



УДК 521.14

Уточнение аппроксимации гравитационного поля небесных тел методом многогранников

А.А. Терещенко¹, О.В. Завизион², О.А. Железняк¹¹Национальный авиационный университет²Киевский кооперативный институт бизнеса и права

Одним из эффективных с вычислительной точки зрения методом аппроксимации гравитационного поля небесного тела неправильной формы является представление формы тела многогранником и последующее вычисление его гравитационного потенциала и напряженности по точным формулам. В данной работе предлагается способ уточнения аппроксимации, при котором используется кусочно-непрерывная интерполяция поверхности тела при помощи лоскутов Безье.

УТОЧНЕННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ НЕБЕСНИХ ТІЛ МЕТОДОМ БАГАТОГРАННИКІВ, Терещенко А.О., Завізіон О.В., Железняк О.О. — Одним з ефективних з обчислювальної точки зору методом апроксимації гравітаційного поля небесного тіла неправильної форми є представлення форми тіла багатогранником і подальше обчислення його гравітаційного потенціалу та напруженості за точними формулами. В даній роботі пропонується спосіб уточнення апроксимації, при якому використовується кусочно-неперервна інтерполяція поверхні тіла за допомогою поверхонь Без'є.

REFINEMENT OF THE APPROXIMATION OF CELESTIAL BODIES' GRAVITATIONAL FIELD USING POLYHEDRA, by Tereshchenko A.A., Zavizion O.V., Zheleznyak O.O. — The polyhedral method is an effective computational approach to the approximation of the gravitational potential and attraction of an irregularly shaped body. Refinement of the approximation by means of the piecewise continuous interpolation of body's surface via Bézier patches is proposed.

Ключевые слова: гравитационный потенциал; многогранник; поверхность Безье.

Key words: gravitational potential; polyhedron; Bézier surface.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения задач небесной механики, геодезической гравиметрии, геофизики очень важным является определение гравитационного потенциала небесных тел, необходимого для расчета орбит, определения глобальных и локальных аномалий гравитационного поля. Гравитационный потенциал небесного тела определяется фигурой и внутренним строением тела. Фигуры небесных тел имеют сложную форму и неоднородное внутреннее строение. При моделировании гравитационного поля небесного тела используются различные методы аналитического представления гравитационного потенциала. Наиболее широко известны разложение потенциала в ряд Лапласа, разложение по функциям Ламе [6], метод точечных масс [1, 8, 9], использование эквиравитирующих фигур [3–5, 7] и др. Указанные методы используются для корректно поставленных задач теории гравитационного потенциала, имеют свои преимущества и недостатки. В связи со сложностью решения интегрально-дифференциальных уравнений теории фигур небесных тел применяются приближенные численные методы, которые дают возможность с определенной точностью аппроксимировать гравитационный потенциал небесного тела и его производные.

Известно [2, 10], что гравитационный потенциал небесного тела и его первые производные являются непрерывными функциями во всем пространстве, включая внутреннюю область тела. В то же время вторые производные на поверхности гравитирующего тела претерпевают разрыв, который определяется граничными условиями и распределением плотности внутри тела. Точность аппроксимации гравитационного поля зависит от выбранных методов, а наилучший из них выбирается исследователем исходя из имеющихся данных измерений. В связи с этим всегда существует проблема уточнения аппроксимации гравитационного поля небесных тел.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА МНОГОГРАННИКОВ

Заслуживающим отдельного внимания является метод, в котором небесное тело сложной формы описывается при помощи многогранника (иными словами, поверхность тела описывается полигональной сеткой). Существуют точные формулы для вычисления потенциала и напряженности гравитационного поля как однородного многогранника [19, 20], так и многогранника с плотностью, изменяющейся по линейному закону [14, 15].

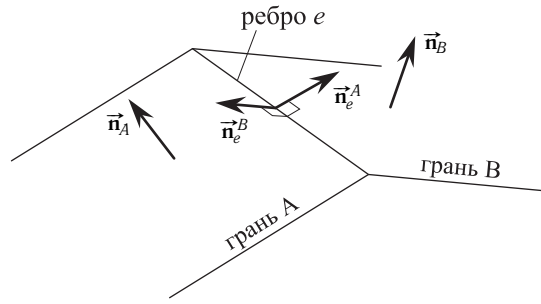


Рис. 1

В работе [20] приводится детальный вывод формул для вычисления потенциала Φ и его производных гравитационного поля однородного многогранника произвольной формы. Рассмотренный в [20] метод применим для полигональных сеток, гранями которых являются многоугольники с произвольным количеством вершин, однако на практике традиционно используют полигональные сетки с треугольными гранями, поскольку при количестве вершин более трех затруднительно контролировать расположение вершин отдельной грани в одной плоскости, поэтому воспользуемся соотношениями для полигональной сетки, составленной из треугольников [20].

$$\Phi = \frac{1}{2} G \sigma \left(\sum_{e \in \text{edges}} \vec{r}_e \mathbf{E}_e \vec{r}_e L_e - \sum_{f \in \text{faces}} \vec{r}_f \mathbf{F}_f \vec{r}_f \omega_f \right), \quad (1)$$

$$\nabla \Phi = -G \sigma \left(\sum_{e \in \text{edges}} \mathbf{E}_e \vec{r}_e L_e - \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \vec{r}_f \omega_f \right). \quad (2)$$

Суммы вычисляются по всем ребрам (*edges*) и граням (*faces*) полигональной сетки. В (1), (2) обозначено:

G — гравитационная постоянная;

σ — объемная плотность;

\vec{r}_e — вектор, проведенный из пространственной точки Q , в которой вычисляется потенциал или напряженность, к произвольной точке отдельного ребра e ;

\vec{r}_f — вектор, проведенный из точки Q , к произвольной точке отдельной грани f ;

$\mathbf{E}_e = (\vec{n}_A \vec{n}_e^A) + (\vec{n}_B \vec{n}_e^B)$ — матрица размером 3×3 , вычисленная для отдельного ребра e , общего для смежных граней A и B (рис. 1); операция $(\)$ обозначает диадное произведение векторов;

\vec{n}_A, \vec{n}_B — единичные векторы внешних нормалей для смежных граней A и B ;

\vec{n}_e^A, \vec{n}_e^B — единичные векторы внешних нормалей к ребру e (располагаются в плоскостях граней A и B);

$\mathbf{F}_f = (\vec{n}_f \vec{n}_f)$ — матрица 3×3 , вычисленная для отдельной грани f ;

\vec{n}_f — единичный вектор внешней нормали к грани f ;

$\omega_f = 2 \arctg \left(\frac{(\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot |\vec{r}_3| + |\vec{r}_1| \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 + |\vec{r}_2| \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 + |\vec{r}_3| \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2} \right)$ — величина, вычисленная для отдельной грани f , к вершинам которой из точки Q проведены векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ (предполагается, что вершины грани нумеруются против часовой стрелки, если смотреть со стороны внешней нормали);

$L_e = \ln \left(\frac{|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right)$ — величина, вычисленная для отдельного ребра e , к концам которого из точки Q проведены векторы \vec{r}_1, \vec{r}_2 (если точка Q лежит непосредственно на ребре e , то L_e стремится к бесконечности за счет обращения в нуль знаменателя, однако при этом слагаемые $\vec{r}_e \mathbf{E}_e \vec{r}_e L_e$ и $\mathbf{E}_e \vec{r}_e L_e$ тем не менее равны нулю за счет того, что вектор \vec{r}_e из точки Q к произвольной точке ребра e в данном случае можно определить как нулевой).

Точка пространства, в которой вычисляются потенциал и напряженность поля по формулам (1), (2), может располагаться как внутри, так и снаружи многогранника; кроме того, она может лежать на поверхности грани, на ребре или даже совпадать с вершиной.

Преимущество данного метода заключается в том, что для моделирования поля необходимо знать лишь форму и плотность тела, что позволяет применить его для аппроксимации гравитационного поля небесных тел сложной формы с приблизительно однородным распределением плотности (например, астероидов). Допустимо также моделирование поля и комбинацией вложенных многогранников.

3. УТОЧНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИИ

Если вершины полигональной сетки располагаются непосредственно на криволинейной поверхности моделируемого тела, то на выпуклых участках поверхности некоторая часть объема тела находится снаружи полигональной сетки, и масса этой части вещества не учитывается при вычислении потенциала и напряженности. На вогнутых участках поверхности, наоборот, грани полигональной сетки лежат снаружи моделируемого тела, за счет этого при вычислениях появляется «лишний» вклад в потенциал и напряженность. Разумеется, вследствие этого снижается точность аппроксимации. Например, для выпуклых тел вычисленные значения объема тела как объема многогранника будут несколько занижены, а значит и значения потенциала и напряженности будут иметь погрешность. Повысить точность аппроксимации можно, к примеру, за счет увеличения количества граней полигональной сетки, однако это ведет к значительному росту объема вычислений. Можно также сместить вершины полигональной сетки таким образом, чтобы ограниченный ею объем совпадал с предполагаемым объемом моделируемого тела.

В данной работе предлагается для повышения точности вычислений использовать аппроксимацию поверхности тела. В геометрическом моделировании и компьютерной графике существует множество методов построения гладких поверхностей на основе полигональных моделей [11, 12, 16–18], однако они акцентированы в основном на визуальное качество гладкой поверхности, а потому вычислительно затратны. В нашей же задаче необходимо минимизировать объем дополнительных вычислений, поскольку получение гладкой поверхности отнюдь не означает точности воспроизведения реальной поверхности моделируемого тела на основе известных положений отдельных ее точек.

Для аппроксимации участка поверхности тела над треугольной гранью имеет смысл использовать треугольный фрагмент поверхности (лоскут), заданный в параметрической форме полиномами невысокой степени. В качестве него мы выберем поверхность Безье второй степени [16], построенную по шести контрольным точкам P_1, \dots, P_6 (рис. 2), три из которых — P_1, P_2, P_3 — совпадают с вершинами грани. Уравнение этой поверхности запишем в виде

$$\vec{r}(u, v, w) = u^2 \vec{P}_1 + v^2 \vec{P}_2 + w^2 \vec{P}_3 + 2uv \vec{P}_4 + 2vw \vec{P}_5 + 2uw \vec{P}_6, \quad (3)$$

где $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_6$ — радиус-векторы, задающие положения контрольных точек P_1, \dots, P_6 ; u, v, w — барицентрические координаты; между ними существует соотношение $u + v + w = 1$, а потому в (3) \vec{r} является функцией лишь двух независимых параметров. Точке P_1 соответствуют значения барицентрических координат $u = 1, v = 0, w = 0$, поскольку $\vec{r}(1, 0, 0) = \vec{P}_1$; аналогично точке P_2 соответствуют $u = 0, v = 1, w = 0$, а точке P_3 — $u = 0, v = 0, w = 1$. Вдоль края лоскута Безье, соединяющего вершины P_1 и P_2 имеем $w = 0$, аналогично $v = 0$ вдоль края между вершинами P_1 и P_3 , а также $u = 0$ вдоль края между вершинами P_2 и P_3 .

Будем предполагать, что в каждой вершине полигональной сетки вычислен усредненный единичный

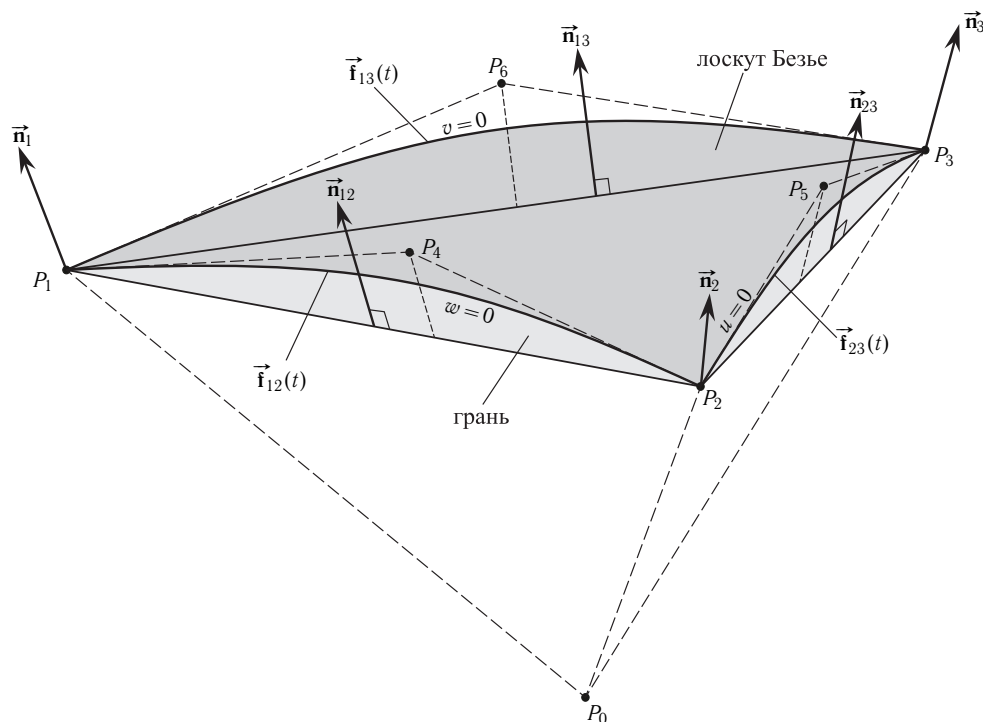


Рис. 2. Лоскут Безье, аппроксимирующий поверхность тела над отдельной гранью

вектор внешней нормали (его можно найти, сложив единичные векторы внешних нормалей граней, имеющих общую вершину, и приведя полученный вектор к единичному). На рис. 2 в вершинах P_1, P_2, P_3 изображены усредненные векторы нормалей $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$. Кроме того, каждому ребру полигональной сетки поставим в соответствие единичные нормали, полученные как средние внешних нормалей двух смежных граней, для которых данное ребро является общим. На рис. 2 такие нормали обозначены через $\vec{n}_{12}, \vec{n}_{23}, \vec{n}_{13}$. В общем случае векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_{12}, \vec{n}_{23}, \vec{n}_{13}$ отличаются по направлению.

Контрольную точку P_4 расположим в плоскости, проходящей через вершины P_1, P_2 и вектор \vec{n}_{12} ; также наложим условие: отрезок P_1P_4 должен быть перпендикулярен вектору \vec{n}_1 , а отрезок P_4P_2 — вектору \vec{n}_2 . Контрольные точки P_5 и P_6 разместим по тому же принципу, как показано на рис. 2. Данные требования, во-первых, обеспечивают перпендикулярность лоскута Безье и усредненных нормалей $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ в вершинах грани, а во-вторых, смежные лоскуты Безье будут иметь общие края, что означает G^0 -непрерывность кусочной поверхности, составленной из лоскутов, соответствующих отдельным граням. Таким образом, положения точек P_4, P_5, P_6 зададим как

$$\vec{P}_4 = \vec{P}_1 + k_1 \vec{n}_{12} + k_2 \vec{P}_{12}, \quad \vec{P}_5 = \vec{P}_2 + k_3 \vec{n}_{23} + k_4 \vec{P}_{23}, \quad \vec{P}_6 = \vec{P}_1 + k_5 \vec{n}_{13} + k_6 \vec{P}_{13}, \quad (4)$$

где k_1, \dots, k_6 — неизвестные коэффициенты,

$$\vec{P}_{12} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1, \quad \vec{P}_{23} = \vec{P}_3 - \vec{P}_2, \quad \vec{P}_{13} = \vec{P}_3 - \vec{P}_1. \quad (5)$$

Края лоскута как пространственные кривые описываются векторными функциями

$$\vec{f}_{12}(t) = \vec{r}(1-t, t, 0), \quad \vec{f}_{23}(t) = \vec{r}(0, 1-t, t), \quad \vec{f}_{13}(t) = \vec{r}(1-t, 0, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (6)$$

которые с учетом (3) и (4) представимы в виде

$$\vec{f}_{12}(t) = \vec{P}_1 + (2k_2t(1-t) + t^2) \vec{P}_{12} + 2k_1t(1-t) \vec{n}_{12}, \quad (7)$$

$$\vec{f}_{23}(t) = \vec{P}_2 + (2k_4t(1-t) + t^2) \vec{P}_{23} + 2k_3t(1-t) \vec{n}_{23}, \quad (8)$$

$$\vec{f}_{13}(t) = \vec{P}_1 + (2k_6t(1-t) + t^2) \vec{P}_{13} + 2k_5t(1-t) \vec{n}_{13}. \quad (9)$$

Условия перпендикулярности кривых $\vec{f}_{12}(t), \vec{f}_{23}(t), \vec{f}_{13}(t)$ в вершинах векторам $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ приводят к системе уравнений

$$\vec{f}'_{12}(0) \cdot \vec{n}_1 = 0, \quad \vec{f}'_{12}(1) \cdot \vec{n}_2 = 0, \quad \vec{f}'_{23}(0) \cdot \vec{n}_2 = 0, \quad \vec{f}'_{23}(1) \cdot \vec{n}_3 = 0, \quad \vec{f}'_{13}(0) \cdot \vec{n}_1 = 0, \quad \vec{f}'_{13}(1) \cdot \vec{n}_3 = 0$$

(штрих означает производную по скалярному параметру), при решении которой находим выражения для вычисления коэффициентов k_1, \dots, k_6

$$k_1 = \left(\frac{\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_2}{\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_2} - \frac{\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_1}{\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_1} \right)^{-1}, \quad k_2 = \left(1 - \frac{\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_2}{\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_2} \cdot \frac{\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_1}{\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_1} \right)^{-1}, \quad k_3 = \left(\frac{\vec{n}_{23} \cdot \vec{n}_3}{\vec{P}_{23} \cdot \vec{n}_3} - \frac{\vec{n}_{23} \cdot \vec{n}_2}{\vec{P}_{23} \cdot \vec{n}_2} \right)^{-1},$$

$$k_4 = \left(1 - \frac{\vec{n}_{23} \cdot \vec{n}_3}{\vec{P}_{23} \cdot \vec{n}_3} \cdot \frac{\vec{P}_{23} \cdot \vec{n}_2}{\vec{n}_{23} \cdot \vec{n}_2} \right)^{-1}, \quad k_5 = \left(\frac{\vec{n}_{13} \cdot \vec{n}_3}{\vec{P}_{13} \cdot \vec{n}_3} - \frac{\vec{n}_{13} \cdot \vec{n}_1}{\vec{P}_{13} \cdot \vec{n}_1} \right)^{-1}, \quad k_6 = \left(1 - \frac{\vec{n}_{13} \cdot \vec{n}_3}{\vec{P}_{13} \cdot \vec{n}_3} \cdot \frac{\vec{P}_{13} \cdot \vec{n}_1}{\vec{n}_{13} \cdot \vec{n}_1} \right)^{-1}.$$

Отдельной обработки требует случай, когда среди векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ хотя бы два коллинеарны (при этом часть коэффициентов k_1, \dots, k_6 обращается в бесконечность), либо наклонены по отношению к ребру, как показано на рис. 3 для \vec{n}_1 и \vec{n}_1 (критерием этого может служить условие $(\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_1)(\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_2) < 0$).

Кривая $\vec{f}_{12}(t)$, заданная в виде (7) в силу своей квадратичности по параметру t не способна обеспечить форму края лоскута, подобную изображенной на рис. 3. В качестве простого выхода в данной ситуации предлагается при численном расчете разбить ребро P_1P_2 точкой P' и построить два лоскута Безье — один на основе грани $P_1P'P_3$, а другой на основе грани $P'P_2P_3$. Для выполнения такой операции необходимо найти положение точки P' и вектор нормали \vec{n}' в ней. Для этого предположим, что уравнение кривой $\vec{f}_{12}(t)$ имеет вид

$$\vec{f}_{12}(t) = \vec{P}_1 + \vec{P}_{12}t + [C_1t + (C_2 - 2C_1)t^2 + (C_1 - C_2)t^3] \vec{n}_{12}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что кривая $\vec{f}_{12}(t)$ лежит в плоскости векторов $\vec{P}_{12}, \vec{n}_{12}$ и проходит через вершины

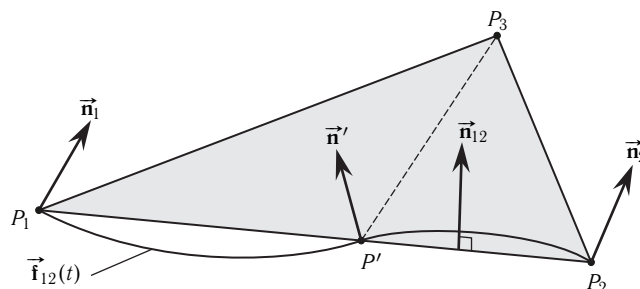


Рис. 3. Особый случай, требующий аппроксимации поверхности при помощи двух лоскутов Безье второго порядка

P_1, P_2 при $t=0$ и $t=1$ соответственно. Из условий перпендикулярности кривой векторам \vec{n}_1, \vec{n}_2

$$\vec{f}'_{12}(0) \cdot \vec{n}_1 = 0, \quad \vec{f}'_{12}(1) \cdot \vec{n}_2 = 0$$

найдем коэффициенты

$$C_1 = -\frac{\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_1}{\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_1}, \quad C_2 = -\frac{\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_2}{\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_2},$$

а из условия

$$C_1 t + (C_2 - 2C_1)t^2 + (C_1 - C_2)t^3 = 0$$

найдем значение параметра $t = \frac{C_1}{C_1 - C_2}$, соответствующее точке пересечения P' . Положение точки P' будет определяться как $\vec{P}_1 + \frac{C_1}{C_1 - C_2} \vec{P}_{12}$. Вектор нормали \vec{n}' в точке P' найдем посредством приведения к единичному вектору главной нормали кривой $\vec{f}_{12}(t)$

$$\vec{N} = (\vec{f}'_{12}(t) \times \vec{f}''_{12}(t)) \times \vec{f}_{12}(t) = ((C_2 - C_1)\vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_{12} - C_1 C_2)\vec{P}_{12} + (C_1 C_2 \vec{P}_{12} \cdot \vec{n}_{12} + (C_1 - C_2)|\vec{P}_{12}|)\vec{n}_{12}.$$

Пусть плоскости, проходящие через точки $\triangle P_1 P_2 P_4$, $\triangle P_2, P_3, P_4$ и $\triangle P_1, P_3, P_6$, пересекаются в некоторой точке P_0 (ее пространственное положение задает вектор $\vec{P}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$). Для нахождения координат точки P_0 составим систему уравнений

$$\begin{cases} (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times (\vec{P}_2 - \vec{P}_0) \cdot \vec{n}_{12} = 0, \\ (\vec{P}_2 - \vec{P}_0) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_0) \cdot \vec{n}_{23} = 0, \\ (\vec{P}_3 - \vec{P}_0) \times (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \cdot \vec{n}_{13} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

в которой каждое из уравнений является условием компланарности трех векторов. Система (11) имеет решение

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{n}_{12} \times \vec{P}_{12} \\ \vec{n}_{23} \times \vec{P}_{23} \\ \vec{n}_{13} \times \vec{P}_{13} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (\vec{P}_{12} \times \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{12} \\ (\vec{P}_{23} \times \vec{P}_2 - \vec{P}_{12} \times \vec{P}_{13}) \cdot \vec{n}_{23} \\ (\vec{P}_{13} \times \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{13} \end{bmatrix} \quad (12)$$

(в правой части стоит матрица, строки которой составлены из компонент соответствующих векторных произведений).

Объем ΔV , заключенный между лоскутом Безье и гранью полигональной сетки, вычислим как разницу $V_1 - V_2$ между объемом, ограниченным лоскутом Безье и тремя указанными выше плоскостями

$$V_1 = \int_0^1 \int_0^{1-v} \left(\frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v, 1-u-v) \times \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v, 1-u-v) \right) \cdot (\vec{r}(u, v, 1-u-v) - \vec{P}_0) du dv$$

и объемом тетраэдра $P_0 P_1 P_2 P_3$

$$V_2 = \frac{1}{6} \left((\vec{P}_2 - \vec{P}_0) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_0) \right) \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) = \frac{1}{6} (\vec{P}_{12} \times \vec{P}_{13}) \cdot \vec{P}_{01},$$

где обозначено $\vec{P}_{01} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0$.

После вычисления интеграла получим

$$\begin{aligned} \Delta V = & \frac{1}{9} \left[(k_3 \vec{n}_{23} - k_1 \vec{n}_{12}) \cdot (\vec{P}_{01} \times \vec{P}_{12}) + (k_5 \vec{n}_{13} - k_3 \vec{n}_{23}) \cdot (\vec{P}_{01} \times \vec{P}_{13}) \right] + \\ & + \frac{1}{45} \left[k_1 k_5 ((k_4 - 2)\vec{P}_{12} - (k_4 + 1)\vec{P}_{13}) \cdot (\vec{n}_{12} \times \vec{n}_{13}) + k_1 k_3 ((k_6 + 1)\vec{P}_{13} - 3\vec{P}_{12}) \cdot (\vec{n}_{12} \times \vec{n}_{23}) + \right. \\ & + k_3 k_5 (-k_1 \vec{n}_{12} - (k_2 + 1)\vec{P}_{12} + 3\vec{P}_{13}) \cdot (\vec{n}_{13} \times \vec{n}_{23}) + \\ & \left. + (k_1((2 - k_6)k_4 + 2k_6 + 2)\vec{n}_{12} + k_5((k_2 - 2)k_4 + k_2 + 4)\vec{n}_{13} - k_3((k_2 + 1)k_6 + k_2)\vec{n}_{23}) \cdot (\vec{P}_{12} \times \vec{P}_{13}) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Изображенный на рис. 2 случай соответствует аппроксимации выпуклого участка поверхности тела; при этом вычисленный по формуле (13) объем ΔV положителен. На вогнутых участках поверхности величина ΔV отрицательна. Объем ΔV может равняться или быть близок к нулю в случае, если все три вектора $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ перпендикулярны или почти перпендикулярны грани. Критерием этого может служить малость величины $|(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \cdot \vec{n}_3|$.

Если объемная плотность тела равна σ , то внутри объема ΔV заключена эффективная масса $\sigma \Delta V$, которая может быть как положительной, так и отрицательной. При вычислениях будем приближенно считать, что эта масса равномерно распределена по поверхности грани с поверхностной плотностью $\kappa = \frac{\sigma \Delta V}{S}$, где S — площадь грани. Отдельная грань f , которой соответствует поверхностная плотность κ_f «дополнительной» массы, дает вклад в общий гравитационный потенциал тела

$$\Phi_f = G \kappa_f \left[(\vec{n}_e^{(12)} \cdot \vec{r}_1) L_e^{(12)} + (\vec{n}_e^{(23)} \cdot \vec{r}_2) L_e^{(23)} + (\vec{n}_e^{(13)} \cdot \vec{r}_3) L_e^{(13)} - (\vec{n}_f \cdot \vec{r}_1) \omega_f \right] \quad (14)$$

и вклад в напряженность гравитационного поля

$$\nabla\Phi_f = G\kappa_f \left[-\vec{n}_e^{(12)}L_e^{(12)} - \vec{n}_e^{(23)}L_e^{(23)} - \vec{n}_e^{(13)}L_e^{(13)} + \vec{n}_f\omega_f \right], \quad (15)$$

где $\vec{n}_e^{(12)}$, $\vec{n}_e^{(23)}$, $\vec{n}_e^{(13)}$ — векторы внешних нормалей к ребрам граней (лежат в плоскости грани).

На основании вышеизложенного, получим следующую структуру алгоритма вычислений потенциала и напряженности гравитационного поля небесного тела:

1. Нахождение величин E_e , \vec{n}_e для всех ребер и F_f , \vec{n}_f для всех граней полигональной сетки.
2. Вычисление усредненных нормалей для каждой вершины и каждого ребра.
3. Определение для каждой грани коэффициентов k_1, \dots, k_6 .
4. Нахождение по формулам (12) положение точки P_0 , соответствующей каждой грани.
5. Нахождение по формуле (13) значения разницы объема ΔV для каждой грани.
6. Вычисление соответствующих значений L_e и ω_f для точки пространства, в которой нужно определить значение потенциала и напряженности.
7. Определение потенциала и напряженности поля многогранника по формулам (1), (2) и прибавление к этим значениям вычисленных по формулам (14), (15) поправок от отдельных граней.

4. ВЫВОДЫ

Проведенные исследования указывают на возможность использования метода многогранников при аппроксимации гравитационного потенциала внутри и снаружи небесного тела. Предложенная методика уточнения гравитационного потенциала применима для вычисления потенциала и напряженности гравитационного поля однородных небесных тел. Рассмотренная аппроксимация может распространяться на топологически одно- и двухсвязные гравитирующие фигуры. Получение аппроксимации для конкретной фигуры (сфероида, эллипсоида, кубоида, тороидальных образований) будет сделано в дальнейших исследованиях.

1. Антонов В.А. Представление гравитационного поля планеты потенциалом системы точечных масс // Уч. зап. ЛГУ. — 1978. — Вып. 56, № 397. — С. 145–155.
2. Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. — М.: Наука, 1988. — 272 с.
3. Завізіон О.В. Самогравітуючі диски як засоби описання зовнішніх гравітаційних полів небесних тіл // Кинемат. и физ. небес. тел. — 2000. — **16**, № 5. — С. 477–480.
4. Завізіон О.В. Про визначення густини еквігравітуючих стержнів, за допомогою яких описується зовнішнє гравітаційне поле планет-гігантів // Кинемат. и физ. небес. тел. — 2001. — **17**, № 1. — С. 89–92.
5. Завизион О.В. Сравнение методов описания внешних гравитационных потенциалов небесных тел // Радиофизика и радиоастрономия. — 2001. — **6**, № 2. — С. 101–104.
6. Кислик М.Д. Аппроксимация потенциалов сил притяжения планет // Астрон. ж. — 1994. — **71**, № 6. — С. 950–952.
7. Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 624 с.
8. Марченко А.Н. Модель точечных масс глобального гравитационного поля Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. — 1980. — Вып. 32. — С. 81–89.
9. Мецераков Г.А., Марченко А.Н. О новом подходе к представлению гравитационного потенциала планеты потенциалом системы точечных масс // Астрон. вестник. — 1979. — **13**, № 4. — С. 193–201.
10. Срепенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. — М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946.
11. Farin G. Curves and surfaces for CAGD. A practical guide. — Morgan-Kaufmann, 2002. — 499 p.
12. Hagen H. (ed.) Curve and surface design. — SIAM, 1992. — 205 p.
13. Holstein H. Invariance in gravimagnetic anomaly formulas for uniform polyhedra // Geophysics. — 2002. — **67**(4). — P. 1134–1137.
14. Pohánka V. Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density // Geophys. Prospect. — 1998. — **46**. — P. 391–404.
15. Prutkin H.I., Tenzer R. The optimum expression for the gravitational potential of polyhedral bodies having a linearly varying density distribution // J. Geod. — 2009. — **83**. — P. 1163–1170.
16. Salomon D. The computer graphics manual. — Springer, 2011. — 1556 p.
17. Sapidis N.S. (ed.) Designing fair curves and surfaces. Shape quality in geometric modelling and computer-aided design. — SIAM, 1994.
18. Shirman L.A. Construction of smooth curves and surfaces from polyhedral models. — University of California, 1990. — 208 p.
19. Werner R. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Cel. Mech. Dyn. Astr. — 1994. — **59**. — P. 253–278.
20. Werner R.A., Scheeres D.J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Cel. Mech. Dyn. Astr. — 1997. — **65**. — P. 313–344.

Поступила в редакцию 2.11.2013