



ISSN 2411–6602 (Online)

ISSN 1607–2855 (Print)

Том 12 • № 2 • 2016 С. 96 – 100

УДК 523.4 (045)

## Особливості визначення параметрів динамічних фігур і гравітаційних полів супутників планет

С.О. Ясєнев

Національний авіаційний університет, м. Київ

*На сьогоднішній день актуальною стає проблема визначення динамічних фігур супутників планет. Мета даної статті полягає у аналізі фізичних властивостей супутників, які ми відносимо до планетоїдів. Проводиться аналіз супутників планет як самогравітуючих утворень і визначаються параметри їх динамічних фігур.*

*ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ФИГУР И ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ, Ясєнев С.О. — На сегодняшний день актуальной становится проблема определения динамических фигур спутников планет. Цель данной статьи состоит в анализе физических свойств спутников, которые мы относим к планетоидам. Проводится анализ спутников планет как самогравитирующих образований и определяются параметры их динамических фигур.*

*FEATURES OF DETERMINING THE PARAMETERS OF DYNAMIC SHAPES AND GRAVITATIONAL FIELDS OF PLANETARY SATELLITES, by Yasenev S.O. — The problem of determining the dynamic shapes of planetary satellites becomes important today. The goal of this paper is to analyze the physical properties of satellites which are referred to planetoids. An analysis of planetary satellites as self-gravitating structures is performed, and parameters of their dynamic shapes are determined.*

**Ключевые слова:** спутники планет; фигура; гравитационное поле; форма; масса.

**Key words:** moons of the planets; figure; gravitational field; shape; mass.

### 1. ВСТУП

Науковий інтерес до будови надр і фігур небесних тіл, зокрема до великих супутників планет, збільшується з кожним днем. І цьому сприяє не тільки академічний інтерес, а й технічні досягнення, наземні і космічні спостереження. Це дає точні дані про фізичні і динамічні характеристики супутників, але, в свою чергу для, їх перевірки вимагає побудови математичних моделей, уточнень внутрішньої будови, орбітальної лібрації, рухів перицентра, фізичної лібрації. Пошук різних форм рішень при різних припущеннях про масу та її розподіл триває в небесній механіці постійно. Існують різні підходи, наприклад: вивчення фігур рівноваги за даними про гравітаційне поле, фігури рівноваги з внутрішніми течіями, фігури рівноваги з внутрішніми джерелами енергії (Чандрасекхар), фігури, які повільно обертаються за даними про розподіл мас (Ляпунов) та інші.

Вивчення внутрішньої будови, фігури, гравітаційного поля небесних тіл має практичне значення для небесної механіки та астрономічної геодезії, побудови аналітичних моделей внутрішньої будови супутників планет, оптимізації динаміки космічних апаратів, визначення локальних та глобальних гравітаційних аномалій.

Нас цікавить динамічна фігура супутників планет, які ми можемо назвати планетоїдами, тобто самогравітуючими утвореннями, які за рахунок власної маси, її розподілу, гравітаційній силі тримають свою форму і прагнуть наблизити її до рівноважної. Все це вимагає найґрунтовнішого вивчення їх небесно-механічних характеристик.

При визначенні потенціалу виникають дві основні задачі — пряма і обернена, як і в звичайній геодезичній практиці. При цьому аналітичний опис прямої задачі потенціалу є рішенням першої задачі, вирішення оберненої задачі полягає у встановленні поверхні небесного тіла, яка б могла виразити його потенціал і дозволяла б представити його простіше, ніж в ряд по сферичним функціям. Мета статті полягає у визначенні основних параметрів динамічних фігур супутників планет спрощеними методами.

Вже давно відомим є той факт, що відхилення зовнішнього гравітаційного поля від сферично-симетричного визначається за полярним стисненням  $f = (a - c)/c$ , де  $a$  — найбільша вісь,  $c$  — найменша. Це відхилення дає поняття про різницю моментів інерції відносно головних осей небесного тіла і про відхилення його внутрішньої будови від стану гідростатичної рівноваги. Відхилення стану небесних тіл від стану гідростатичної рівноваги показує, що на них діють сили гідростатичної напруги. Для уявних тіл,

які перебувають у стані гідростатичної рівноваги, вже знайдені рішення для математичного виведення внутрішнього і зовнішнього гравітаційного потенціалу [1].

Для тих же тіл, що не перебувають в стані гідростатичної рівноваги (зокрема, супутники планет), є потреба застосовувати більш складні алгоритми: розклад у ряд за сферичними функціями, розклад у ряд по гармонікам стисненого еліпсоїда обертання, рядами за функціями Ламе, потенціалом простого шару, використанням сталих центрів, поліномами Чебишова–Лагера, локальні апроксимації за методом скінчених елементів, різними комбінованими способами [2].

## 2. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Велика кількість супутників планет має значне стиснення внаслідок гравітаційної взаємодії з своїми планетами, тобто їх гравітаційний потенціал краще описати еліпсоїдом. Проте на сьогоднішній день існує ряд проблем створення та функціонування математичних моделей динамічних фігур і гравітаційних полів [3, 9].

При моделюванні гравітаційного поля застосовують різні методи, такі як: розклад у ряд Лапласа, розклад по функціям Ламе, метод точкових мас, застосовують еквігравітуючі фігури та інші методи [4–6].

Щодо теорії фігур, то в цьому напрямку найважливішими є методи, запропоновані П. Лапласом, Ж. Лагранжем, К. Маклореном, К. Якобі, П. Піцетті, А. Клеро, А. Лежандром, К. Гаусом, А. Ляпуновим, А. Пуанкаре, М. Субботінім, Д. Дарвіном, Д. Джінсом, Ж. Ліувіллем та ін. З цих питань також є праці таких вчених, як К. Холшевников, А. Орлов, В. Пантелеев, В. Антонов, О. Железняк, Б. Кондратьєв, Н. Грушинський, А. Коноплів, Ю. Баркін, О. Кусков, Н. Jeffreys, С. Murray, S. Dermott, J. Anderson, R. Jacobson та ін.

Під формою зазвичай розуміють одну з рівневих поверхонь сили тяжіння, а тіло, обмежене даною рівневою поверхнею сили тяжіння, називають планетоїдом. Проте всі супутники мають значний вплив від своїх планет, яким нехтувати не можна. Найбільш ефективні моделі розподілу густини: сферично-симетрична, еліпсоїдальна, моделі Лежандра–Лапласа, Дарвіна, Ендема, Роша.

## 3. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Нехай параметри супутників планет вище критичних, як для самогравітуючих утворень [7, 10] і так як супутники планет обертаються навколо своїх осей, то їх форма не буде точною сферою, а матиме деяке полярне стиснення, тобто екваторіальний радіус  $R_{\text{екв}}$  буде більше від полярного  $R_{\text{пол}}$ .

Вважаємо, що супутник являє собою несферичне тверде тіло, що рухається навколо планети. Планету уявляємо гравітуючою точкою. Форма супутника описується тривісним еліпсоїдом інерції з головними півосями  $a > b > c$  і головними центральними моментами інерції  $A < B < C$ . Обмеженнями величини густини при побудові моделей є: нижня межа  $\frac{\partial \rho}{\partial r} > 0$ , верхня межа  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} < 0$ , де  $\rho$  і  $r$  — густина і радіус супутника відповідно.

Важливою характеристикою побудови моделей внутрішньої будови небесних тіл є безрозмірний середній момент інерції  $\frac{I}{MR^2}$ , де  $I = \frac{A+B+C}{3}$ ;  $A, B, C$  — моменти інерції відносно головних осей інерції;  $M$  — маса самогравітуючого утворення,  $R$  — середній радіус. Поставлені умови для функцій розподілу густини виконуються, якщо  $\frac{I}{MR^2} \leq 0,4$ .

У стійкої фігури небесного тіла є властивість бути перпендикулярною до векторної суми гравітаційного і відцентрового прискорень. Відношення цих величин:  $\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{\omega^2 R^3}{mG}$ , де  $\omega$  — кутова швидкість обертання, і є основним параметром, від якого залежить фігура обертання супутника.

Ексцентриситет супутника є наближеним значенням відношення відцентрового і гравітаційного прискорень:  $R_{\text{екв}} - R_{\text{пол}} \approx \frac{\omega^2 R^3}{mG}$ .

Ми можемо спростити це, щоб не представляти розклад потенціалу в ряд за сферичними функціями. Для цього необхідно сумістити початок відліку з центром мас небесного тіла, а координатні вісі з головними осями інерції. Таким чином гармонічні коефіцієнти першого порядку і три з п'яти другого порядку прирівнюються до нуля:  $C_{10} = C_{11} = C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0$ .

Далі, у випадку, якщо б супутники планет були б сфероїдами, то можна застосувати коефіцієнти Стокса  $C_{00}, C_{20}, C_{22}$  і визначити з них головні моменти інерції. Так як:  $C_{00} = \frac{B+A-2C}{2}$  — полярний ексцентриситет,  $C_{22} = \frac{B-A}{4}$  — екваторіальний ексцентриситет,  $A, B, C$  — головні моменти інерції.

Інтерпретація головних моментів інерції і інтегрального безрозмірного моменту визначає сьогоднішні уявлення про внутрішню будову супутників планет. Також треба не забувати про можливість вивчення внутрішньої будови небесних тіл через особливості їх обертання. Зрозумілим є те, що у всіх супутників

планет існує розбіжність між центром мас і центром фігури. Таким чином, гравітаційні поля і фігури супутників планет визначаються розподілом густини всередині їх надр, кутовими швидкостями обертання і впливом їх планет.

Будемо вважати, що супутник планети синхронно обертається по коловій орбіті в екваторіальній площині планети; супутник з осями  $a$  (направлена на планету),  $b$  (в напрямку орбітального руху),  $c$  (між полюсами) — рис. 1.

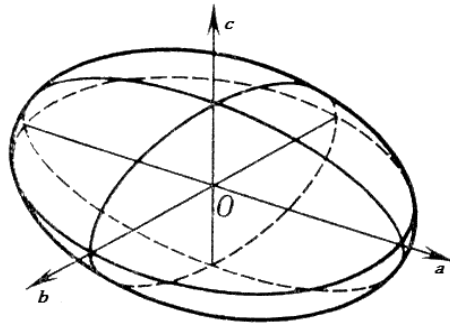


Рис. 1. Тривісний еліпсоїд супутника

Тоді ми можемо застосувати деякі наближені формули для визначення його динамічних характеристик [3].

Зональний гармонійний коефіцієнт:

$$J_2 = \frac{C - 0,5(A+B)}{ms_1^2} = \frac{5}{6}\alpha k_2, \quad (1)$$

де  $A, B, C$  — головні моменти інерції,  $\alpha$  — параметр фігури,  $k_2$  — припливне число Лява (визначає реакцію гравітаційного поля супутника на припливний потенціал планети),  $m$  — маса супутника,  $s_1$  — середній радіус супутника.

Безрозмірний коефіцієнт Стокса:

$$C_{22} = \frac{B-A}{4ms_1^2} = \frac{1}{4}\alpha k_2. \quad (2)$$

Співвідношення (1) і (2) — наближені, і чим меншими є  $\alpha$  і  $k_2$ , тим нижче їх точність (наприклад, їх не можна застосувати до Місяця), при цьому існує загальновідоме співвідношення для рівноважних небесних тіл:  $C_{22} \approx 0,3J_2$ .

У рівноважних тіл фігури співпадають із зовнішньою еквіпотенціальною поверхнею. Параметр фігури  $\alpha$  визначається наступним чином:

$$\alpha = \frac{M}{m} \left( \frac{s_1}{R} \right)^3 = \frac{\omega^2 s_1^3}{Gm} \quad (3)$$

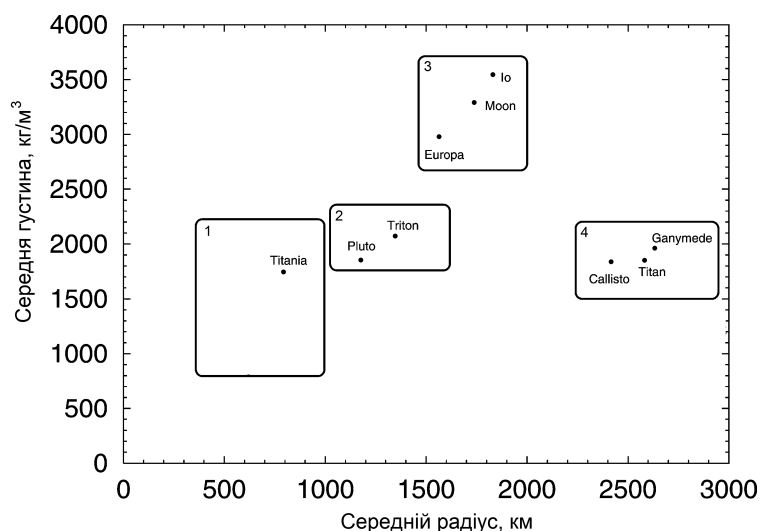
де  $M$  — маса планети,  $m$  — маса супутника,  $G$  — гравітаційна стала,  $\omega^2 = Gm/R$ ,  $R$  — радіус орбіти супутника,  $s_1$  — середній радіус супутника.

Форма еквіпотенціальної поверхні визначається числом Лява другого ступеня  $h_2$ , причому між числами Лява існує зв'язок. Число  $k_2$  характеризує зміну гравітаційного потенціалу супутника через припливну взаємодію з планетою, число  $h_2$  — визначає величину зміщення точки на поверхні супутника у вертикальному напрямі (за горизонтальний напрямок відповідає число Шида  $l_2$ ). Очевидно, що існує взаємозв'язок між параметрами фігури і гравітаційного поля: якщо відомі параметри поля, то по ним можна визначити параметри фігури і навпаки. Тоді рівноважну фігуру супутника можна представити по осям у наступному вигляді [4]:

$$\begin{cases} a = s_1 + \frac{7}{6}\alpha h_2 s_1, \\ b = s_1 - \frac{1}{3}\alpha h_2 s_1, \\ c = s_1 - \frac{5}{6}\alpha h_2 s_1. \end{cases} \quad (4)$$

Ці формули справедливі для моделей супутників планет з довільним розподілом густини. Якщо ми припустимо, що великі супутники планет є тілами рівноважної конфігурації і мають однорідний розподіл густини, то отримаємо числа Лява  $h_2 = 2,5$  і  $k_2 = 1,5$  [5]. Після підстановки отримуємо загальновідомі формули [6]:

$$\begin{cases} a = s_1 + \frac{35}{12}\alpha s_1, \\ b = s_1 - \frac{5}{6}\alpha s_1, \\ c = s_1 - \frac{25}{12}\alpha s_1. \end{cases} \quad (5)$$



**Рис. 2.** Зв'язок радіусу і густини для природних супутників планет Сонячної системи [20]. Зображено зони існування середніх льодяних (1), перехідних (2), кам'янистих (3), великих льодяних (4) супутників. Зв'язок “радіус–густина” є різним для цих груп супутників.

**Таблиця 1.** Параметри моделей супутників планет

Параметр	Супутник							
	Ганімед [13]	Титан [17]	Каллісто [14]	Іо [11]	Місяць [15]	Європа [12]	Тритон [20]	Титанія [20]
Радіус орбіти $a$ , $10^3$ км	1070,00	1221,90	1883,00	421,60	384,40	670,90	354,76	436,30
Радіус планети $R_p$ , $10^3$ км	69,911	58,232	69,911	69,911	6,371	69,911	24,622	25,362
Період $\tau$ , діб	7,155	15,950	16,689	1,769	27,320	3,551	5,880	8,710
$s_1$ , км	2634,10	2576,00	2410,30	1821,60	1737,10	1565,007	1354,00	788,50
$m_0$ , $10^{20}$ кг	1481,7	1345,2	1075,9	893,2	734,63	480,00	214,00	35,27
$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	1,9360	1,8798	1,8344	3,5278	3,347	2,989	2,061	1,711
$g_0$ , см/с <sup>2</sup>	142,0	135,2	123,0	179,0	162,0	131,0	77,9	38,0
$\alpha$ , $10^{-5}$	19,20	3,95	3,71	172,00	0,754	50,191	26,611	14,528
$v_{2K}$ , км/с	2,74	2,64	2,43	2,55	2,38	2,02	1,46	0,77
$k_2$	0,804	0,953	1,103	1,304	0,0248	1,048	1,373	1,315
$I$	0,3105	0,3414	0,3549	0,3782	0,3929	0,3460	0,3860	0,3794
$J_2$ , $10^{-6}$	126,90	33,46	32,70	1845,90	203,26	435,50	438,30	179,62
$C_{22}$ , $10^{-6}$	38,18	10,02	10,20	553,70	22,36	131,50	129,40	53,80
$J_2/C_{22}$	3,324	3,339	3,206	3,334	9,090	3,312	3,387	3,339

Середній безрозмірний момент інерції можемо визначити за формулою Радо–Дарвіна [5]:

$$I = \frac{C}{ms_1^2} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{4 - k_2}{1 + k_2}} \right). \quad (6)$$

Як бачимо, для рівноважної конфігурації, яка має однорідний розподіл густини, маємо середній безрозмірний момент інерції, рівний 0,4. Проте зрозуміло, що справжні супутники не є однорідними тілами, а мають диференціацію густини від поверхні до центру, тобто середній безрозмірний момент інерції буде меншим, ніж 0,4 і число Лява  $k_2$  меншим, ніж 1,5. Тому формула Радо–Дарвіна — це наближене співвідношення, і чим більшою є гравітаційна диференціація, тим нижче її точність. Більше того, через складність проблеми і неможливість проведення геофізичних вимірів у моделюванні фігур і гравітаційних полів супутників планет поки що є багато чого гіпотетичного [3].

Далі ми розглянемо вісім найбільших супутників планет у Сонячній системі. У роботі [20] був проведений аналіз супутників планет у Сонячній системі на предмет зв'язку розміру, густини і матеріалів з яких складаються супутники (рис. 2).

Параметри (табл. 1) для цих восьми найбільших самогравітуючих супутників планет були розраховані у роботах [11–20].

#### 4. ВИСНОВКИ

1. Представлено основні параметри динамічних фігур найбільших 8 супутників планет. Завдяки гравітаційній взаємодії планети із супутником виникають приливні сили, які спотворюють рівноважну динамічну фігуру супутника і сприяють виникненню форми супутника у вигляді тривісного еліпсоїда.

2. Інтегральні безрозмірні моменти інерцій супутників планет мають зв'язок з числом Лява  $k_2$ , яке характеризує зміну гравітаційного потенціалу супутника через припливну взаємодію з планетою, тобто планета впливає на гравітаційну диференціацію супутника.

3. Відношення  $J_2/C_{22}$  для Місяця показує значне відхилення від  $10/3$ , як наслідок, момент інерції не може бути визначений безпосередньо зі співвідношення Радо–Дарвіна. Застосування формули Радо при малих числах Лява дає некоректний результат.

4. Гравітаційні поля і фігури супутників планет визначаються розподілом густини в їх тілах, кутовими швидкостями обертання і взаємодією з планетою.

1. Завизион О.В. Сравнение методов описания внешних гравитационных потенциалов небесных тел // Радиофизика и радиоастрономия. — 2001. — **6**, №2. — С.101–104.
2. Мещеряков Г.А., Церклевич А.Л. Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Марса. — К.: Наукова думка, 1987. — 240 с.
3. Жарков В.Н. Геофизические исследования планет и спутников // Первые чтения им. О.Ю.Шмидта. — М.: ОИФЗ РАН, 2003. — 102 с.
4. Zharkov V.N., Leontjev V.V., Kozenko A.V. Models, figure, and gravitational moments of the Galilean satellites of Jupiter and icy satellites of Saturn // Icarus. — 1985. — **61**. — P.92–100.
5. Jeffreys H. The Earth. — London: Cambridge Univ. Press, 1962. — 420 p.
6. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. — М: Наука, 1976. — 512 с.
7. Куликов К.А., Сидоренко Н.С. Планета Земля. — М: Наука, 1977. — 191 с.
8. Естественные спутники планет (информационный справочник) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/rw/natsat>
9. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. — М: Физматлит, 2010. — 588 с.
10. Бялко А.В. Наша планета — Земля. — М: Наука, 1989. — 240 с.
11. Anderson J.D., Jacobson R.A., Lau E.L., et al. Io's gravity field and interior structure // Journal Geophys. Res. 2001. — **106**. — P.963–969.
12. Anderson J.D., Schubert G., Jacobson R.A., et al. Europa's differentiated internal structure: Inferences from four Galileo encounters // Science. — 1998. — **281**. — P.2019–2022.
13. Anderson J.D., Lau E.L., Sjogren W.L., et al. Gravitational constraints on the internal structure of Ganymede // Nature. — 1996. — **384**. — P.541–543.
14. Anderson J.D., Jacobson R.A., McElrath T.P., et al. Shape, mean radius, gravity field, and interior structure of Callisto // Icarus. — 2001. — **153**. — P.157–161.
15. Kuskov O.L., Kronrod V.A. Core sizes and internal structure of Earth's and Jupiter's satellites // Icarus. — 2001. — **151**. — P.204–227.
16. Sohl F., Spohn T., Breuer D., et al. Implications from Galileo observations on the interior structure and chemistry of the Galilean satellites // Icarus. — 2002. — **157**. — P.104–119.
17. Bruce G., Francis N. Rotational dynamics and internal structure of Titan // Icarus. — 2011. — **214**. — P.351–355.
18. Williams J.G., Konopliv A.S., Boggs D.H., et al. Lunar interior properties from the GRAIL mission // Journal of Geophysical Research: Planets. — 2014. — **119**. — P.1546–1578.
19. Barkin Yu.V. Comparative rotational dynamics of the Moon, Mercury and Titan // Astronomical and Astrophysical Transactions. — 2004. — **23**, №5. — P.481–492.
20. Hussmann H., Sohl F., Spohn T. Subsurface oceans and deep interiors of medium-sized outer planet satellites and large trans-Neptunian objects // Icarus. — 2006. — **185**. — P.258–273.

Надійшла до редакції 3.09.2016  
Прийнята до друку 14.09.2016