass range that does not meet the physical sense. The minimum value of the sum of squared deviations responds logarithmically exponential function with three or four free members. All the obtained approximation formulas that describe the dependence of the nuclear combustion conduit by weight of star age zero time interval for weight and elemental composition of stars, are new and have not previously been proposed for use in such classes of problems.

Keywords: main sequence; statistical laws; stellar population.

Надійшла до редакції / Received	22.10.2017
Виправлена авторами / Revised	19.12.2017
Прийнята до друку / Accepted	20.12.2017