Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)
Том 11 • № 2 • 2015 С. 163 – 167

УДК 517.521.7+517.588+621.391

Узагальнені тригонометричні функції та їх застосування

В.П. Денисюк

Національний авіаційний університет, Київ

Розроблено основи теорії узагальнених тригонометричних функцій. Наводиться приклад використання цієї теорії, який ілюструє ефект розгортання частот, протилежний відомому ефекту накладання частот.

ОБОБЩЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ, Денисюк В.П. — Разработаны основы теории обобщенных тригонометрических функций. Приводится пример применения этой теорії, который приводит к эффекту разворачивания частот, обратный известному эффекту наложения частот.

GENERALIZED TRIGONOMETRIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS, by Denysyuk V.P. — The basics of generalized trigonometric functions theory are developed. We give an example of this theory application illustrating the effect of frequencies deployment which is inverse to the well-known effect of overlaying frequencies.

Ключевые слова: расходящиеся ряды; расходящиеся тригонометрические ряды; обобщенные функции; эффект наложения частот.

Key words: divergent series; divergent trigonometric series; generalized functions; overlaying frequencies effect.

1. ВСТУП

При обробці цифрових сигналів в галузях космічного радіозв'язку, телеметрії, радіолокаційних досліджень, радіоастрономії, обробці зображень тощо широке застосування знаходять методи спектральних досліджень, що базуються на дискретних перетвореннях Фур'є. Серед похибок, що виникають при використанні цих перетворень, найбільш дошкульною є добре відома похибка, що носить назву ефекту накладання частот. Одним з підходів до зменшення шкідливого впливу цього ефекту на результати досліджень є підхід, при якому ефект накладання частот розглядається з точки зору теорії узагальнених тригонометричних функцій; такий підхід і розглядається в даній роботі.

Узагальнені тригонометричні функції подаються розбіжними тригонометричними рядами. Як відомо [1], розбіжні ряди не мають суми у звичайному розумінні. Одним з підходів до побудови їх сум є підхід, при якому дають нове визначення суми ряду, застосовне як для всіх збіжних рядів, так і для деяких розбіжних рядів; при цьому від визначення слід вимагати, щоб для збіжних рядів нова сума співпадала із звичайною. Такий підхід є досить розвиненим і застосовується до широкого класу числових та функціональних рядів.

Розбіжні тригонометричні ряди часто виникають при диференціюванні збіжних рядів. Для деяких класів таких рядів можна запропонувати підхід, при якому вихідний розбіжний ряд визначає деяку узагальнену функцію, яка не має значень у звичайному розумінні. Проявляється така узагальнена функція лише у вигляді згортки з функціями певних класів, які можна назвати основними. Такий підхід, який є аналогом підходу до визначення узагальнених δ-функцій, розглядається в даній роботі.

2. ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Розглядається клас узагальнених тригонометричних функцій, що подаються розбіжними тригонометричними рядами, коефіцієнти яких мають певний порядок зростання; будуються згортки цих узагальнених функцій з функціями певних класів. Розглядається одне із застосувань таких функцій у важливій задачі теорії обробки сигналів.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right).$$

Нехай коефіцієнти цього ряду a_k, b_k мають порядок зростання k^{ρ}, $1\leqslant\rho<\infty$; в подальшому будемо позначати ці коефіцієнти $a_k(\rho)$, $b_k(\rho)$. Позначимо також через $[\rho]$ цілу частину ρ; тоді $[\rho]\leqslant\rho<[\rho]+1$.

Денисюк Володимир Петрович; ✉ kvomden@nau.edu.ua

Чисто формально позначимо

$$\varphi(\rho,t)=\frac{a_0(\rho)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(\rho)\cos kt+b_k(\rho)\sin kt\big). \tag{1}$$

Зрозуміло, що ряд, який визначає функцію $\varphi(\rho,t)$, є розбіжним у кожній точці відрізку $[0,2\pi]$; отже, функція $\varphi(\rho,t)$ не є функцією у звичайному розумінні.

Введемо таке означення. Функції, які визначаються розбіжними тригонометричними рядами типу (1), будемо називати узагальненими тригонометричними функціями.

Проявляються узагальнені тригонометричні функції лише у взаємодії з іншими функціями певних класів, які ми будемо називати основними.

Припустимо, що деяка функція $\mu(\gamma,t)$ є основною для функції $\varphi(\rho,t)$. Будемо вимагати, щоб згортка функцій $\mu(\gamma,t)$ і $\varphi(\rho,t)$, що визначається формулою

$$F(\varphi,\mu,t)=\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\rho,t-\tau)\mu(\gamma,\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

була звичайною функцією; природно вважати цю функцію результатом дії узагальненої тригонометричної функції $\varphi(\rho,t)$ на основну функцію $\mu(\gamma,t)$.

Нескладно помітити, що така ситуація повністю аналогічна ситуації із δ-функціями Дірака: як відомо, δ-функція не є функцією у звичайному розумінні і задається лише на класах основних функцій (див., наприклад, [2]). Проте, слід відзначити і певні відмінності узагальнених тригонометричних функцій від δ-функціями Дірака. Так, зокрема, узагальнені тригонометричні функції залежать від параметра ρ; зрозуміло, що і клас основних функцій в загальному випадку також залежить від цього параметра.

Розглянемо питання існування узагальнених тригонометричних функцій і відповідних їм класів основних функцій детальніше.

Перш за все відзначимо, що в ролі основних функцій, на яких задано узагальнені тригонометричні функції, ми будемо використовувати лише парні періодичні функції; відповідно згортка основних періодичних функцій з узагальненими тригонометричними функціями також буде періодичною.

Припустимо, що основну функцію $\mu(\gamma,t)$ можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$\mu(\gamma,t)=\frac{\nu_0(\gamma)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k(\gamma)\cos kt. \tag{3}$$

В роботах [3, 4] було показано, що при цих умовах згортку (2) можна подати у вигляді

$$F(\varphi,\mu,\rho,\gamma,t)=\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\rho,t-\tau)\mu(\gamma,\tau)\,d\tau=\frac{a_0}{2}\frac{\nu_0(\gamma)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k(\gamma)\big(a_k(\rho)\cos kt+b_k(\rho)\sin kt\big), \tag{4}$$

за умови рівномірної збіжності ряду у правій частині (4).

Будемо вимагати, щоб ряд в (4), який визначає функцію $F(\varphi,\mu,\rho,\gamma,t)$, збігався рівномірно. Для рівномірної збіжності цього ряду, згідно з ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціональних рядів, достатньо, щоб добутки коефіцієнтів $\nu_k(\gamma)a_k(\rho)$ та $\nu_k(\gamma)b_k(\rho)$, що входить до (4), мали порядок спадання $O(k^{-\tau})$, $\tau>1$. Оскільки коефіцієнти $a_k(\rho)$ та $b_k(\rho)$ мають порядок зростання k^{ρ}, зрозуміло, що коефіцієнти $\nu_k(\gamma)$ основної функції $\mu(\gamma,t)$ повинні мати порядок спадання $k^{-(\rho+\tau)}$; отже, $\gamma>\rho+1$. В ролі таких коефіцієнтів Фур'є можуть виступати вирази типу $\frac{\psi(k)}{k^{\gamma}}$, $\sin\frac{\psi(k)}{k^{\gamma}}$ тощо, де $\psi(k)$ — деякі обмежені функції, не рівні тотожно 0. При цьому основні функції подаються рівномірно збіжними рядами

$$\mu(\gamma,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k^{\gamma}}\cos kt,\qquad \mu(\gamma,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\psi(k)}{k^{\gamma}}\cos kt. \tag{5}$$

Ця формула надає можливості конструювати необхідні основні функції.

Вимоги до основних функцій можна сформулювати й інакше. Оскільки порядок спадання коефіцієнтів Фур'є деякої функції визначається її диференціальними властивостями (див., наприклад, [4]), нескладно прийти до висновку, що основні функції мають бути періодичними, парними, неперервними та мати неперервні похідні до порядку $[\rho]$ включно; похідна ж порядку $[\rho]+1$ має мати обмежену варіацію. За цих умов коефіцієнти Фур'є цих функцій мають порядок спадання $\gamma\geqslant[\rho]+2$.

При такому підході в ролі основних функцій можуть виступати класси функцій з керованою гладкістю, а саме B-сплайни відповідних порядків, фундаментальні функції поліноміального та тригонометричного типу, розглянуті нами в [4] тощо. Зауважимо, що перелічені класи функцій залежать і від параметра α і при $\alpha\to 0$ утворюють δ-подібні послідовності. З цього негайно випливає той факт, що за умови розгляду (4) як методів підсумовування розбіжних рядів, ми отримуємо F-ефективні методи [1].

Зрозуміло, що в ролі основних функцій можна також вибирати і класи періодичних, нескінченно диференційованих функцій; проте при цьому слід зважати на те, що коефіцієнти Фур'є таких функцій обчислюються досить складно.

Розглянемо одне важливе застосування узагальнених тригонометричних функцій в задачах теорії обробки сигналів.

Припустимо, що модель аналогового сигналу (надалі для простоти замість терміну "модель сигналу" ми будемо вживати термін "сигнал"), який характеризує деякий процес, подається виразом

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(a_k\cos kt+b_k\sin kt\bigr),\qquad t\in[0,2\pi). \tag{6}$$

У сучасних вимірювальних системах цей сигнал дискретизують з рівномірним кроком $h=2\pi/N$. Інакше кажучи, на напіввідрізку $[0,2\pi)$ задають сітку $\Delta_N=\{t_i\}_{i=1}^N$, $t_i=\frac{2\pi}{N}(i-1)$, $(N=2n-1, n=1,2,...)$, і ставлять у відповідність сигналу $f(t)$ послідовність $\{f(t_i)\}_{i=1}^N=\{f_i\}_{i=1}^N$ його значень у вузлах сітки Δ_N. Зрозуміло, що при цьому приймають припущення про те, що характеристики аналогового сигналу з достатньою точністю можуть бути отримані із аналізу послідовності $\{f_i\}_{i=1}^N$.

Прийняття такого припущення грунтується на відомій теоремі Котельнікова–Шеннона, яка розглядає функції з обмеженим спектром — цілі функції. Проте на практиці умови цієї теореми не виконуються, оскільки реальні сигнали не є цілими функціями, а отже, не можуть мати обмежений спектр (див., напр. [5]).

З теореми Котельнікова–Шеннона випливає той факт, що знання лише послідовності значень аналогового сигналу замало для отримання характеристик цього сигналу з довільною точністю; необхідно ще і знання класу функцій, до якого належить сигнал. Так, в цій теоремі клас функцій задається вимогою того, щоб ці функції мали обмежений спектр, тобто були цілими.

Класи функцій, до яких належить аналоговий сигнал, можна задавати різними способами. В даній роботі ми будемо розглядати класи періодичних функцій, що мають абсолютно неперервні похідні до $(m-1)$-го $(m=1,2,...)$ порядку включно; похідну ж порядку m ми будемо вважати функцією обмеженої варіації, яка може бути і розривною. Класи таких функцій ми будемо позначати V^m. При цьому ми вважаємо, що функції класу V^0 є функціями обмеженої варіації.

Такі класи функцій є природними для сигналів, пов'язаних із переміщенням матеріальних об'єктів. Зрозуміло, що прискорення таких об'єктів не може змінюватися стрибком, а отже, сигнал, що подає переміщення такого об'єкту, має неперервні похідні першого і другого порядку, тобто належить класу V^3.

Виходячи з тих же міркувань, можна вважати, що сигнал, який подає швидкість матеріального об'єкту, має неперервну похідну першого порядку належить класу V^2, а сигнал, який подає прискорення, є неперервним і належить класу V^1.

Розглянемо методи обробки дискретних послідовностей сигналів із врахуванням апріорних відомостей про диференціальні властивості сигналу при спектральних вимірюваннях більш детально.

Нехай сигнал $f(t)\in V^m$, $(m=0,1,...)$ подається виразом (6) і замінюється послідовністю значень $\{f_i\}_{i=1}^N$ у вузлах сітки Δ_N. Дискретні коефіцієнти Фур'є a_k^*, b_k^*, $(k=1,2,...,n)$ сигналу обчислюються за формулами

$$a_0^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i,\qquad a_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i\cos kt_i,\qquad b_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i\sin kt_i,\qquad k=1,2,...,n. \tag{7}$$

Підставляючи в ці формули значення функції $f_i=f(t_i)$, нескладно встановити зв'язок між точними коефіцієнтами Фур'є a_k, b_k, $(k=1,2,...)$ і дискретними коефіцієнтами a_k^*, b_k^*, $(k=1,2,...,n)$. Цей зв'язок подається такими формулами:

$$\frac{a_0^*}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_{2mN};\qquad a_k^*=a_k+\sum_{m=1}^{\infty}\bigl(a_{mN+k}+a_{mN-k}\bigr);\qquad b_k^*=b_k+\sum_{m=1}^{\infty}\bigl(b_{mN+k}-b_{mN-k}\bigr). \tag{8}$$

Формули (8) подають добре відомий ефект накладання частот, який виникає при заміні аналогового сигналу дискретною послідовністю його значень. Зрозуміло, що вплив цього ефекту, який можна характеризувати виразами

$$\varepsilon_k^c=|a_k^*-a_k|=\sum_{m=1}^{\infty}\bigl(a_{mN+k}+a_{mN-k}\bigr);\qquad \varepsilon_k^s=|b_k^*-b_k|=\sum_{m=1}^{\infty}\bigl(b_{mN+k}-b_{mN-k}\bigr),$$

визначається порядком спадання точних коефіцієнтів Фур'є; в свою чергу, цей порядок спадання визначається диференціальними властивостями сигналу, тобто вибраним класом V^m.

Враховуючи вищенаведене, можна сформулювати задачу відновлення сигналу у такій постановці: побудувати функцію $f(t)$, яка

а) належить заданому класу V^m, тобто $f(t)\in V^m$;

б) у вузлах сітки Δ_N приймає значення $\{f_i\}_{i=1}^N$.

Таке відновлення ми будемо здійснювати із застосуванням теорії узагальнених тригонометричних функцій. Розглянемо узагальнену тригонометричну функцію

$$\varphi(0,t)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^*\cos kt+b_k^*\sin kt\right). \tag{9}$$

Ряд (9) є розбіжним, оскільки його коефіцієнти утворюють періодичні послідовності і не прямують до 0 із зростанням їх номерів; отже, цей ряд являє собою узагальнену тригонометричну функцію із порядком зростання коефіцієнтів $\rho=0$.

В ролі основних функцій будемо вибирати B-сплайни порядків 0, 1, що належать класам V^0 та V^1, та поліноміальні ермітові та прості сплайни, що належать класам V^2 та V^3.

Розглянемо приклад. Нехай на відрізку $[0,2\pi)$ спостерігався сигнал $f(t)$. Нехай також $N=9$, а послідовність значень сигналу $\{f_i\}_{i=1}^{9}$ на сітці Δ_9 має вигляд $\{2,1,3,2,4,1,3,1,3\}$. Обчислюючи коефіцієнти a_k^*, b_k^*, $(k=1,2,\ldots,n)$ за формулами (7), утворимо узагальнену тригонометричну функцію згідно з (9).

Припустимо, що сигнал $f(t)\in V^0$. Знайдемо згортку узагальненої функції $\varphi(0,t)$ із B-сплайном 0-го порядку $B_0(t)$, $B_0(t)\in V^0$. Оскільки коефіцієнти Фур'є такого сплайна мають вигляд

$$\nu_k(1)=\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{N}\right),\quad \text{де}\quad \operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x},$$

маємо

$$F(\varphi,B_0,0,1,t)=\int_0^{2\pi}\varphi(0,t-\tau)\mu(1,\tau)\,d\tau=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{N}\right)\cdot\left(a_k(\rho)\cos kt+b_k(\rho)\sin kt\right). \tag{10}$$

Графік функції $F(\varphi,B_0,0,1,t)$ наводиться на рис. 1.

Рис. 1 потребує певного коментаря. Перш за все відзначимо, що порядок спадання коефіцієнтів $\nu_k(1)$ є $O(n^{-1})$; такий ряд збігається за ознакою Діріхле, проте збіжність ряду в (10) не є рівномірною і сума цього ряду $F(\varphi,B_0,0,1,t)$ є розривною функцією обмеженої варіації. Цей випадок становить певний інтерес, оскільки таке ступінчасте відновлення часто застосовують на практиці. Зауважимо, що у вузлах сітки Δ_9 функція $F(\varphi,B_0,0,1,t)$ приймає такі ж значення, що і вихідний сигнал $f(t)$.

Припустимо тепер, що сигнал $f(t)\in V^1$. Знайдемо згортку узагальненої функції $\varphi(0,t)$ із B-сплайном 1-го порядку $B_1(t)$, $B_1(t)\in V^1$. Оскільки коефіцієнти Фур'є такого сплайна мають вигляд

$$\nu_k(2)=\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]^2,$$

маємо

$$F(\varphi,B_1,0,2,t)=\int_0^{2\pi}\varphi(0,t-\tau)\mu(2,\tau)\,d\tau=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\operatorname{sinc}\frac{\pi k}{N}\right)^2\left(a_k(\rho)\cos kt+b_k(\rho)\sin kt\right). \tag{11}$$

Графік функції $F(\varphi,B_1,0,2,t)$ наводиться на рис. 2

В цьому випадку порядок спадання коефіцієнтів $\nu_k(2)$ є $O(n^{-2})$; отже, збіжність ряду в (11) є рівно-

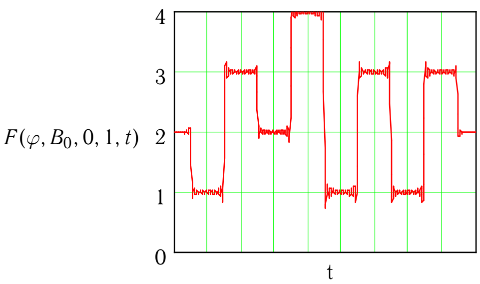

Рис. 1

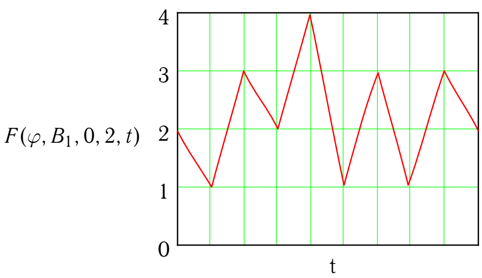

Рис. 2

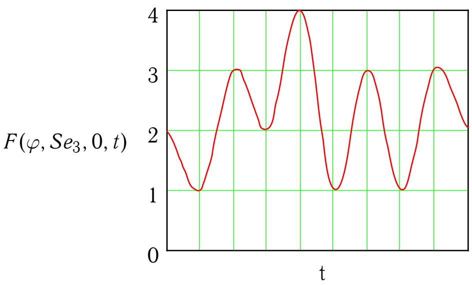

Рис. 3

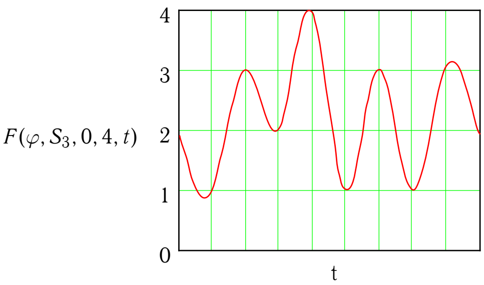

Рис. 4

мірною і сума цього ряду $F(\varphi, B_1, 0, 2, t)$ є неперервною функцією, похідна якої є функцією обмеженої варіації.

У випадку, коли сигнал $f(t) \in V^2$, в ролі основної функції виберемо поліноміальний ермітів сплайн 3-го порядку, коефіцієнти Фур'є якого визначаються таким чином:

$$\nu_k(3) = \left(3 \operatorname{sinc} \frac{\pi k}{N} - 2 \cos \frac{\pi k}{N}\right) \cdot \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]^3. \tag{12}$$

Графік функції $F(\varphi, Se_3, 0, t)$ наводиться на рис. 3.

В цьому випадку порядок спадання коефіцієнтів $\nu_k(3)$ є $O(n^{-3})$; отже, збіжність ряду в (9) є рівномірною і сума цього ряду $F(\varphi, Se_3, 0, 3, t)$ є неперервною функцією, що має неперервну першу похідну. Як і раніше, у вузлах сітки Δ_9 ця функція приймає такі ж значення, що і вихідний сигнал $f(t)$.

Нарешті, у випадку, коли сигнал $f(t) \in V^3$, в ролі основної функції виберемо поліноміальний простий кубічний сплайн, коефіцієнти Фур'є якого визначаються таким чином:

$$\nu_k(4) = \frac{3\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]^4}{2 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}. \tag{13}$$

Графік функції $F(\varphi, S_3, 0, 4, t)$ наводиться на рис. 4.

В цьому випадку порядок спадання коефіцієнтів $\nu_k(4)$ є $O(n^{-4})$; отже збіжність ряду в (9) є рівномірною і сума цього ряду $F(\varphi, S_3, 0, t)$ є неперервною функцією, що має неперервні першу і другу похідні. Як і раніше, у вузлах сітки Δ_9 ця функція приймає такі ж значення, що і вихідний сигнал $f(t)$.

Важливо відзначити, що праві частини формул (9)–(13) являють собою тригонометричні ряди Фур'є, що містять нескінченну кількість коефіцієнтів; ці коефіцієнти мають певний порядок спадання. Далі, суми цих рядів у вузлах сітки Δ_9 інтерполюють послідовність значень сигналу $\{f_i\}_{i=1}^{9}$, тобто узгоджуються з наявною інформацією про сигнал.

Враховуючи це, можна зробити важливий висновок про те, що має місце ефект розгортання частот, протилежний ефекту накладання частот.

4. ВИСНОВКИ

В роботі розглядається клас узагальнених тригонометричних функцій, які подаються розбіжними тригонометричними рядами. Ці функції не мають значень у звичайному розумінні і проявляють себе лише у взаємодії із функціями певних класів — основними функціями. Така ситуація є певним аналогом узагальнених δ-функцій Дірака.

При проведенні прикладних досліджень, зокрема в галузі обробки вимірювальних сигналів, часто виникають розбіжні тригонометричні ряди. Запропоновані в роботі узагальнені тригонометричні функції надають можливість виконання коректних дій з такими рядами.

Застосування узагальнених тригонометричних функцій в задачах теорії обробки вимірювальних сигналів, дозволило отримати важливий ефект розгортання частот, який є протилежний добре відомому ефекту накладання частот.

Подальше вивчення застосувань узагальнених тригонометричних функцій є перспективним, оскільки, як ілюструє наведений приклад, в багатьох випадках дозволяє підвищити точність обробки вимірювальних сигналів.

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Изд. иностр. лит., 1951. — 504 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматгиз, 1968. — 496 с.
3. *Денисюк В.П.* Метод $\sigma_k(r, \alpha)$ множників підсумовування рядів Фур'є // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2015. — № 4. — С.34–40.
4. *Денисюк В.П.* Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни. — К.: ЗАТ «ВІПОЛ», 2015. — 296 с.
5. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971. — 408 с.

Надійшла до редакції 9.09.2015
Прийнята до друку 11.10.2015