Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 10 • № 1 • 2014 С. 62 – 65

УДК 530.12

Густина енергії і тиск всесвіту Стефані з випромінюванням та від'ємною просторовою кривизною

А.В. Градиський, О.М. Коптєва

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Дані, які спостерігаються за останні декілька десятиліть, свідчать про прискорене розширення нашого Всесвіту. Цей факт можливо пояснити, якщо розглядати рівняння Ейнштейна з однорідною густиною енергії та неоднорідним тиском. У статті розглянуто окремий випадок такого розв'язку для ідеальної рідини, що вільна від зсуву.

ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ И ДАВЛЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ СТЕФАНИ С ИЗЛУЧЕНИЕМ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВИЗНОЙ, Градиский А.В., Коптева Е.М. — Данные, которые наблюдаются в последние десятилетия, свидетельствуют об ускоренном расширении нашей Вселенной. Этот факт возможно объяснить, если рассматривать уравнения Эйнштейна с однородной плотностью энергии и неоднородным давлением. В статье рассмотрен частный случай такого решения для идеальной жидкости, свободной от сдвига.

ENERGY DENSITY AND PRESSURE OF THE STEFANI'S UNIVERSE WITH RADIATION AND NEGATIVE SPATIAL CURVATURE, by Gradysky A.V., Kopteva O.M. — Observational data of last decades show the accelerated expansion of our Universe. This fact can be explained if we consider Einstein's equations with uniform energy density and non-uniform pressure. In this paper we study one of these solutions for shiftless perfect fluid.

Ключевые слова: ускоренное расширение Вселенной; уравнения Эйнштейна; плотность энергии; давление.

Key words: accelerated expansion of the Universe; Einstein's equations; energy density; pressure.

Космологічні дослідження космічного мікрохвильового фону та поширення галактик на великі відстані вказують на те, що наш Всесвіт однорідний та ізотропний у розмірах, які перевищують сотні мегапарсек. Прискорене розширення Всесвіту, що встановлене на основі спостережень за надновими типу Ia, та анізотропією реліктового випромінювання наразі одне із найдивовижніших відкриттів наших часів. Це прискорення неможливо пояснити на основі моделі Фрідмана з матерією та випромінюванням — потрібно або включати у розрахунки космологічну сталу, або придумати новий тип матерії, який має від'ємний тиск і домінує на пізніх стадіях еволюції Всесвіту [1]. Оскільки відтоді не було знайдено пояснення для теперішнього значення цієї сталої, то була висунута ідея пошуку альтернативного обґрунтування цього факту. А саме: повернення до однієї із фундаментальних основ космології — однорідності [2]. Останнім часом неоднорідні моделі Всесвіту стають все популярнішими серед космологів.

Одна з таких неоднорідних космологічних моделей — це розв'язок рівняння Ейнштейна з ідеальною рідиною, який є конформно пласким, і більш відомий як модель Стефані [3]. Тут матерія має нульовий зсув та обертання, рухається з прискоренням і має ненульову густину. Такий розв'язок Стефані отримав у 1967 р. Він виникає як один із варіантів простору-часу, що може бути вкладеним у плаский п'ятивимірний простір. Цей Всесвіт і деякі інші його варіанти розглянуті дуже клопітливо. Наприклад, це зоряні моделі та деякі узагальнення моделі Фрідмана.

Для пояснення прискореного розширення Всесвіту розглянемо окремий випадок рівняння Ейнштейна з однорідною густиною енергії та неоднорідним тиском за від'ємної просторової кривизни. Густина енергії ідеальної рідини буде функцією тільки часу $\varepsilon=\varepsilon(t)$, а тиск є функцією координат та часу:

$$p=p(\chi,t). \tag{1}$$

Запишемо метрику Стефані.

$$ds^2=\frac{\dot{r}^2(\chi,t)\cdot a^2(t)}{r^2(\chi,t)\cdot \dot{a}^2(t)}dt^2-r^2(\chi,t)\left(d\chi^2+\sinh^2\chi\, d\sigma^2\right). \tag{2}$$

Функція r є функцією координати та часу:

$$r(\chi,t)=\frac{a(t)}{\operatorname{cth}\frac{\chi}{2}-\xi(t)a^2\operatorname{cth}^{-1}\frac{\chi}{2}}. \tag{3}$$

У цьому рівнянні введено функцію ξ. Вона характеризує кривизну простору-часу.

$$\xi(t)=\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\varepsilon(t). \tag{4}$$

Умова від'ємності кривизни — $\xi > 0$. У такому разі густина енергії матиме вигляд:

$$\varepsilon(t) = (1-\alpha)\frac{a_0^2}{a^4}, \tag{5}$$

$$a^2(t) = 2a_0 t + t^2, \tag{6}$$

де a_0 — довільна константа розмірності, $c \equiv 1$. Щоб зробити цю модель якомога «Фрідманівською», параметр α має бути значно меншим за одиницю. Запишемо функцію тиску у явному вигляді:

$$p(\chi, t) = -\varepsilon(t) - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}\,\frac{r}{\dot{r}}. \tag{7}$$

Перейдемо до безрозмірних величин. Для цього використаємо систему координат, в якій швидкість світла тотожно дорівнює одиниці.

$$c \equiv 1; \qquad A = \frac{a}{a_0}; \qquad R = \frac{r}{a_0}; \qquad T = \frac{t}{t_0}; \qquad \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon a_0^2; \qquad \widetilde{p} = p a_0^2. \tag{8}$$

Після невеликих перетворень функції тиску та густини енергії мають такий запис:

$$P = \frac{(1-\alpha)\left((2T+T^2) + 5\alpha\sinh^2\frac{\chi}{2}\right)}{3(2T+T^2)^2\left((2T+T^2) - 3\alpha\sinh^2\frac{\chi}{2}\right)}, \tag{9}$$

$$\varepsilon = \frac{1-\alpha}{(2T+T^2)^2}. \tag{10}$$

Вираз для густини енергії дає одне із обмежень на введений параметр. Бачимо, що він має бути не більше за одиницю

$$\alpha < 1 \tag{11}$$

З іншого боку, ми розглядаємо відкрий всесвіт (негативна просторова кривизна), для якого густина енергії повинна бути менша за її критичне значення $\varepsilon = (2T+T^2)^{-2}$, тобто α повинно бути додатною величиною. Таким чином, маємо наступне обмеження на α:

$$0 < \alpha < 1. \tag{12}$$

Також нас цікавить функція R від координати та часу. Дослідимо її. У даному виразі потрібна область додатних значень R.

$$R = \frac{(2T+T^2)^{3/2}}{2T+T^2-\alpha\sinh^2\frac{\chi}{2}}. \tag{13}$$

Так як функція часу завжди більша від нуля, то за знак відповідає вираз у знаменнику. Розглянемо знаменник.

$$2T + T^2 - \alpha\sinh^2\frac{\chi}{2} > 0. \tag{14}$$

Гіперболічну функцію розпишемо як піврізницю експонент, зробивши при цьому заміну

$$e^{\chi} = k, \tag{15}$$

отримуємо наступну нерівність:

$$k^2 - 2k\frac{\alpha + 4T + 2T^2}{\alpha} + 1 < 0. \tag{16}$$

Розв'язок цієї нерівності залежить від дискримінанту, який, у свою чергу, визначається параметром α. При додатному дискримінанті

$$(\alpha + 4T + 2T^2)^2 - \alpha^2 > 0 \tag{17}$$

параметр α має нижню границю:

$$\alpha > -T^2 - 2T. \tag{18}$$

У такому разі значення змінної k лежать у інтервалі:

$$k \in \left(\frac{\alpha+4T+2T^2-\sqrt{(\alpha+4T+2T^2)^2-\alpha^2}}{\alpha};\ \frac{\alpha+4T+2T^2+\sqrt{(\alpha+4T+2T^2)^2-\alpha^2}}{\alpha}\right). \tag{19}$$

Наша стара змінна χ лежатиме у такому ж, проте «логарифмованому» інтервалі

$$\chi \in \left(\ln\left(\frac{\alpha+4T+2T^2-\sqrt{(\alpha+4T+2T^2)^2-\alpha^2}}{\alpha}\right);\ \ln\left(\frac{\alpha+4T+2T^2+\sqrt{(\alpha+4T+2T^2)^2-\alpha^2}}{\alpha}\right)\right).$$

Якщо врахувати те, що функція T описує час життя Всесвіту (на «сьогодні» він дорівнює одиниці), то можемо отримати певні обмеження для параметру α

$$T = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha > -3; \qquad\qquad T = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > 0,$$

що знаходиться у відповідності з (12).

Графічно залежність тиску від координати при фіксованому α виглядає наступним чином — рис. 1.

Зі збільшенням координати $\chi \in [0, 2]$ асимптота даної кривої все далі й далі «переміщується у май-

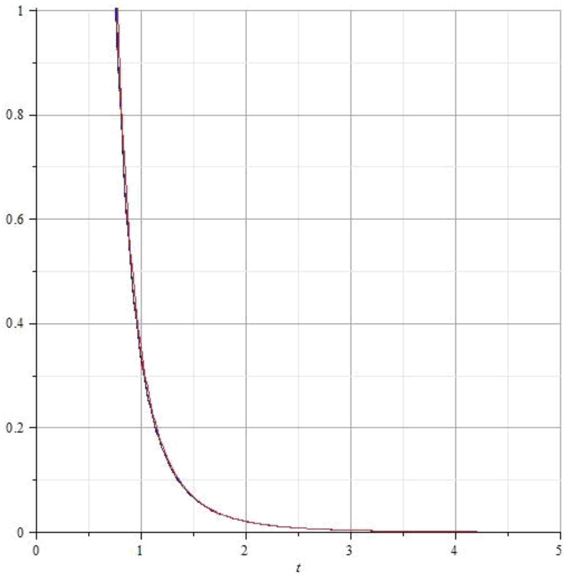

Рис. 1. Графік залежності тиску від координати

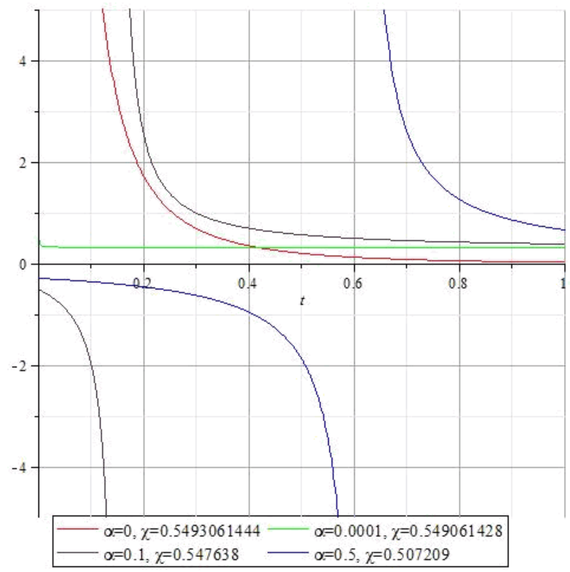

Рис. 2. Залежність тиску від параметру α

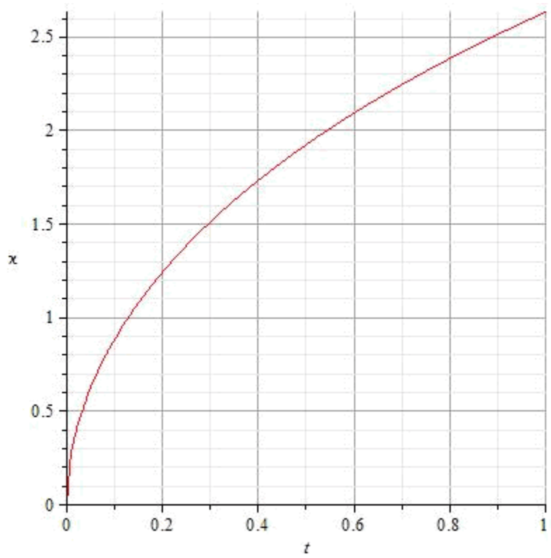

Рис. 3. Залежність координати χ від часу

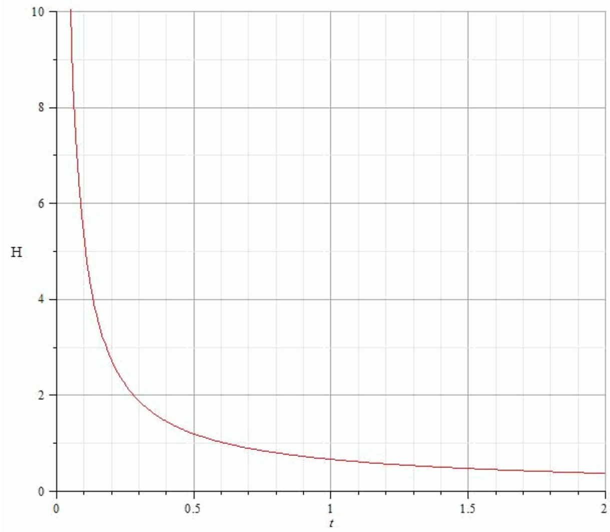

Рис. 4. Залежність постійної Хаббла від часу

бутнє».

Наступний випадок (дискримінант дорівнює нулю) приводить до таких результатів:

$$\alpha = -T^2 - 2T; \tag{20}$$

$$\chi = \ln\left(\frac{\alpha + 4T + 2T^2}{\alpha}\right) = \ln(1) = 0; \tag{21}$$

Однак цей випадок не задовольняє умову (12).

Метричний коефіцієнт (13) має особливість вздовж кривої $2T + T^2 - \alpha \sinh^2 \frac{\chi}{2} = 0$. Цією кривою визначається область застосування розглядуваного розв'язку в залежності від значення параметру α.

Функція тиску також є розривною функцією. Для «нашої» епохи точки розриву знайдемо із виразу для R, розв'язуючи його відносно координати χ. Для цього приймемо значення $T = 1$ і $R = 1$.

$$1 = \frac{3^{3/2}}{3 - \alpha \sinh^2 \frac{\chi}{2}} \tag{22}$$

В залежності від параметру α маємо сімейство кривих, що зображене на рис. 2.

Вигляд «особливої» кривої — залежність координати χ від часу представлено на рис. 3

Отримаємо вираз для сталої Хаббла у метриці (2). У ній функція $r(\chi, t)$ у явному вигляді матиме такий запис:

$$r(\chi, t) = \frac{\sqrt{2a_0 t + t^2}}{1 - \left(\sqrt{2a_0 t + t^2}\right)^{-2} \cdot \alpha \sinh^2 \frac{\chi}{2}}. \tag{23}$$

Для визначення постійної Хаббла потрібно визначити метричні коефіцієнти g_{00} і g_{11}:

$$g_{00}=\left(\frac{\dot{r}(\chi,t)}{r(\chi,t)}\right)^2\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2, \tag{24}$$

$$g_{11}=r^2(\chi,t), \tag{25}$$

де $a(t)$ визначається виразом (6).

Згідно з Елісом, постійна Хаббла визначається як:

$$H=\frac{1}{l}\frac{dl}{d\tau} \tag{26}$$

l — елемент довжини світової лінії частинки, а τ — власний час частинки.

$$l=\sqrt{g_{11}}, \qquad d\tau=\sqrt{g_{00}}\,dt. \tag{27}$$

Таким чином, постійна Хаббла має такий вигляд:

$$H=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{00}}}\frac{d\sqrt{g_{11}}}{dt}, \qquad H=\frac{a_0+t}{2ta_0+t^2}. \tag{28}$$

Розрахуємо цю величину чисельно. Для цього підставимо значення $a_0=10^{28}$ см та сучасний вік Всесвіту $t=4{,}4\cdot10^{17}$ с:

$$H=1{,}14\cdot10^{-18}\,\frac{1}{c} \tag{29}$$

Графічно залежність $H(t)$ має такий вигляд — рис. 4.

Висновки. Таким чином, точний розв'язок, що розглядається, має обмеження на застосування і може бути використаний для побудови космологічної моделі, як певний етап еволюції Всесвіту, наприклад, за допомогою зшивки. Причому для обраного параметру α завжди можна знайти час та координату особливої точки метрики. З виразу (9) для тиску і з рис. 2 бачимо, що можливість існування від'ємного тиску дійсно є, однак вона реалізується на початку еволюції (на початку часів), коли, скоріше за все, Всесвіт має бути замкненим, тобто повинен мати додатну просторову кривизну.

1. *Чернин А.Д.* Космический вакуум // УФН. — 2001. — **171**, № 11. — С. 1153–1175.
2. *Jakacka I., Stelmach J.* Non-homogeneity-driven Universe acceleration // Class. Quant. Grav. — 2001. — **18**. — P. 2643–2658.
3. *Krasiński A.* Inhomogeneous Cosmological Models. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Надійшла до редакції 25.07.2014