



ISSN 1607–2855

Том 9 • № 2 • 2013 С. 130 – 133

УДК 528.3

Відновлення профілю геоїда за допомогою сплайн-функцій

О.С. Гончаренко¹, Б.І. Денисюк¹, В.О. Катушков¹, В.М. Гладілін²

¹Київський національний університет будівництва і архітектури

²Національний авіаційний університет

Розглянуто особливості відновлення профілю геоїда на локальну територію та методи його апроксимації сплайн-функціями.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ГЕОИДА С ПОМОЩЬЮ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ, Гончаренко О.С., Денисюк Б.И., Катушков В.А., Гладилін В.Н. — Рассмотрены особенности восстановления профиля геоида на локальную территорию и методы его аппроксимации сплайн-функциями.

RECOVERY OF THE GEOID'S PROFILE USING SPLINE FUNCTIONS, by Goncharenko O.S., Denisyuk B.I., Katushkov V.A., Gladilin V.N. — Features of recovery of the geoid's profile on the local area and its methods of approximation using spline functions are considered.

Ключевые слова: профиль; локальный геоид; аппроксимация; сплайны.

Key words: profile; local geoid; approximation; splines.

Під час прокладання астрономо-геодезичних ходів для відновлення поверхні локального геоїда геометричним методом [1, 2, 3] профільна лінія складається із дискретних значень результатів вимірювань. Відповідно, виникає питання визначення виду рівняння невідомої функції, що апроксимує профіль геоїда.

За аналізом публікацій можна стверджувати, що існує чітка тенденція значного зростання точності визначення геодинамічних параметрів. В зв'язку з цим з'явилася можливість вивчати більш тонку структуру відповідних часових рядів. Ця задача потребує розв'язку ряду проблем: відновлення неперервності, згладжування періодичних коливань за обмеженим об'ємом даних, виявлення слабких періодичних коливань і т.п. Існуючі класичні методи рішення цих проблем або не придатні, або дають обмежену інформацію про структуру рядів, що аналізуються. Так, наприклад, класична теорія інтерполювання передбачає використання одного базису на відрізку апроксимації. Це накладає обмеження на розташування вузлів інтерполяції і підвищує вимоги до гладкості функцій, що відновлюються [4]. Серйозна проблема обробки і аналізу часових рядів пов'язана також із розв'язком задачі осереднення. В процесі осереднення часто втрачається корисна інформація.

Цього можна уникнути, застосовуючи спеціальні осереднюючі сплайн-функції, які поряд із властивостями фільтрації, зберігають більш широкий клас інформативних функцій.

До основних переваг сплайнових наближень, які дозволяють ефективно відновлювати експериментальні функції, можна віднести наступні:

- стійкість сплайнів відносно локальних збурень (похибка вузла інтерполяційної сітки не відображується на поведінці сплайнів в цілому;
- добра збіжність сплайн-інтерполяції, на відміну від многочленної (зокрема, для експериментальних функцій з нерегулярними властивостями гладкості доцільно використовувати сплайн-інтерполяцію).

Серйозна проблема обробки і аналізу часових рядів пов'язана також із розв'язком задачі осереднення. В процесі осереднення часто втрачається корисна інформація.

Цього можна уникнути, застосовуючи спеціальні осереднені функції, які поряд із властивостями послаблення високочастотних завад, зберігають більш широкий клас інформативних функцій. Для побудови осередненої функції пропонується апарат квазіполіномів [4].

Побудова моделей дискретних часових рядів дозволяє перейти до представлення геодинамічних процесів у вигляді безперервних функцій. Для розв'язку цієї задачі необхідно попередньо звільнити вихідні дані від випадкової складової і за можливістю, відновити дані, які втрачені.

З цією метою використовують сплайн-функції, визначивши їх на неперервній часовій сітці $T_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \leq T_2$, у вузлах якої задані спостереження r_1, r_2, \dots, r_N . Алгоритм відновлення експериментальної функції за допомогою інтерполяційних та згладжуючих сплайнів на відрізку $[T_1, T_2]$ міні-

мізується виразом типу:

$$\alpha \int_{T_1}^{T_2} [\delta^{(p)}(t)]^2 dt + \sum_{k=1}^N [\delta_\alpha(t_k) - \gamma_k]^2 = \min, \quad (1)$$

де $\alpha > 0$ — параметр згладжування, $\delta(t)$ — інтерполяційний сплайн, $\delta_\alpha(t)$ — згладжуючий сплайн.

Для класу функцій, що мають на $[T_1, T_2]$ неперервну похідну p -го порядку ($p > 1$) справедливі наступні співвідношення:

1) розв'язок задачі однозначний при $N \geq p$;

2) цей розв'язок має структуру:

– на кожному відрізку $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ сплайни є поліномами степеня $2p-1$,

а на кінцях $[T_1, T_2]$ і $[t_N, T_2]$ — поліномами степеня $p-1$;

– в точках $T_1, t_1, \dots, t_n, T_2$ розв'язок мають $2p-2$ неперервні похідні;

– розв'язки $\delta(t)$ і $\delta_\alpha(t)$ задовольняють граничним умовам

$$\delta^{(k)}(t_1) = \delta(t_N) = 0, \quad (3)$$

$$\delta_\alpha^{(k)}(t_1) = \delta_\alpha(t_N) = 0, \quad k = p, \dots, 2p-2; \quad (4)$$

3) при $\alpha \rightarrow 0$ згладжуючий сплайн зводиться до інтерполяційного, причому справедлива оцінка

$$\max_{t \in [T_1, T_N]} |\delta_\alpha(t) - \delta(t)| = \delta(\alpha). \quad (5)$$

Похибка інтерполяції для даного класу функції при $p=2$ (кубичний сплайн) визначається виразом

$$q = \frac{5}{6} \bar{h} \|f''(t)\|_{[T_1, T_2]} \quad (6)$$

де $\bar{h} = \max h_{[T_1, T_2]}$ — інтервал між вузлами інтерполяційної сітки;

$$\|f''(t)\|_{[T_1, T_2]} = \max_{t \in [T_1, T_N]} \|f''(t)\|_{[T_1, T_2]}.$$

Експериментальні часові ряди являють собою комбінацію деякої регулярної складової, яка є “інформативною” і випадковою, породжена найрізноманітнішими факторами. На практиці часто використовується алгоритм “ковзного середнього”.

Математично така обробка являє собою обчислення згортки [6] експериментальної кривої $\tilde{q}(x)$ з ваговою “функцією-сходінкою” (ядром інтегрального рівняння) $K(x)$, де

$$K(x) = \begin{cases} 0, & x < -H/2; \\ 1/H_1, & -X/2 < x < H/2; \\ 1, & x > H/2. \end{cases} \quad (7)$$

(H — довжина відрізка, що ковзає вздовж осі, на якій задана експериментальна крива).

Функції $\tilde{q}(x)$ співставляється осереднена $q_H(x)$ виду

$$q_H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-x) \tilde{q}(t) dt, \quad (8)$$

що є рівнянням Фредгольма I роду [5].

Відомо, що осереднення за допомогою функції-сходінки зберігають тільки лінійні функції, тому в результаті залишається без змін тільки лінійна компонента, яка міститься в інформативній частині функції $\tilde{q}(t)$.

Для того, щоб не втратити інформацію на цьому етапі осереднення експериментальних рядів, в роботі визначимо такі осереднені функції, які поряд з властивістю послаблення високочастотних завад зберігали б найбільш широкий клас функцій, що містяться в інформативній частині кривої. Цим вимогам задовольняють функції, які є розв'язком рівняння типу згортки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(t-x) f(t) dt = f(x). \quad (9)$$

Таким чином, $f(t)$ є рішення інтегрального рівняння Фредгольма I роду [5], відповідно оцінити функцію за вибіркою обмеженого обсягу означає знайти наближення рівняння (9). Завдання пошуку точного рішення рівняння може бути лише при наявності точної правої частини — функції $f(x)$. В даному випадку така функція $f(x)$ невідома, а є лише вимірні значення

$$t_1, t_2, \dots, t_n \in T \quad (10)$$

обмеженого обсягу n .

Рішення $f(t)$ будемо шукати у класі неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Відхилення правих

частин одне від одного оцінимо в квадратичній метриці

$$m_{f(x)}(f_1, f_2) = \sqrt{\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx}, \tag{11}$$

а відхилення рішень $f(t)$ — у рівномірній метриці

$$m_{f(t)}(f_1, f_2) = \max_{x \in [a,b]} |f_1(t) - f_2(t)|. \tag{12}$$

Для кожної реалізації t вибірки T функція $f(x)$ однозначно визначена, має всі властивості і змінюється від нуля до одиниці (7), постійно зростає і неперервна справа, при цьому вона кусково-лінійна і зростає тільки у точках послідовності (10).

Загальним розв'язком цього рівняння є квазіполіноми

$$f(x) = \sum_{q=1}^n \sum_{j=0}^{m_q} \left(A_{qj}^{(1)} \chi^j e^{\eta_q x} \cos \xi_q \chi + A_{qj}^{(2)} \chi^j e^{\eta_q x} \sin \xi_q \chi \right) \tag{13}$$

де n, m_q — цілі числа; η_q, ξ_q — дійсні числа; $A_q^{(1)}, A_q^{(2)}$ — невизначені коефіцієнти.

Задача знаходження осередненої функції, що зберігає даний набір квазіполіномів, має єдиний розв'язок [6]. Ці висновки використані нами для осереднення експериментальних профілів геоїда. Основою обчислень є побудова локальних кусково-лінійних функцій осереднення, які змінюються за квазіполіноміальними законами. Для зміщення інтервалу визначення цих функцій на один крок по осі часу достатньо внести поправки в попередні обчислення.

Процес осереднення організований за допомогою найпростіших рекурентних співвідношень, економічний з точки зору обчислювальних затрат і в силу своєї локальності добре пристосований для осереднення тривалих часових рядів.

Моделювання профілів геоїда авторами виконано за допомогою програмного пакету Excel. При побудові профілів за астрономо-геодезичними та гравіметричними даними, а також апроксимуючої осередненої поверхні геоїда враховувалися вагові коефіцієнти, як величини обернено пропорційні квадратам середньоквадратичних похибок вимірювань.

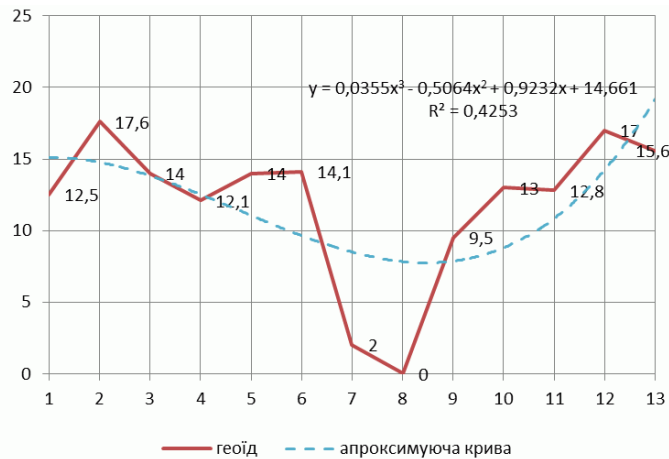


Рис. 1. Апроксимація геоїда поліномом третьої степені.

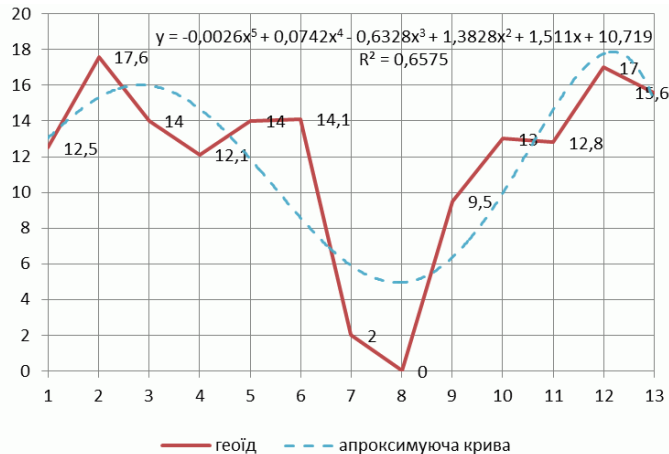


Рис. 2. Апроксимація геоїда поліномом п'ятої степені.

Враховуючи вищу точність визначення прямовисних ліній за допомогою високоточної зенітної камери (ВЗК) та засобів GPS ($\pm 0,34''$) [1] у порівнянні з точністю гравіметричних визначень ($m_{гр} = 0,7''$), астрономо-геодезична поверхня геоїда отримана точніше. При суміщенні профілів змодельованих поверхонь одержимо вагове середнє профілю геоїда. За підрахунками, точність одержаної поверхні геоїда в 1.9 разів вища, ніж при використанні лише гравіметричних даних, що дає можливість підвищити роздільну здатність гравіметричних карт.

Підставимо у формулу (2) значення $p = 2$, одержимо функцію полінома третьої степені (рис. 1). Праву частину формули (9) для полінома степені 3 оцінюємо за формулою (11), таким чином середня квадратична помилка апроксимації профілю геоїда буде

$$m_{f(x)} = \sqrt{R^2} = 0,6522$$

Подставимо у формулу (2) $p = 3$, одержимо поліном п'ятої степені (рис. 2).

Праву частину формули (9) для полінома 5 степені оцінюємо за формулою (11), таким чином середня квадратична помилка апроксимації профілю геоїда буде

$$m_{f(x)} = \sqrt{R^2} = 0,8108.$$

З вигляду апроксимуючих кривих (рис. 1 і 2) поліном степені 5 краще вписується у виміряні значення, а за значеннями середніх квадратичних помилок поліном степені 3 більш наближений до геоїда, тому що $0,6522 < 0,8108$.

Висновки. Розроблено математичний алгоритм формування моделі профілю геоїда і виконано побудову моделі за допомогою програмного пакета Excel. Задача знаходження функції, що зберігає даний набір квазіполіномів, має єдиний розв'язок [6]. Ці висновки використані для осереднення експериментальних профілів геоїда. Основою обчислень є побудова локальних кусково-лінійних функцій осереднення, які змінюються за квазіполіноміальними законами.

1. Гончаренко О.С. Високоточне визначення профілю локального геоїда за допомогою цифрової зенітної камери та засобів GPS. // Інженерна геодезія. — Вип.57. — К.: КНУБА, 2011. — С. 10–14.
2. Гончаренко О.С., Денисюк Б.І. Можливість використання астрономо-геодезичних і супутникових засобів для пошуку корисних копалин. // Інженерна геодезія. — Вип. 54. — К.: КНУБА. — С. 51–54.
3. Боровий В.О., Бурачек В.Г., Гончаренко О.С., Карпінський Ю.О. Пристрій для спостереження зірок в зеніті. Деклараційний патент на винахід UA 63575 А № 2003054111. — Бюл. № 1 від 15.01.2004.
4. Завялов Ю.С., Квасов Б.Н., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения. — К.: Наукова думка, 1986. — 544 с.
6. Гахов Ф.Д., Черских Ю.Н. Уравнение типа свертки. — М.: Наука, 1978. — 295 с.

Надійшла до редакції 15.09.2013