Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)
Том 12 • № 2 • 2016 С. 185 – 189

УДК 528.48

Моделі визначення деформацій

В.М. Гладілін

Національний авіаційний університет, м. Київ

В останні роки розроблено багато функцій для одержання значень деформацій, які в більшості своїй виникають за рахунок осідань споруд і промислового обладнання. Деякі автори вказують на такі розширені математичні функції, які апроксимують деформації, як на загальні методи визначення деформацій. У статті розглянуті моделі деформацій як фізичні процеси. При порівнянні статичної, кінематичної та динамічної моделей було встановлено, що динамічна модель найбільш достовірно і повно відображає деформації споруд і промислового обладнання.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ, Гладилин В.Н. — В последние годы разработано много функций для получения значений деформаций, которые в большинстве своем возникают в результате осадок сооружений и промышленного оборудования. Некоторые авторы указывают на такие расширенные математические функции, которые аппроксимируют деформации, как на общие методы определения деформаций. В статье рассмотрены модели деформаций как физические процессы. При сравнении статической, кинематической и динамической моделей было установлено, что динамическая модель наиболее достоверно и полно отображает деформации сооружений и промышленного оборудования.

MODELS OF DETERMINING DEFORMATIONS, by Gladilin V.N. — In recent years, a lot of functions designed to determine deformation values that occur mostly as a result of settlement of structures and industrial equipment. Some authors suggest such advanced mathematical functions approximating deformations as general methods for the determination of deformations. The article describes models of deformations as physical processes. When comparing static, cinematic and dynamic models, it was found that the dynamic model reflects the deformation of structures and industrial equipment most reliably.

Ключевые слова: деформации; статическая; кинематическая и динамическая модели.

Key words: deformations; static; cinematic and dynamic models.

1. ВСТУП

Статична модель визначення деформацій [9] — це перевірка геодезичними вимірюваннями визначених точок на об'єкті дослідження на конгруентність (співпадіння). У таких моделях виключені деформації, які надходять іззовні, і встановлена рівновага об'єкта спостереження під дією сил, прикладених до нього.

У кінематичних моделях деформації описуються загальними формулами рівномірного руху точок об'єкта без урахування сил, що діють на нього, параметри яких на початку не відомі.

У динамічних моделях встановлюються зв'язки між рухами і причинами, які їх викликають [10] і дають можливість задавати однозначні математичні відношення між геометричними змінами точок об'єкта, які визначаються геодезичними вимірюваннями та діючими на нього зовнішніми силами; такі окремі моделі описані в роботах [1–8].

2. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Якщо $S(\vec{\mathbf{X}})$ — деформації, які залежать від будь-яких параметрів $\vec{\mathbf{X}}$, то у статичних моделях [9] вони дорівнюють нулю. У кінематичних моделях деформації визначають форму тільки відносно відомих параметрів. У динамічних моделях [10] деформації визначаються як у відповідності з формою, так і у відповідності з параметрами.

Деформації $S(\vec{\mathbf{X}})$ — це неперервні, розподілені на об'єкті геометричні зміни у часі, які є функцією дії параметрів $\vec{\mathbf{X}}$ на об'єкт.

Якщо дискретизувати розглядуваний об'єкт на окремі точки, ми одержимо його фізичні (проектні) координати $\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{p.t}}$ на момент часу t, які визначаються

$$\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{p.t}} = \vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{t}} + S(\vec{\mathbf{X}})_{\mathrm{t}}, \tag{1}$$

при цьому вектор $\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{t}}$ може відповідати будь-якій вихідній ситуації на час t.

Незалежно від цього сукупність координат точок (1) можна визначати будь-яким геодезичним методом після вирівнювання спеціальної геодезичної мережі $\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{g.t}}$, при цьому за допомогою наближених

Гладілін Валерій Миколайович; valeriy.gladilin.55@mail.ru

(виміряних) координат точок $\vec{\mathbf{X}}_{\zeta.\mathrm{t}}$ необхідно перейти до відповідних геодезичних (вирівняних) координат $\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{g.t}}$

$$\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{x.g.t}} = \vec{\mathbf{X}}_{\zeta.\mathrm{t}} + A_{\zeta.\mathrm{t}}\vec{\mathbf{X}}_{\zeta.\mathrm{t}}, \tag{2}$$

де $A_{\zeta.\mathrm{t}}$ — оператор перетворення виміряних значень координат $\vec{\mathbf{X}}_{\zeta.\mathrm{t}}$ на фіксовані моменти часу t.

Рух точок об'єкта характеризується [9]: траєкторією, довжиною шляху, швидкістю, прискоренням і зміщенням. Рух точки може бути рівномірним і нерівномірним.

Траєкторія — просторова лінія, яка описується точкою при її русі. Траєкторія руху у просторі є прямолінійна або криволінійна.

Довжина шляху (скаляр) — довжина відрізку траєкторії, який пройшла точка за визначений проміжок часу t. Швидкість та прискорення деформації (руху точки об'єкта) у різні моменти часу можуть бути різними — як додатними, так і від'ємними.

Зміщення — вектор, який з'єднує початкове положення рухомої точки і її положення за розглянутий проміжок часу з напрямком до її кінцевого положення.

В ідеалі визначені геодезичними методами координати n точок об'єкта повинні дорівнювати проектним координатам, тому можна записати тотожність

$$\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{p.t}} \equiv \vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{g.t}}, \qquad p, g, t = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

на основі якої одержимо нелінійну функціональну модель, вважаючи що рівняння (1) і (2) тотожні

$$\Psi(\vec{\mathbf{X}}) = \vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{x.t}} + S(\vec{\mathbf{X}})_{\mathrm{t}} - \vec{\mathbf{X}}_{\zeta.\mathrm{t}} - A_{\zeta.\mathrm{t}}\vec{\mathbf{X}}_{\zeta.\mathrm{t}} = 0, \qquad t = 1, ..., n. \tag{4}$$

Ця система рівнянь відповідає моделі Гауса–Гельмерта, або відповідає системі рівнянь, сформованих на основі відповідних результатів оцінки, які є умовними рівняннями з невідомими координатами $\vec{\mathbf{x}}$ точок об'єкта

$$B\vec{\mathbf{v}} + A\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{w}} = 0, \qquad \Sigma_l^2 = \sigma_0^2 Q_k, \qquad l = 1, 2, ..., n, \tag{5}$$

де $\vec{\mathbf{v}}$ — вектор опору матеріалу об'єкту, $\vec{\mathbf{w}}$ — вектор вільних членів, σ_0 — стандартне відхилення вимірювання, Σ — загальне відхилення виміряних значень координат x точок об'єкта, Q_l — коваріаційна матриця виміряних значень

При цьому вектор вимірювань, або відповідний йому вектор невідомих будується таким чином:

$$\vec{\mathbf{X}}^T = \left|\vec{\mathbf{X}}_x^T \vec{\mathbf{X}}_\zeta^T\right| = \left|\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{x.1}}^T, ..., \vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{x.n}}^T \quad \vec{\mathbf{X}}_{\zeta.1}^T, ..., \vec{\mathbf{X}}_{\zeta.\mathrm{n}}^T\right| \tag{6}$$

Коефіцієнти рівняння (6) у матричному представлені мають вигляд

$$B = \| -IB_{\mathrm{a}} \|, \qquad A = \| -IA_\zeta \|, \tag{7}$$

де I — одинична матриця.

Вектор опору описується

$$\vec{\mathbf{v}} = \Psi(\vec{\mathbf{X}}^0) + B\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{X}}^0 + S(\vec{\mathbf{X}}^0) - \vec{\mathbf{X}}_\xi^0 - A_\zeta \vec{\mathbf{X}}_\zeta^0 - (\vec{\mathbf{X}}_\xi - \vec{\mathbf{X}}_\xi^0) + (\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{a}} - \vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{a}}^0). \tag{8}$$

Одержана для рівняння (5) стохастична модель дійсна з урахуванням (6), загальну дисперсію виміряних значень координат знайдемо за формулою

$$\Sigma_l^2 = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} Q_{x.\xi} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & Q_{x.a} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Підставимо (7) і (8) у (5), одержимо

$$\vec{\mathbf{v}}_\xi = B_{\mathrm{a}}\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{a}} + A_\zeta \vec{\mathbf{x}} - A_\zeta \vec{\mathbf{x}}_\zeta + \vec{\mathbf{w}}, \qquad \Sigma_l^2 = \sigma_0^2 Q_l, \qquad l = 1, 2, ..., n. \tag{10}$$

Незалежно від цього у розумінні діючих параметрів на об'єкт можна виходити з такої основної залежності

$$\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{a}} = \vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{a}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{a}} = \vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{a}}^0 + \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{a}}. \tag{11}$$

Із (11) і (10) одержимо для власного рішення

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{y}.\zeta} = A_{\mathrm{y}.\zeta}\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}.\zeta} - \vec{\mathbf{w}}_{\mathrm{y}.\zeta}. \tag{12}$$

Для того, щоб модель була достовірна для власного випадку, з урахуванням (8), необхідно, щоб загальна дисперсія була

$$\Sigma_{l.\mathrm{y}.\zeta}^2 = \sigma_0^2 Q_{l.\mathrm{y}.\zeta} = \sigma_0^2 Q_l, \qquad l = 1, 2, ..., n. \tag{13}$$

Таким чином, система рівнянь (12) буде задаватись іншими параметрами, тобто невідомі параметри даних входять один раз безпосередньо і один раз опосередковано через $\vec{\mathbf{x}}_\zeta$ у векторі рішень $\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{y}.\zeta}$. Між знайденим власним рішенням $\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}$ і деяким рішенням $\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{x.a}}$ є така залежність:

$$\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}} - \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{x.a}} = A_\zeta(\vec{\mathbf{x}}_\zeta - \vec{\mathbf{x}}_{\zeta.\mathrm{a}}). \tag{14}$$

Застосуємо до вектора рішень мінімальну Евклідову норму

$$\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}^T \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}} \to \min, \tag{15}$$

одержимо такі умовні рівняння:

$$A_{\zeta}\vec{\mathbf{x}}_{\text{x}} = 0. \tag{16}$$

З системи рівнянь (12) з невідомими параметрами даних, з урахуванням (16) одержимо

$$\vec{\mathbf{x}}_{\zeta} = -\left(A_{\zeta}^{T}A_{\zeta}\right)^{-1}A_{\zeta}^{T}\left\{\vec{\mathbf{v}}_{\xi} - B_{\text{a}}\vec{\mathbf{x}}_{\text{a}} - \left[\vec{\mathbf{w}} - B_{\text{a}}(\vec{\mathbf{X}}_{\text{a}} - \vec{\mathbf{X}}_{\text{a}}^{0})\right]\right\}. \tag{17}$$

Підставимо вираз (17) у вихідне рівняння (12), одержимо

$$F = I - A_{\zeta}^{T}\left(A_{\zeta}^{T}A_{\zeta}\right)^{-1}A_{\zeta}^{T}, \tag{18}$$

де F — симетрична ідемпотентна матриця.

З урахуванням (18) і (16) вираз (12) набуде вигляду

$$\vec{\mathbf{v}}_{\xi} = \vec{\mathbf{x}}_{\text{x}} + FB_{\text{a}}\vec{\mathbf{x}}_{\text{a}} - \left\{-F\left[\vec{\mathbf{w}} - B_{\text{a}}(\vec{\mathbf{X}}_{\text{a}} - \vec{\mathbf{X}}_{\text{a}}^{0})\right]\right\}. \tag{19}$$

За допомогою виразу (12) для власного рішення $\vec{\mathbf{v}}_{\text{y}}$ отримаємо таку скорочену модель:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{y}} = A_{\text{y}}\vec{\mathbf{x}}_{\text{y}} - \vec{\mathbf{w}}_{\text{y}}. \tag{20}$$

Дисперсія для відповідної стохастичної моделі з урахуванням (10) і (15) набуде вигляду

$$\Sigma_{l.\text{y}}^{2} = \sigma_{0}^{2}\begin{vmatrix} FQ_{\text{x}.\xi}F^{T} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & FQ_{\text{x.a}}F^{T} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Коефіцієнти рівнянь геодезичної мережі можна представити у спектральному вигляді; вважаючи, що $FQ_{\text{x}.\xi} \equiv Q_{\text{x}.\xi}$ отримаємо стохастичну модель

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{y}} = A_{\text{y}}\vec{\mathbf{x}}_{\text{y}} - \vec{\mathbf{w}}_{\text{y}}, \qquad \Sigma_{l.\text{y}}^{2} = \sigma_{0}^{2}Q_{l.\text{y}}, \qquad l = 1, 2, ..., n. \tag{22}$$

У відповідності до розміру матриці коефіцієнтів A_{y} встановимо, що система рівнянь (22) збігається без введення остаточного вектора $\vec{\mathbf{v}}_{\text{y}}$, звідки можна зробити висновок про те, що зникає відповідна сума квадратів $\Sigma_{l.\text{y}}^{2}$ та надлишковість r

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{y}}^{T}Q_{l.\text{y}}\vec{\mathbf{v}}_{\text{y}} = 0, \qquad \vec{\mathbf{r}}_{\text{y}} = \vec{\mathbf{r}}(Q_{l.\text{y}}) - \vec{\mathbf{r}}(Q_{\text{x.y}}) = 0. \tag{23}$$

Таким чином, вираз (22) можна розглянути як незалежну модель рівнянь, яка є розв'язком задачі, описаної виразами (1), (2), (3).

В цій моделі, спираючись на те, що для кожного вводиться особливий вектор координат $\vec{\mathbf{X}}_{\text{x.e}}$ для опису прийнятої вихідної ситуації $\vec{\mathbf{X}}_{\text{x.t}}$, проте, якщо функція деформації $S(\vec{\mathbf{X}}_{\text{a}})$ вказує на відсутність деформації, ці вектори $\vec{\mathbf{X}}_{\text{x.e}}$ та $\vec{\mathbf{X}}_{\text{x.t}}$ повинні співпадати для всіх періодів часу, відповідно модель рівняння (22) з урахуванням, що $FQ_{\text{x}.\xi} \equiv Q_{\text{x}.\xi}$ буде

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{y.0}} = A_{\text{y.0}}\vec{\mathbf{x}}_{\text{y.0}} - \vec{\mathbf{w}}_{\text{y}}, \qquad \Sigma_{l.\text{y}} = \sigma_{0}^{2}Q_{l.\text{y}}, \qquad l = 1, 2, ..., n. \tag{24}$$

Вважаючи, що міжперіодична кореляція дорівнює нулю, то коваріаційна матриця $Q_{\text{x}} = 0$, отримаємо відповідну систему нормальних рівнянь, яка з урахуванням $FQ_{\text{x}.\xi} \equiv Q_{\text{x}.\xi}$, буде мати вигляд

$$B_{\text{a}}\vec{\mathbf{v}}_{\text{a}} + A_{\zeta}\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{w}} = 0. \tag{25}$$

Визначимо у функціональній моделі (24) вектори рішень, одержимо

$$\vec{\mathbf{x}}_{\text{y.0}} = N_{\text{y.0}}\vec{\mathbf{W}}_{\text{y.0}}, \tag{26}$$

і визначимо остаточний вектор $\vec{\mathbf{v}}_{\text{y.0}}$, тут N — коефіцієнти нормальних рівнянь, $\vec{\mathbf{W}}$ — перетворені вільні члени нормальних рівнянь.

Результуючі і оптимізуючи $\Sigma_{l.\text{y}}^{2}$ сумму квадратів відхилень та надлишковість $\vec{\mathbf{r}}_{\text{y}}$ рівнянь системи (24), отримаємо, як у (23),

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{y.0}}^{T}Q_{l.\text{y}}\vec{\mathbf{v}}_{\text{y.0}} = 0, \qquad \vec{\mathbf{r}}_{\text{y.0}} = \vec{\mathbf{r}}(Q_{l.\text{y}}) - \vec{\mathbf{r}}(Q_{\text{x.y.0}}). \tag{27}$$

Проаналізувавши ідентичність рівняння (25), локалізуємо власні зміщення точок, які не повинні бути виключені, при цьому зміщення можуть відбуватись незалежно від деформацій об'єкту.

Статична модель деформації. Статична модель [9] — модель рівноваги тіл. Такою моделлю описуємо такі об'єкти, які не змінюють геометричну форму за розглянутий період часу. В цьому відношенні краще звернутися до цих утворень, ніж до тотожності (3) і відповідно до моделі співвідношення, якщо застосовувати ці процеси виключно для аналізу тотожності. Необхідно дати відповідь на питання, чи мають вибрані точки обладнання особисті рухи (зміщення), тобто в якій мірі співпадають однойменні точки. Статична модель передбачає недопустимість ніяких деформацій $S(\vec{\mathbf{X}}_{\text{a}})$, разом з тим виключаємо коефіцієнти B і коефіцієнти відповідних параметрів впливу Q_{x}, тобто

$$B_{a,e} = 0, \qquad Q_{x,a} = 0, \qquad \forall e = 1, ..., n. \tag{28}$$

У подальшому необхідно знов враховувати те, що псевдозворотня симетрична коваріаційна матриця, яка ідентична сама до себе, буде

$$Q_{x,\alpha}^{+} = Q_{x,\alpha}, \qquad \forall Q_{x,\alpha} = Q_{x,\alpha}^{T} = Q_{x,\alpha}^{2}. \tag{29}$$

Разом з тим параметри із (25) і (26) входять в систему нормальних рівнянь

$$N^s_{\text{y.0}}\vec{\mathbf{x}}^s_{\text{y.0}}-\vec{\mathbf{W}}^s_{\text{y.0}}=0. \qquad (30)$$

Звичайна статична модель деформації є такою при врахуванні вищеописаних особливих рішень, тобто при виключених коефіцієнтах (28) із загального рішення. Перевага цього процесу є у відносно простій структурі, і відповідно до цього можуть використовуватись спеціальні геодезичні вимірювання (мережі), однак природній недолік фактично обґрунтовує, що деформації не можуть точно враховуватись. При геодезичному визначенні багатьох точок на об'єкті цей процес є оптимальним.

Кінематична модель деформації. Кінематика [9] є теорія руху тіл без врахування сили, яка впливає на рух тіл. Такою моделлю описуємо об'єкти, про які знаємо, що вони деформуються. Відомо те, що деформації є визначеними функціями місця (об'єкту), сил, часу та інших специфічних параметрів, які впливають на деформаційні процеси. Виходячи з цього, деформація не буде визначеною для об'єкту тільки однією неперервною функцією. Відомо, що визначений зв'язок між причиною і дією деформації не однозначний.

За останні роки розроблено багато подібних зв'язків (функцій), велика кількість ідей при виборі самих різноманітних математичних функцій доволі нескінченних, автори яких часто вказують на розширені функції як на загальні методи визначення деформацій, хоча вони представляють собою лише окремі випадки моделювання деформаційних процесів [5–8]. Всі кінематичні моделі мають недолік в тому, що вони представляють однозначний математичний зв'язок між фізичною причиною деформації і геометричною дією на об'єкт.

Визначення кінематичних моделей, таким чином, відбувається внаслідок того, що функція деформації $S(\vec{\mathbf{X}}_{\text{a}})$ представлена в загальній формі. Визначаючі параметри впливу цих зв'язків залишаються знову ж таки невідомими. Коефіцієнти матриці B можливо визначити, а коефіцієнти матриці відповідних параметрів впливу Q_x точно так, як у статичних моделях, вилучаються у відповідності із (28).

$$B_{a,e}=B_{a,e}, \qquad Q_{x,a}=0, \qquad \forall e=1,\dots,n. \qquad (31)$$

При урахуванні (28) одержимо із (25) аналогічну систему нормальних рівнянь (30)

$$N^k_{\text{y.0}}\vec{\mathbf{x}}^k_{\text{y.0}}-\vec{\mathbf{W}}^k_{\text{y.0}}=0. \qquad (32)$$

Кінематична модель є частковим випадком при урахуванні (28) загального рішення. Перевагою цієї моделі є те, що деформації об'єкта можуть враховуватись. Незручність полягає в тому, що параметри впливу Q можна оцінити як різницю вимірювань в різні часи. Вони безпосередні при визначені коефіцієнтів матриці B і залежать від точності вимірювань. Зовнішніх відомостей для визначення величин Q не має в розпорядженні.

Динамічна модель деформації [5, 8–10]. За допомогою такої моделі можливо описувати об'єкти, для яких відомі їх зміни форми, розмірів та/або об'єму. Для того, щоб задати цю модель, необхідно знати матеріал об'єкту та його властивості, зовнішні сили, які діють на об'єкт. Визначення деформації об'єкта виконується за допомогою сили зміщення

$$K\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{f}}=0; \qquad (33)$$

величина K є глобальною матрицею жорсткості, а вектор $\vec{\mathbf{a}}$ відображає зміщення точки, вектор $\vec{\mathbf{f}}$ відображає сили, які спричиняють ці зміщення. Якщо відомі коефіцієнти матриці жорсткості, які залежать від властивостей матеріалу об'єкту та вектор навантажень, то можливо розрахувати вектор зміщення точки $\vec{\mathbf{a}}$. Деформація $S(\vec{\mathbf{X}}_{\text{a}})$ визначається інтерполяцією. Якщо вираз (33) визначається лінійними функціями, то оцінка виразу (33) буде простою (лінійною). Якщо навантаження об'єкта перевищує деякі межі то матеріал починає реагувати пластично або в'язко-пластично. Динамічна модель передбачає те, що функція деформації цілком задана, при цьому відомі коефіцієнти матриці $B_{x,a}$, а також матриця коефіцієнтів $Q_{x,a}$.

$$B_{a,e}=B_{a,e}, \qquad Q_{x,a}=Q_{x,a}, \qquad \forall e=1,\dots,n. \qquad (34)$$

Відповідна система нормальних рівнянь, яка витікає з (25),

$$N^d_{\text{y.0}}\vec{\mathbf{x}}^d_{\text{y.0}}-\vec{\mathbf{W}}^d_{\text{y.0}}=0. \qquad (35)$$

буде така ж, як (30) і (32).

3. ВИСНОВОК

Порівнявши вирази (33) та (25), бачимо, що динамічна модель деформації співпадає з узагальненою (динамічною) моделлю деформації, отже, від неї можна очікувати найкращих результатів.

Порівнюючи відповідні матриці нормальних рівнянь (статичної, кінематичної та динамічної моделей), з'ясуємо, що визначення функції деформації краще виходить за допомогою динамічної моделі, ще однією перевагою є інтерполяційний підхід. Вираз (33) являє собою складову частину загальної моделі, дає можливість розрахувати сили, які викликають зміну форми, об'єму та розмірів об'єкту. Динамічні моделі дозволяють розрахувати стаціонарні та нестаціонарні режими деформаційних процесів, які характеризуються множиною змінних стану системи, які в свою чергу змінюються з часом, або в залежності від іншої незалежної змінної.

1. *Гладілін В.М.* Деформації технологічного обладнання // Інженерна геодезія. — 1999. — Вип. 41. — С.31–38.
2. *Гладілін В.М.* Вимірювання деформацій радіохвильовими методами // Інженерна геодезія. — 2000. — Вип. 43. — С. 72–75.
3. *Гладілін В.М., Ремішевський О.Л.* Швидкість та прискорення деформаційного процесу // Інженерна геодезія. — 2001. — Вип. 45. — С.56–59.
4. *Гладілін В.М., Біляга О.В.* Визначення деформацій технологічного обладнання при періодичному навантаженні у часі // Інженерна геодезія. — 2002. — Вип. 46. — С.68–74.
5. *Гладілін В.М., Чуланов П.О.* Дослідження моделі деформаційного процесу технологічного обладнання // Інженерна геодезія. — 2002. — Вип. 48. — С.70–77.
6. *Гладілін В.М.* Побудова системи автоматизованого визначення деформацій технологічного обладнання // Інженерна геодезія. — 2004. — Вип. 50. — С.34–37.
7. *Гладілін В.М., Чуланов П.О.* Застосування теорії графів для дослідження деформацій промислового обладнання // Інженерна геодезія. — 2005. — Вип. 51. — С.77–82.
8. *Гладілін В.М., Чуланов П.О., Шудра Н.С.* Визначення моделі зміщення точок технологічного обладнання при деформаційних процесах // Інженерна геодезія. — 2015. — Вип. 62. — С.44–55.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учебн. пособ. Для вузов. В 10 т. Т.1. Механика. 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 224 с.
10. *Скурихин В.И., Шифрин В.Б., Дубровский В.В.* Математическое моделирование. — К.: Техніка, 1983. — 270 с.

Надійшла до редакції 28.09.2016
Прийнята до друку 17.12.2016