Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 10 • № 1 • 2014 С. 79 – 84

УДК 528.3

Моделювання імовірності розподілу кутових нев'язок в мережі тріангуляції

В.М. Гладілін[1], **О.С. Гончаренко**[2], **Н.С. Шудра**[3]

[1]Національний авіаційний університет, м. Київ
[2]Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
[3]Київський національний університет будівництва і архітектури

В статті розглянута математична модель густини розподілу імовірностей нев'язок ланцюга трикутників тріангуляції.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВЫХ НЕВЯЗОК В СЕТИ ТРИАНГУЛЯЦИИ, Гладилин В.Н., Гончаренко А.С., Шудра Н.С. — В статье рассмотрена математическая модель плотности распределения вероятностей невязок цепи треугольников триангуляции.

SIMULATION OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF ANGULAR RESIDUALS IN A TRIANGULATION NETWORK, Gladilin V.N., Goncharenko A.S., Shudra N.S. — A mathematical model of the density of probability distribution of angular residuals of triangles in a triangulation network.

Ключевые слова: плотность распределения вероятностей; невязки; триангуляционная сеть.

Key words: probability distribution; residuals; triangulation network.

Математична модель для такого явища, як процес вимірювання, являє собою досить складну комбінацію аналітичних залежностей, реалізація якої в явному виді є нездоланною за складністю. Тому одним із шляхів побудови математичної моделі є спрощення задачі і одержання її наближеного розв'язку з необхідною точністю. З цією метою аналізується кожен фактор умов вимірювань окремо, який сам по собі являє складну сукупність елементів. Таким чином, вимірювання можна розглядати як багаторівневу конструкцію із взаємозв'язаних факторів, що містять множину різнорівневих елементів. Тоді математичну модель вимірювання можна розглядати як конгломерат математичних моделей умов вимірювань і взаємозв'язку між їх елементами.

При такій постановці задачі математична модель вимірювання повинна містити співвідношення, які визначаються відповідними диференціальними рівняннями. В загальному вигляді математична модель вимірювання, яка задана диференціальними рівняннями, записується таким чином: в лівій частині рівняння — швидкість зміни величини, що цікавить, а в правій — різниця між вхідними і вихідними параметрами.

Припустимо, що в результаті взаємодії випадкових факторів процес вимірювання стабілізується відносно запроектованого рівня і результати вимірювання характеризуються густиною розподілу ймовірностей $f_1(x)$. Далі припускаємо, що внаслідок дестабілізуючих впливів намітився вихід вимірювання із запроектованого рівня і утворилася сукупність спостережень із густиною розподілу ймовірностей $f_2(x)$. Тоді зміна густини нормального розподілу виразиться звичайним диференціальним рівнянням першого порядку

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x) - f_2(x), \tag{1}$$

де f_1 і f_2 — функції, що залежать від випадкової величини x. Другий доданок в правій частині (1) залежить від величини відхилень результатів вимірювання, $f_2(x) = f(a + \lambda\sigma, \sigma^2)$, а величина відхилень спостережень знаходиться в залежності від густини нормального розподілу ймовірностей $f(x)$.

Оскільки загальна сукупність, яку одержують в результаті вимірювання є неоднорідний об'єкт, то справедливо вибірку представити як суміш декількох нормально розподілених вибірок, що визначаються як $f_1(x, a, \sigma^2)$ і $f_2(x, a + \lambda\sigma, \sigma^2)$, де a і σ^2-параметри нормального розподілу; λ — параметр зміщення центра i-ої вибірки відносно центра основної вибірки (λ може набувати значень $0, 1, 2, \ldots$). Густини розподілу можна розглядати як функції, яким відповідає стабілізований і дестабілізований стан вимірювання. Дестабілізацію слід розуміти як подальше накопичення спостережень з певною концентрацією аномальних величин. Як міру концентрації приймемо співвідношення вигляду $\eta = \frac{m^2(\overline{X})}{m^2(\xi)}$, де $m^2(\overline{X})$ і $m^2(\xi)$ — дисперсія середнього арифметичного і медіани.

Можна вважати, що загальна сукупність містить постійну концентрацію аномальних величин, в той же час вона може бути різною в розділених вибірках. Тоді диференціальне рівняння (1) можна представити у вигляді

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x)\eta_1 - f_2(x)\eta_2. \tag{2}$$

Розглядаючи вимірювання як динамічний процес із саморегулюючим фактором, можна передбачити, що при умові налагоджування процесу на певний параметр, аномальні результати будуть розчинятися в масиві зібраної інформації із швидкістю, пропорційною концентрації аномальних величин в цілому. Тоді система диференціальних рівнянь процесу вимірювання буде мати вигляд

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x) - f_2(x), \qquad \frac{df(x)}{dx}\eta_2 = f_1(x)\eta_1 - f_2(x)\eta_2 - c\eta_2. \tag{3}$$

В цьому полягає методика складання диференціальних рівнянь при аналізі динаміки визначення густини розподілу ймовірностей в процесі вимірювання.

Проаналізуємо більш детально рівняння (1). Перепишемо його у вигляді

$$\frac{df(x)}{dx} = q_1 f(x) - q_2 f(x), \tag{4}$$

де $q_1 f(x)$ — густина випадкових величин, що лежать в допустимих межах; $q_2 f(x)$ — густина випадкових величин, які відхиляються, тобто, коефіцієнти q_1 і q_2 показують відносне збільшення і зменшення вибіркової густини розподілу ймовірностей відповідно.

Якщо в процесі вимірювання періодично здійснюється контроль за однорідністю вибіркової сукупності, наприклад, за допомогою статистичних критеріїв вибраковки, то диференціальне рівняння (4) матиме вид

$$\frac{df(x)}{dx} = q_1 f(x) - q_2 f(x) - \zeta(x), \tag{5}$$

де $\zeta(x)$ — густина розподілу ймовірностей, утворена аномальними результатами.

Коефіцієнт q_2 залежить як від $f(x)$, так і від $\zeta(x)$, оскільки в умовах ціле направленої вибраковки зменшення впливу аномальних результатів на параметри вимірювання за рахунок внутрішнього згладжування незначне із-за того, що критерії вибраковки виявляють результати, які явно не погоджуються з технічними допусками.

Величину густини $\zeta(x)$ можна вважати пропорційною потужності застосованого критерия $P(x)$, тоді

$$\frac{df(x)}{dx} = q_1 f(x) - q_2 f(x) - sP(x), \tag{6}$$

де s — відносна величина густини випадкової величини при застосуванні критерію вибраковки з потужністю $P(x)$.

Відомо, що потужність застосованого критерію із заданим рівнем значимості є ймовірність $P(x)$ попадання в критичну область. Наприклад, перевірена гіпотеза емпіричного центру розподілу характеризується критичною областю, заданою нерівностями

$$\overline{X} > x_0 + \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}; \qquad \overline{X} < x_0 - \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$$

Із статистичної теорії перевірки гіпотез відомо, що потужність застосованого критерію залежить від того, наскільки відрізняється значення x від альтернативи x_0.

Введемо нормовану різницю $\delta = \frac{x - x_0}{\sigma\sqrt{n}}$, тоді можна написати

$$\frac{\overline{X} - x_0}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - x}{\sigma\sqrt{n}} + \delta.$$

Очевидно, що потужність критерію зростає зі збільшенням $|\delta|$ і навпаки. Так, наприклад, при $\delta = 0$ одержимо $P(x) = \alpha$ (α — прийнятий рівень значимості). Таким чином, зміна потужності критерію може бути представлена рівнянням

$$\frac{dP(x)}{dx} = c_1 P(x) - c_2 P(x). \tag{7}$$

Коефіцієнти c_1 і c_2 характеризують відносне збільшення або зменшення потужності застосованого критерію.

Прийнявши $c_1 - c_2 = a$ і розв'язавши звичайне диференціальне рівняння, одержимо функцію росту потужності в залежності від x, а саме

$$P(x) = P_0 e^{ax} \tag{8}$$

підставивши (8) в (6), одержимо

$$\frac{df(x)}{dx} = q_1 f(x) - q_2 f(x) - sP_0 e^{ax}. \tag{9}$$

Інтегрування рівняння (9) викликає певні труднощі, зокрема, внаслідок невизначеності коефіцієнтів

q_1 і q_2. Зробимо наступне припущення. Будемо вважати, що при $sP_0e^{ax} < q_1f(x)$ права частина рівняння (9) перетворюється в нуль, так як зміна густини в даному випадку залежить від $q_1f(x)$. Якщо $sP_0e^{ax} > q_1f(x)$, то членом $q_2f(x)$ можна знехтувати, так як зміна густини пропорційна останньому. Тоді можна записати

$$\frac{df(x)}{dx} = q_1f(x) - sP_0e^{ax}. \tag{10}$$

В результаті інтегрування цього рівняння одержимо

$$f(x) = \frac{P_0}{q_1 - a}e^{ax} + e^{a(x-y)}\left(f(x_0) - \frac{P_0}{q_1 - a}e^{ay}\right) \tag{11}$$

Введемо таке значення нормованої випадкової величини, при якому застосування критеріїв вибраковки з певним рівнем значимості практично не впливає на зміну густини розподілу ймовірностей. Позначимо цю величину y, тоді $sP_0e^{ay} = q_1f(x_0)$ і, відповідно,

$$y = \frac{1}{a}\ln\frac{q_1f(x_0)}{sP_0}.$$

Отриманий розв'язок відображує динаміку зміни густини розподілу ймовірностей випадкової величини в залежності від самонастроювання процесу і потужності застосованого критерію вибраковки.

Розглянемо одну із імітаційних моделей вимірювання, в основі побудови якої лежить ідея максимального використання всієї наявної інформації про вимірювання. Така інформація, як відомо, знаходиться в результатах вимірювання.

Припустимо, що на певному просторово-часовому інтервалі із спостережень утворена вибіркова сукупність, яка потім поповнюється наступними результатами. Якщо процес вимірювання налаштований на певний рівень, то параметри емпіричної сукупності постійні, тобто $a = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$. Нехай в деякий момент часу сукупність характеризується кількісною мірою $f(x)$, яка є густиною розподілу ймовірностей випадкової величини. Відомо, що функція густини неперервна і диференціюється на всьому проміжку.

На протязі вимірювання можлива дестабілізація процесу, а це в свою чергу викликає зміну функції розподілу, тобто $F(x+\Delta x) - F(x)$. При $\Delta x \to 0$ різниця $F(x+\Delta x) - F(x)$ також прямує до нуля. Утворимо наступний вираз $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$. Із теорії ймовірностей слідує, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$. Ця зміна відбувається під впливом двох протилежних процесів: динаміки утворення аномальних результатів і їх локалізації. Процес локалізації слід в даному випадку розуміти двояко: безпосередня вибраковка за допомогою статистичних тестів і послаблення ступеня їх впливу на шукані параметри розподілу. Появі аномального результату передує початкова дестабілізація процесу вимірювання і вибраковка цього результату не є одноразовою, так як аномальність в даному випадку розуміють як відхилення результату від основної групи, з одного боку, і як грубий результат, з іншого боку.

Нехай $f'(x)$ — швидкість зміни густини розподілу. Тоді можна записати диференціальне рівняння наступного вигляду

$$f'(x) = q_1\zeta_1(x) - q_2\zeta_2(x), \tag{12}$$

де $q_1\zeta_1(x)$ і $q_2\zeta_2(x)$ — динаміка утворення густин допустимих значень випадкової величини та значень, що відхиляються.

Припустимо, що запас внутрішньої енергії вимірювання дозволяє в якийсь момент часу (на певному етапі накопичення вимірюваної інформації) забезпечити точність σ_1. Маємо вибірку з густиною $\varphi(x, a, \sigma_1^2)$. Розглянемо наступні ситуації. Якщо $f(x) > \varphi(x)$, то це вказує на наявність у виборці аномальних результатів, так як $\sigma < \sigma_1$, що є причиною відхилення від вихідного нормального розподілу. В даному випадку можна припустити, що інтенсивність формування величини $q_1\zeta_1(x)$ пропорційна густині розподілу ймовірностей $f(x)$. Якщо $f(x) < \varphi(x)$, то співвідношення параметрів точності визначається нерівністю $\sigma > \sigma_1$. В такому випадку аналізується вибірка з густини виду $\varphi(x, a, \lambda\sigma^2)$, де λ — параметр зсуву точності, тобто $\sigma_2^2 = \lambda\sigma_0^2$. На практиці розподіл такого виду описується гостро вершинними кривими нормального розподілу з додатнім ексцесом. Тоді можна припустити, що інтенсивність процесу формування густини буде пропорційна густині $\varphi(x)$.

Оскільки вимірювання має саморегулюючий фактор, вплив аномальних вимірювань буде згладжуватися природним шляхом. Іншими словами, процес згладжування результатів відбувається пропорційно густині $f(x)$. Це дає можливість у співвідношенні (12) покласти $\zeta_2(x) = f(x)$. Диференціальне рівняння (12) за таких умов можна переписати у виді

$$f'(x) = \begin{cases} q_1f(x) - q_2f(x) & \text{при } f(x) < \varphi(x); \\ q_1f(x) - q_2f(x) & \text{при } f(x) > \varphi(x). \end{cases} \tag{13}$$

За умовою задачі маємо $\frac{df(x)}{dx} = (q_1 - q_2)f(x)$. Тоді $\frac{df(x)}{f(x)} = (q_1 - q_2)\,dx$ і

$$\ln f(x) = (q_1 - q_2)x + \ln f(x_0) = \ln e^{(q_1-q_2)x} + \ln f(x_0) = \ln f(x_0)e^{(q_1-q_2)x},$$

звідки $f(x)=f(x_0)e^{(q_1-q_2)x}$.

Нехай $\varphi(x)=\text{const}$ тоді розв'язок першого рівняння набуде виду

$$f(x)=f(x_0)e^{-q_2x}+\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)(1-e^{-q_2x}).$$

Таким чином, маємо

$$f'(x)=\begin{cases} f(x_0)e^{-q_2x}+\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)(1-e^{-q_2x}) & \text{при } f(x)<\varphi(x);\\ f(x_0)e^{(q_1-q_2)x} & \text{при } f(x)>\varphi(x). \end{cases} \tag{14}$$

З'ясуємо суть коефіцієнтів q_1 і q_2 для даної задачі. Нехай $q_1<q_2$, тоді $q_1-q_2<0$ і $\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)<\varphi(x)$. Якщо $f(x_0)<\varphi(x)$, то згідно другої умови системи (13) матимемо $f(x)=f(x_0)e^{(q_1-q_2)x}$. Так як показник експоненти від'ємний, $f(x)<f(x_0)$, а густина розподілу ймовірностей ніколи не перевищить густини $\varphi(x)$. Якщо $x\to\infty$, то $f(x)\to 0$, тобто густина розподілу ймовірностей аномальної величини зменшується за показниковим законом. Іншими словами, при обговорених умовах відбувається стабілізація вимірювання.

Якщо $f(x_0)>\varphi(x)$, то на початку зміна густини описується першим рівнянням (14). Взявши похідну від $f(x)$, одержимо

$$\frac{df(x)}{dx}=q_1\varphi(x)-q_2f(x).$$

Помітимо, що $q_1\varphi(x)<q_2f(x)$, тому густина розподілу має тенденцію до зменшення. Якщо в першому рівнянні (14) $x\to\infty$, то $f(x)\to\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)$. Отже, $q_1\varphi(x)/q_2$ являє собою асимптотичну область і густина розподілу в цьому випадку підкорюється першому рівнянню (14) тільки при умові $f(x)>\varphi(x)$, а граничне значення $\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)<\varphi(x)$, тобто густина зменшується, підкорюючись першому рівнянню (14) до значення $\varphi(x)$. З цього моменту динаміка вимірювального процесу погоджується з другим рівнянням (14) і густина розподілу зменшується до нуля по експоненті, так як вимірювальний процес має тенденцію до стабілізації. Таким чином, при $q_1>q_2$ має місце стабілізація вимірювального процесу незалежно від вихідної густини розподілу ймовірностей $f(x_0)$.

Розглянемо випадок, коли $q_1>q_2$. Маємо $\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)>\varphi(x)$. Припустимо, що зміна густини вихідного розподілу описується першим рівнянням (14). Представимо це рівняння у вигляді

$$f(x)=\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)+\Big(f(x_0)-\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)\Big)e^{-q_2x}.$$

Не важко побачити, що при $x\to\infty$ $f(x)\to\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)$ помітне монотонне зростання при умові $\varphi(x)<f(x_0)<\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)$ і монотонний спад при умові $f(x_0)>\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)>\varphi(x)$.

Таким чином, при $q_1>q_2$ густина розподілу прямує до величини $\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)$, монотонно зростаючи при $f(x_0)<\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)$ і монотонно зменшується при $f(x_0)>\frac{q_1}{q_2}\varphi(x)$. Коефіцієнт q_1 характеризує фактор накопичення результатів вимірювання, коефіцієнт q_2 визначає функції управління вимірювальним процесом з метою вирівнювання траєкторії процесу в положення, заплановане експериментом. Функція $\varphi(x)$ визначається взаємопов'язаним станом умов вимірювань.

За наведеним аналізом можна стверджувати, що побудова імітаційної моделі динаміки вимірювання є першим етапом дослідження, яке дозволяє сформулювати достатньо точний опис тих причинно-наслідкових зв'язків, які діють в явищі, що вивчається. Для оцінки ефективності програми керівних дій необхідно мати достатнє уявлення про процеси деградації накопиченого матеріалу під впливом аномальних результатів і про процеси відновлення структури вимірювального процесу до необхідних норм шляхом використання арсеналу ймовірно-статистичних методів [1, 2].

При протіканні вимірювального процесу виникають причинно-наслідкові зв'язки між:

– густиною розподілу ймовірностей випадкової величини, що формується при встановленому нормативному режимі вимірювання і концентрацією аномальних величин, які доповнюють вибірку при наявності дестабілізації;
– концентрацією аномальних результатів у виборці і рівнем наслідків, які призводять до формування параметрів емпіричного розподілу;
– параметрами емпіричного розподілу і характером рішень, що приймаються експериментатором, направлених на відновлення необхідного рівня настроювання вимірювання.

Останнє формулювання по суті являє собою зворотний зв'язок, і процес вимірювання можна розглядати як систему управління зі зворотним зв'язком, наведену на рис. 1.

Блок дестабілізації містить усі фактори, які формують результат, що не узгоджується з нормативним рівнем процесу вимірювання. Його вихідними параметрами є густина розподілу випадкової величини

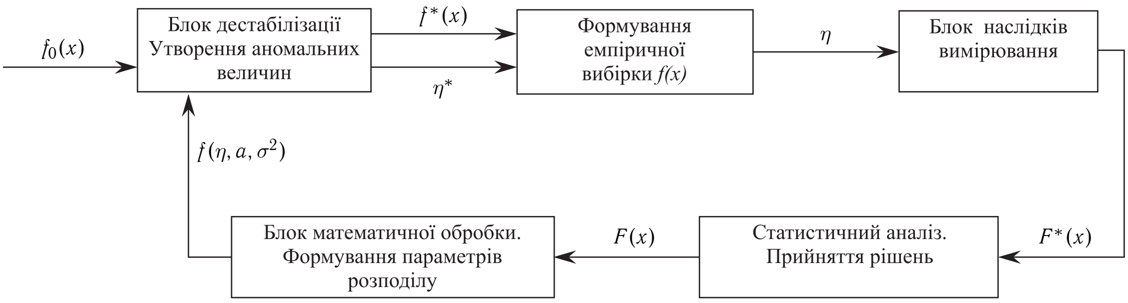

Рис. 1. Схема управління вимірюванням зі зворотним зв'язком

$f^*(x)$ і засміченість вибірки η^*.

Коли рівень вимірювання знаходиться в стабілізованому режимі, характер розподілу випадкової величини визначається густиною $f(x_0)$. Форму змішування густин розподілу ймовірностей $f^*(x)$ і $f(x_0)$ можна представити блоком математичного опису цього процесу. Вихідним параметром блока формування емпіричної вибірки є концентрація засмічування η вибіркової сукупності з густиною $f(x)$. Тоді маємо наступний зв'язок між швидкістю збільшення концентрації аномальних величин в сукупності, притокою аномальних результатів після стабілізації і процесом відновлення вимірювання до необхідного рівня

$$f(x)\frac{d\eta}{dx} = f^*(x)\eta^* - (f^*(x) + \zeta(x))\eta, \qquad (15)$$

де $\zeta(x)$ — густина розподілу, яка утворюється випадковою величиною, узгодженою з нормативами, але належить вибірці з густиною $f^*(x)$.

Перепишемо рівняння (15) у вигляді

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{d\eta}{dx} + \eta = \frac{f^*(x)}{\varphi(x)}\eta^*,$$

де $\varphi(x) = f^*(x) + \zeta(x)$ — суміш часткових вибірок з відповідними густинами розподілу ймовірностей. Введемо позначення: $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = a$ — параметр змішування часткових густин, де x дорівнює середньому квадратичному відхиленню кожної вибірки; $\frac{f^*(x)}{\varphi(x)}\eta^* = b$ — концентрація засмічування вибірки, яка аналізується.

Маємо рівняння вигляду

$$a\frac{d\eta}{dx} + \eta = b. \qquad (16)$$

Розв'язок його буде

$$\eta = Ce^{-\frac{1}{a}|x|}. \qquad (17)$$

Далі маємо $\frac{d\ln P}{d\xi} = 0$. Припустивши, що ξ займає середнє положення, одержимо

$$\frac{d}{d\xi}\left\{|x_1 - \xi| + |x_2 - \xi| + \ldots + |x_n - \xi|\right\} = q_s + m_{s+1},$$

де q_s — сума додатних різниць до s включно, m_{s+1} — сума від'ємних різниць, починаючи з $s+1$ і закінчуючи n-ою варіантою.

Очевидно, що $\frac{d\ln P}{d\xi} = 0$ тоді, коли $s = n/2$. Отже, ймовірне значення ξ дорівнює виміряній величині, що займає серединне положення у варіаційному ряді, тобто є медіаною. Взявши похідну по θ, одержимо вираз для середнього відхилення

$$\theta = \frac{1}{n}\left\{|x_1 - \xi| + |x_2 - \xi| + \ldots + |x_n - \xi|\right\}$$

Таким чином, маємо важливу властивість медіани: сума абсолютних величин відхилень від медіани менша будь-якої величини, в тому числі і від середнього арифметичного.

Проведемо дослідження функції (17). В теорії математичної обробки результатів вимірювань, як відомо, основне значення має нормальний закон розподілу випадкових величин, що дає можливість побудувати найбільш імовірну модель відносно параметрів a і σ емпіричного розподілу.

Однак найімовірніше значення можна одержати також строгим шляхом, прийнявши до уваги закон Лапласа, густина ймовірностей якого має вид

$$f(x) = \frac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta}, \qquad (18)$$

де θ — середнє арифметичне із абсолютних відхилень варіантів від медіани, тобто

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}|x-\xi|.$$

Порівнюючи вирази (17) і (18), помічаємо їх параметричну схожість, а це дає можливість припустити, що параметр засміченості вибірки η в ймовірному сенсі розподілений за законом Лапласа [1].

Так як формула (18) визначає імовірність попадання випадкової величини в інтервал $[x, x+\Delta x]$, за теоремою множення ймовірностей можна одержати вираз для ймовірності появи всіх значень випадкової величини у фіксованому інтервалі, тобто

$$P = \frac{1}{2^n\theta^n}e^{-\frac{|x_1-\xi|+|x_2-\xi|+\ldots+|x_n-\xi|}{\theta}}. \tag{19}$$

Імовірніше значення визначається із умови, що вираз (19) досягає мінімуму. Маємо

$$\ln P = -n\ln\theta+\theta\Big\{|x_1-\xi|+|x_2-\xi|+\ldots+|x_n-\xi|\Big\} = \min. \tag{20}$$

Для експериментальної перевірки візьмемо вибірку нев'язок трикутників об'ємом $n=26$ із об'єкта тріангуляції 1 класу [3] з параметрами: $W_{\text{сер.}}=-0{,}07''$, $W_{\text{загал.}}=1{,}24''$, $|W_{\max}|=2{,}94''$, $\xi=-0{,}01''$, гранично допустима нев'язка $W_{\text{доп.}}=\pm3''$ [5]; $[|\Delta W|]=23{,}71$.

За результатами підрахунків одержимо: $\theta=[|\Delta W|]/n=0{,}912''$ і емпірична густина ймовірностей набуде виду (рис. 2)

$$f(\Delta W) = \frac{1}{1{,}82}e^{-\frac{\Delta W}{0{,}91}} \tag{21}$$

Розділяючи сукупність на дві часткові вибірки, тобто із загальної сукупності виділимо вибірку відхилень нев'язок W_i: $-2{,}94''$; $-2{,}48''$; $-2{,}42''$; $+2{,}41''$; $+2{,}44''$; $+2{,}47''$. Параметри виділених вибірок наступні: $n_1=20$, $W_1=-0{,}07''$, $m_1=0{,}28''$, $n_2=6$, $W_2=0{,}09''$, $m_2=2{,}53''$. За відомою методикою підраховуємо густини ймовірностей для центрів групування з інтервалом через $0{,}50''$. Для загальної сукупності маємо $f(x=m_{\text{загал.}})=0{,}226''$, для сукупності відхилень $\varphi(x=m_2)=0{,}237''$. Тоді параметр $a=0{,}954''$.

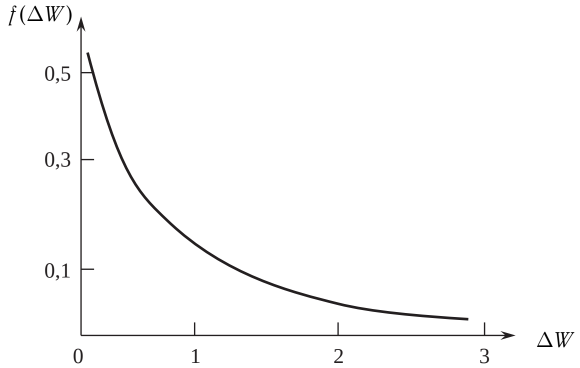

Рис. 2. Розподіл параметра засміченості вибірки

Аналогічні чисельні експерименти [4] були проведені з різноманітними вибірковими сукупностями (нев'язки в трикутниках тріангуляції 1–4 класів). Вони підтвердили припущення про те, що вираз (17) є не що інше, як густина розподілу параметру засміченості розподілу, отже,

$$f(\eta) = \frac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta}, \tag{22}$$

де $\theta=a=0{,}954\approx1$.

Далі задача зводиться до перевірки відповідності емпіричного розподілу Лапласа. Очевидно, що нормований розподіл Лапласа (засміченості нев'язок) при $\theta\approx1$, вираз (22) набуває вигляду

$$f(\eta) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|}. \tag{23}$$

1. *Валеев С.Г.* Регрессионное моделирование при обработке наблюдений. — М.: Наука, 1991. — 272 с.
2. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979. — 447 с.
3. *Тимофеев Н.А.* Достоверность сбора геодезической информации при ручной регистрации данных // Труды НИИПГ. — 1985. — № 10. — С.20–24.
4. *Сухов А.Н.* Системный анализ геодезических измерений. — М.: Недра, 1991. — 175 с.
5. Справочник геодезиста: в 2-х книгах. Кн. 1 / Под ред. В.Д.Большакова и Г.П.Левчука. — М.: Недра, 1985. — 455 с.

Надійшла до редакції 28.11.2014