



УДК 523.4

Стійкість ретроградних орбіт супутників у несферичному гравітаційному полі планети

К.О. Радченко

Національний авіаційний університет

Гравітаційне поле планети в першому наближенні описується гравітаційним полем сфери. При розгляді ретроградних супутників, які обертаються по витягнутих орбітах зі значними кутами нахилу до площини Лапласа, потрібно врахувати той факт, що кожна планета має стиснення, внаслідок обертання, і її гравітаційний потенціал набагато краще описується еліпсоїдом обертання. Усі ретроградні супутники планет-гігантів, відомі на сьогоднішній день, задовольняють критеріям стійкості за Лагранжем, що свідчить про стійкість їх орбіт, незважаючи на значну оскуляцію елементів їх орбіт під впливом гравітаційного поля Сонця.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕТРОГРАДНЫХ ОРБИТ СПУТНИКОВ В НЕСФЕРИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ПЛАНЕТЫ, Радченко К.А. — Гравитационное поле планеты в первом приближении описывается гравитационным полем сферы. При рассмотрении ретроградных спутников, которые обращаются по вытянутым орбитам со значительными углами наклона к плоскости Лапласа, нужно учитывать тот факт, что каждая планета имеет сжатие, вследствие вращения, и ее гравитационный потенциал намного лучше описывается эллипсоидом вращения. Все ретроградные спутники планет-гигантов, известные на сегодняшний день, удовлетворяют критериям устойчивости по Лагранжу, что свидетельствует об устойчивости их орбит, несмотря на значительную оскуляцию элементов их орбит под влиянием гравитационного поля Солнца.

STABILITY OF RETROGRADE ORBITS OF MOONS IN THE NON-SPHERICAL PLANET'S GRAVITATIONAL FIELD, by Radchenko K.A. — The gravitational field of a planet in the first approximation by the gravitational field of the sphere. When considering the retrograde satellites that are circulating in elongated orbits at great angles to the plane of Laplace, must take into account the fact that each planet has a compression due to the rotation and its gravitational potential is much better described by an ellipsoid of revolution. All retrograde satellites of giant planets known to date, meet the criteria for persistence of Lagrange, demonstrating the stability of their orbits, in spite of the significant osculation of their orbits by the gravitational field of the Sun.

Ключевые слова: небесная механика; ретроградные спутники; устойчивость движения.

Key words: celestial mechanics; retrograde satellites; stability of motion.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Відкриті на зламі тисячоліть десятки нових ретроградних супутників планет-гігантів спонукають до дослідження стійкості їхнього орбітального руху. Після повідомлення про відкриття Скоттом Шеппардом 29 січня 2012 року ще двох далеких ретроградних супутників Юпітера [13], їх загальна кількість досягла 93 супутники, що становить 55% від 169 відомих супутників, які обертаються навколо чотирьох планет-гігантів Сонячної системи. Обертаючись навколо планети на відстанях до 0,4 (Уран) — 0,7 (Юпітер) радіуса Хілла, зі значними ексцентриситетами до 0,77 (Бестла у Сатурна) та кутами нахилу до місцевої площини Лапласа $i = 137^\circ - 177^\circ$. Після захоплення на ретроградні планетоцентричні орбіти, елементи яких оскулюють у широких межах, більшість з них продовжують рухатися фактично на межі гравітаційної сфери планети.

Все це спонукає дослідити стійкість їх орбіт на основі зібраного за останні роки масиву даних за допомогою енергетичного методу.

Будемо розглядати планету як сфероїд, тобто визначимо як впливає несферичність гравітаційного поля на стійкість орбіт в осесиметричному варіанті обмеженої задачі трьох тіл.

2. АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Питання стійкості руху тіл розглядали такі класики небесної механіки, як П.-С.Лаплас [2], Ж.Л.Лагранж [1], Дж.У.Хілл [7, 8]. Вони зробили всесторонній аналіз динаміки тіл Сонячної системи на основі закону всесвітнього тяжіння Ньютона і розробили базові поняття теорії стійкості орбітального руху небесних тіл.

Так, Лаплас у своєму п'ятитомнику «Небесна механіка» (1799–1825) розв'язав задачу вікового прискорення середнього руху Юпітера і уповільнення руху Сатурна. Він довів, що елементи руху планет лише коливаються біля свого середнього значення в певних вузьких межах. Звідси випливало, що всі нерівномірності в рухах планет — періодичні і, отже, Сонячна система стійка. Інший великий французький математик XVIII в. Ж.Л.Лагранж також прийшов до аналогічного висновку. Роботи американського

астронома і математика Хілла були зосереджені на розв'язанні задачі трьох тіл, пізніше і задачі чотирьох тіл, для обчислення орбіти Місяця навколо Землі, а також, планет — навколо Сонця.

Достатнім критерієм стійкості орбіти супутника є негативне значення його повної енергії, що, однак, не виключає можливості його падіння на планету. За Лагранжем стійкість супутника визначається виконанням співвідношення $r_1 \leq r \leq r_2$, де $r_1 >$ радіуса планети, $r_2 < \infty$, r — радіус-вектор супутника.

Орбіти ретроградних супутників (з кутами нахилу до площини екватора планети $i > 90^\circ$) більш стійкі до зовнішніх збурень, що було чисельно показано Ф.Мультоном [11], Р.Хантером [9], М.Хеноном [6] і Г.А.Чеботарьовим [5] в рамках обмеженої задачі трьох тіл. За допомогою чисельних методів вони доводять, що для прямих супутників нестійкість орбіти виникає при значенні великої півосі $a \approx \frac{1}{2}R_H$, а для ретроградних — $a \approx R_H$, де R_H — радіус гравітаційної сфери Хілла, області навколо планети, в якому вона притягує супутник сильніше, ніж Сонце [5]:

$$R_H = a \left(\mu - \frac{1}{3}\mu^2 - \frac{1}{9}\mu^3 \right), \quad (1)$$

де $\mu = \left(\frac{M}{3M_\odot} \right)^{1/3}$, M — маса планети.

Для знаходження всієї області простору, в якій можливе існування стійкого орбітального руху біля несферичної планети, необхідно знайти загальну структуру розв'язку диференціальних рівнянь руху супутника, які не можуть бути знайдені в квадратурах. Проте, для осесиметричної планети, гравітаційний потенціал зовнішньої точки можна виразити наступним чином [3]:

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\text{планети}}}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \psi) \right]$$

де G — гравітаційна стала, J_n — гравітаційні гармоніки планети, P_n — поліноми Лежандра від широти ψ (кут між екватором планети і радіус-вектором супутника r);

Тоді достатні умови стійкості, як показав К.В.Холшевников, можна виразити через два відомі інтеграли руху, за допомогою оскулюючих елементів [4]:

$$\frac{1}{2a} + R = h, \quad (2)$$

$$a(1 - e^2) \cos^2 i = H^2, \quad (3)$$

де $R = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n P_n(\sin \psi)}{r^{n+1}}$ — пертурбаційна функція; h, H — константи інтегрування; e, i, a — відповідно ексцентриситет, нахил і велика піввісь оскулюючої орбіти супутника.

Орбітальний рух ретроградного супутника є стійким, якщо існують два числа $r_1 > 1$, $r_2 < \infty$, такі, що завжди виконується співвідношення $r_1 \leq r \leq r_2$. Причому, існування верхньої межі радіус-вектора r_2 забезпечується умовою $h > 0$.

Для подальшого виводу умов стійкості, оцінимо абсолютну величину пертурбаційної функції R . Нехай $j_k = \max_{n \geq k} \{ |J_n| \}$, $J_n \rightarrow 0$. Враховуючи, що $|P_n(\sin \psi)| \leq 1$, маємо:

$$|R(r, \psi)| \leq \frac{J_2}{r^3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|J_n|}{r^{n+1}} \leq \frac{|J_2|}{r^3} + \frac{j_3}{r^4} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{|J_2|}{r^3} + \frac{j_3}{r^4(1-r^{-1})}. \quad (4)$$

Звідси слідує, що при $r \geq 1 + \delta$, (δ — будь-яке додатне число)

$$|R(r, \psi)| \leq \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1(\delta) = \frac{1}{(1+\delta)^3} \left(|J_2| + \frac{j_3}{\delta} \right).$$

З іншого боку, $|J_n| \leq \frac{\text{const}}{n^2}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, звідки

$$|R(r, \psi)| \leq \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2(\delta) = \frac{1}{(1+\delta)^3} \left[|J_2| + \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \right) \frac{j'_3}{1+\delta} \right],$$

де $j'_k = \sup_{n \geq k} \{ |J_n| n^2 \}$.

Остаточо [4]

$$|R(r, \psi)| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon(\delta) = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}. \quad (5)$$

Нехай стійкість має місце, тобто $h > 0$, $r \geq 1 + \delta$. З інтегралу (2) слідує

$$\frac{1}{2(h+\varepsilon)} \leq a \leq \frac{1}{2(h-\varepsilon)}. \quad (6)$$

Для того, щоб оскулююча орбіта була завжди еліпсом, накладемо умови

$$h > \varepsilon, \quad H^2 \leq \frac{1}{2(h-\varepsilon)}.$$

З інтегралу (3) слідує

$$\sin^2 i = 1 - \frac{H^2}{a} - e^2(1 - \sin^2 i) \leq 1 - \frac{H^2}{a}, \quad (7)$$

тобто

$$e^2 \leq 1 - \frac{H^2}{a}.$$

Оскільки в кожен момент часу, радіус-вектор r більше периапсидної відстані відповідного оскулюючого еліпса, то

$$r \geq a(1 - e) \geq a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{H^2}{a}} \right) = f(a).$$

Ця функція неперервна на проміжку $\left[H^2, \frac{1}{2(h-\varepsilon)} \right]$, причому її похідна недодатня. Тому

$$f(a) \geq f\left(\frac{1}{2(h-\varepsilon)}\right) = \frac{1}{2(h-\varepsilon)} \left(1 - \sqrt{1 - 2(h-\varepsilon)H^2} \right) = r_1.$$

Стійкість супутника, ретроградного зокрема, буде доведена, якщо $r_1 \geq 1 + \delta$, що рівносильно наступній системі нерівностей [1]:

$$\begin{cases} \varepsilon < h \leq h_2, \\ H_1^2 \leq H^2 \leq \frac{1}{2(h-\varepsilon)} \end{cases} \quad (8)$$

де

$$h_2 = \frac{1}{2(1+\delta)} + \varepsilon, \quad H_1^2 = 2(1+\delta)(1 - (1+\delta)(h-\varepsilon)), \quad \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \quad \delta \forall R_+,$$

Нерівності (4) при будь-яких δ, ε визначають можливі значення $\{h, H^2\}$ в однозв'язній області стійких рухів D (рис. 1) для кожного конкретного ретроградного супутника. Рух можливий тільки нижче гіперболи 1 і вище прямої 3. Праворуч від прямої 4, ліворуч від прямої 5, нижче прямої 2 стійкість руху потребує додаткових досліджень [4].

3. МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Серед усіх нерегулярних супутників планет-гігантів (115 на сьогоднішній день), ретроградні супутники становлять 81% і обертаються на значно більших відстанях. Використовуючи методику К.В.Холшевнікова [4] дослідимо виконання умов стійкості для орбіт усіх відомих на сьогоднішній день ретроградних супутників і покажемо, що всі вони задовольняють критерію стійкості за Лагранжем.

4. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В рамках поставленої задачі за даними [10, 12, 14–17] ми дослідили виконання умов стійкості за Лагранжем для всіх відомих на сьогодні ретроградних супутників планет-гігантів. Результати досліджень подані в наведених нижче таблицях 1–4, де пораховано константи інтегралів h і H_2 при даних значеннях $(1 + \delta)$ і показано, що їх величина знаходиться в інтервалах $(\varepsilon; h_2]$, $\left[H_1^2; \frac{1}{2(h-\varepsilon)} \right]$ відповідно.

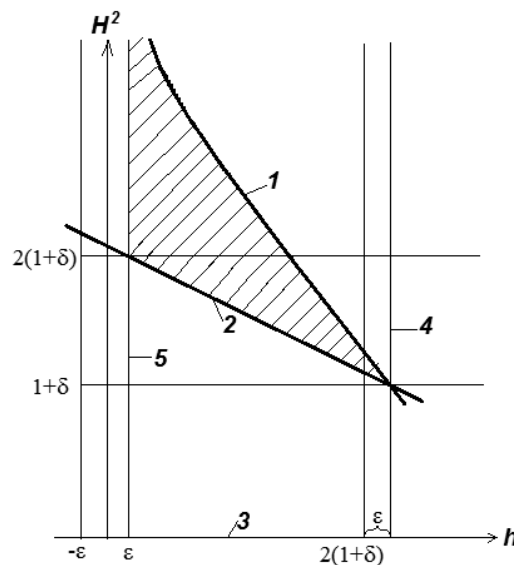


Рис. 1. Область стійких рухів

Таблиця 1. Ретроградні супутники Юпітера

Назва	Велика піввісь		Період обертання (д)	Ексцент- риситет	Нахил орбіти до локальної площини Лапласа (°)	1 + δ	$10^3 \cdot h$	$10^{10} \cdot \varepsilon$	$10^3 \cdot h_2$	H^2	H_1^2	$\frac{1}{2(h-\varepsilon)}$
	(км)	(рад. планети)										
S/2003 J 12	17 739 539	253,748	-482,69	0,4449	142,68	101,499	1,97	9,02	1,97	128,716	162,399	253,748
Еуропіє (Еваторіє, S/2001 J10)	19 088 434	273,043	-538,78	0,096	144,694	109,217	1,83	7,24	1,83	180,166	174,748	273,043
S/2003 J 3	19 621 780	280,672	-561,52	0,2507	146,363	112,269	1,78	6,67	1,78	182,324	179,63	280,672
S/2003 J 18	19 812 577	283,401	-569,73	0,1569	147,401	113,36	1,76	6,48	1,76	196,19	181,377	283,401
S/2011 J 1	20 101 000	287,527	-582,22	0,2963	162,83	115,011	1,74	6,20	1,74	239,426	184,017	287,527
S/2010 J 2	20 307 150	290,476	-588,1	0,307	150,4	116,19	1,72	6,01	1,72	198,908	185,904	290,476
Theixinoe (Тельксіноє, S/2003 J22)	20 453 753	292,573	-597,61	0,2684	151,292	117,029	1,71	5,89	1,71	208,853	187,246	292,573
Еуантіє (Еванте, S/2001 J7)	20 464 854	292,731	-598,09	0,2	143,409	117,093	1,71	5,88	1,71	181,166	187,348	292,731
Heike (Гейке, S/2003 J6)	20 540 266	293,81	-601,40	0,1374	154,586	117,524	1,70	5,81	1,70	235,173	188,038	293,81
Orthosie (Ортозіє, S/2001 J9)	20 567 971	294,206	-602,62	0,2433	142,366	117,683	1,70	5,79	1,70	173,589	188,292	294,206
Iocaste (Іокасте, S/2000 J3)	20 722 566	296,418	-609,43	0,2874	147,248	118,567	1,69	5,66	1,69	192,343	189,707	296,418
S/2003 J 16	20 743 779	296,721	-610,36	0,3184	150,769	118,688	1,69	5,64	1,69	203,055	189,902	296,721
Praixidike (Праксідіке, S/2000 J7)	20 823 948	297,868	-613,90	0,184	144,205	119,147	1,68	5,58	1,68	189,335	190,635	297,868
Напралуке (Гарпаліке, S/2000 J5)	21 063 814	301,299	-624,54	0,244	147,223	120,52	1,66	5,39	1,66	200,313	192,831	301,299
Mneme (Мнеме, S/2003 J21)	21 129 786	302,243	-627,48	0,3169	149,732	120,897	1,65	5,34	1,65	202,813	193,435	302,243
Негірпіре (Герміпіре, S/2001 J3)	21 182 086	302,991	-629,81	0,229	151,242	121,196	1,65	5,30	1,65	220,647	193,914	302,991
Thyone (Тіоне, S/2001 J2)	21 405 570	306,188	-639,80	0,2525	147,276	122,475	1,63	5,13	1,63	202,891	195,96	306,188
Apanke (Апанке)	21 454 952	306,894	-642,02	0,3445	151,564	122,758	1,63	5,10	1,63	209,144	196,412	306,894
Нерсе (Нерсе, S/2003 J17)	22 134 306	316,611	-672,75	0,2379	162,49	126,645	1,58	4,64	1,58	271,654	202,631	316,611
Aitne (Етне, S/2001 J11)	22 285 161	318,769	-679,64	0,3927	165,562	127,508	1,57	4,55	1,57	252,85	204,012	318,769
Kale (Кале, S/2001 J8)	22 409 207	320,544	-685,32	0,2011	165,378	128,217	1,56	4,48	1,56	287,979	205,148	320,544
Taugete (Тайгете, S/2000 J9)	22 438 648	320,965	-686,67	0,3678	164,89	128,386	1,56	4,46	1,56	258,686	205,417	320,965
S/2003 J 19	22 709 061	324,833	-699,12	0,1961	164,727	129,933	1,54	4,30	1,54	290,668	207,893	324,833
Chaldene (Халдене, S/2000 J10)	22 713 444	324,895	-699,33	0,2916	167,07	129,958	1,54	4,30	1,54	282,386	207,933	324,896
S/2003 J 15	22 720 999	325,004	-699,68	0,0932	141,812	130,001	1,54	4,29	1,54	199,035	208,002	325,004
S/2003 J 10	22 730 813	325,144	-700,13	0,3438	163,813	130,058	1,54	4,29	1,54	264,431	208,092	325,144
S/2003 J 23	22 739 654	325,27	-700,54	0,393	148,849	130,108	1,54	4,28	1,54	201,435	208,173	325,27
Eginome (Ерїноме, S/2000 J4)	22 986 266	328,798	-711,96	0,2552	163,737	131,519	1,52	4,15	1,52	283,277	210,431	328,798
Aoede (Аойде, S/2003 J7)	23 044 175	329,626	-714,66	0,6011	160,482	131,851	1,52	4,12	1,52	187,025	210,961	329,626
Kalichore (Каліхоре, S/2003 J11)	23 111 823	330,594	-717,81	0,2041	164,605	132,238	1,51	4,08	1,51	294,494	211,58	330,594
Kalyke (Каліке, S/2000 J2)	23 180 773	331,58	-721,02	0,2139	165,505	132,632	1,51	4,04	1,51	296,587	212,211	331,58
Sarme (Карме)	23 197 992	331,827	-721,82	0,2342	165,047	132,731	1,51	4,03	1,51	292,745	212,369	331,827
Callirrhoe (Калірроє, S/1999 J1)	23 214 986	332,07	-722,62	0,2582	139,849	132,828	1,51	4,03	1,51	181,07	212,525	332,07
Eurydome (Еврідоме, S/2001 J4)	23 230 858	332,297	-723,36	0,3769	149,324	132,919	1,50	4,02	1,50	210,887	212,67	332,297
S/2011 J 2	23 267 000	332,814	-725,06	0,3867	151,851	133,125	1,50	4,00	1,50	220,05	213,001	332,814
Pasithee (Пазїтеє, S/2001 J6)	23 307 318	333,39	-726,93	0,3288	165,759	133,356	1,50	3,98	1,50	279,353	213,37	333,39
S/2010 J 1	23 314 335	333,491	-723,2	0,32	163,2	133,396	1,50	3,97	1,50	274,334	213,434	333,491
Kore (Коре, S/2003 J14)	23 345 093	333,931	-776,02	0,1951	137,371	133,572	1,50	3,96	1,50	173,887	213,716	333,931

Cybele (Кілле, S/2003 J13)	23 396 269	334,663	-731,10	0,4115	140,148	133,865	1,49	3,93	1,49	163,84	214,184	334,663
Eukelade (Евкеладе, S/2003 J1)	23 483 694	335,913	-735,20	0,2828	163,996	134,365	1,49	3,89	1,49	285,557	214,984	335,913
S/2003 J 4	23 570 790	337,159	-739,29	0,3003	147,175	134,864	1,48	3,85	1,48	216,616	215,782	337,159
Pasiphae (Пасифе)	23 609 042	337,706	-741,09	0,3743	141,803	135,082	1,48	3,83	1,48	179,353	216,132	337,706
Hegetone (Гегемоне, S/2003 J8)	23 702 511	339,043	-745,50	0,4077	152,506	135,617	1,47	3,78	1,47	222,44	216,988	339,043
Arche (Архе, S/2002 J1)	23 717 051	339,251	-746,19	0,1492	164,587	135,7	1,47	3,77	1,47	308,269	217,121	339,251
Isonoe (Ісоноє, S/2000 J6)	23 800 647	340,447	-750,13	0,1775	165,127	136,179	1,47	3,74	1,47	307,998	217,886	340,447
S/2003 J 9	23 857 808	341,265	-752,84	0,2761	164,98	136,506	1,47	3,71	1,47	294,077	218,409	341,265
S/2003 J 5	23 973 926	342,926	-758,34	0,307	165,549	137,17	1,46	3,65	1,46	291,262	219,472	342,926
Sinope (Сінопе)	24 057 865	344,126	-762,33	0,275	153,778	137,65	1,45	3,62	1,45	255,998	220,241	344,126
Sponde (Спонде, S/2001 J5)	24 252 627	346,912	-771,60	0,4431	154,372	138,765	1,44	3,53	1,44	226,643	222,024	346,912
Autonoe (Автоноє, S/2001 J1)	24 264 445	347,081	-772,17	0,369	151,058	138,832	1,44	3,53	1,44	229,609	222,132	347,081
Megacrite (Мегакритє, S/2000 J8)	24 687 239	353,129	-792,44	0,3077	150,398	141,252	1,42	3,35	1,42	241,687	226,002	353,129
S/2003 J 2	30 290 846	433,283	-981,55	0,1882	153,521	173,313	1,15	1,81	1,15	334,851	277,301	433,283

Таблиця 2. Регроградні супутники Сатурна

Назва	Велика півнісь		Період обертання (д)	Ексцент- риситет	Нахил орбіти до локальної площини Далласа (°)	1 + δ	10 ³ · h	10 ¹⁰ · ε	10 ³ · h ₂	H ²	H ₁ ²	I 2(h-ε)
	(км)	(рад. планети)										
Rhoebe (Феоба)	12 869 700	224,539	-545,09	0,156242	173,047	89,816	2,227	14,423	2,227	215,848	143,705	224,539
Skathi (Скаді, S/2000 S 8)	15 672 500	273,440	-732,52	0,246	149,084	109,376	1,829	7,986	1,829	189,081	175,002	273,440
S/2007 S 2	16 560 000	288,925	-792,96	0,2418	176,68	115,570	1,731	6,770	1,731	271,120	184,912	288,925
Skoll (Сколл, S/2006 S 8)	17 473 800	304,868	-862,37	0,418	155,624	121,947	1,640	5,762	1,640	208,742	195,115	304,868
S/2004 S 13	18 056 300	315,031	-905,85	0,261	167,379	126,012	1,587	5,222	1,587	279,555	201,620	315,031
Greip (Греїп, S/2006 S 4)	18 065 700	315,195	-906,56	0,3735	172,666	126,078	1,586	5,214	1,586	266,805	201,725	315,195
Huytkkin (Гіткоккін, S/2004 S 19)	18 168 300	316,985	-914,29	0,3604	153,272	126,794	1,577	5,126	1,577	220,021	202,870	316,985
Jagnaxa (Ягнакса, S/2006 S 6)	18 556 900	323,765	-943,78	0,1918	162,861	129,506	1,544	4,811	1,544	284,772	207,209	323,765
Mundilfari (Мунділфарі, S/2000 S 9)	18 725 800	326,712	-956,70	0,198	169,378	130,685	1,530	4,682	1,530	303,238	209,095	326,712
S/2006 S 1	18 930 200	330,278	-972,41	0,1303	154,232	132,111	1,514	4,532	1,514	263,311	211,378	330,278
S/2004 S 17	19 099 200	333,226	-985,45	0,226	166,881	133,291	1,500	4,413	1,500	299,916	213,265	333,226
Bergelmir (Бергельмір, S/2004 S 15)	19 104 000	333,310	-985,83	0,152	157,384	133,324	1,500	4,409	1,500	277,458	213,318	333,310
Narvi (Нарві, S/2003 S 1)	19 395 200	338,391	-1008,45	0,32	137,292	135,356	1,478	4,214	1,478	164,007	216,570	338,391
Suttungr (Суттунг, S/2000 S 12)	19 579 000	341,597	-1022,82	0,131	174,321	136,639	1,464	4,096	1,464	332,448	218,622	341,597
Hati (Гаті, S/2004 S 14)	19 709 300	343,871	-1033,05	0,291	163,131	137,548	1,454	4,015	1,454	288,247	220,077	343,871
S/2004 S 12	19 905 900	347,301	-1048,54	0,396	164,042	138,920	1,440	3,898	1,440	270,704	222,273	347,301
Farbauti (Фарбауті, S/2004 S 9)	19 984 800	348,678	-1054,78	0,209	158,361	139,471	1,434	3,852	1,434	288,104	223,154	348,678
Thrymr (Трюм, S/2000 S 7)	20 278 100	353,795	-1078,09	0,453	174,524	141,518	1,413	3,687	1,413	278,632	226,429	353,795
Aegir (Еїр, S/2004 S 10)	20 482 900	357,368	-1094,46	0,237	167,425	142,947	1,399	3,577	1,399	321,307	228,715	357,368
S/2007 S 3	20 518 500	357,989	≈ -1100	0,13	177,22	143,196	1,397	3,559	1,397	351,111	229,113	357,989
Bestla (Бєстла, S/2004 S 18)	20 570 000	358,888	-1101,45	0,77	147,395	143,555	1,393	3,532	1,393	103,682	229,688	358,888
S/2004 S 7	20 576 700	359,004	-1101,99	0,5299	165,596	143,602	1,393	3,529	1,393	242,221	229,763	359,005

S/2006 S 3	21 076 300	367,721	-1142,37	0,471	150,817	147,088	1,360	3,284	1,360	218,113	235,341	367,721
Fenrir (Фенрір, S/2004 S 16)	21 930 644	382,627	-1212,53	0,131	162,832	153,051	1,307	2,915	1,307	343,295	244,881	382,627
Surtur (Сурт, S/2006 S 7)	22 288 916	388,878	-1242,36	0,368	166,918	155,551	1,286	2,776	1,286	318,989	248,882	388,878
Kari (Карі, S/2006 S 2)	22 321 200	389,441	-1245,06	0,3405	148,384	155,776	1,284	2,764	1,284	249,675	249,242	389,441
Ymir (Імір, S/2000 S 1)	22 429 673	391,334	-1254,15	0,3349	172,143	156,533	1,278	2,724	1,278	340,950	250,453	391,334
Loge (Логі, S/2006 S 5)	22 984 322	401,011	-1300,95	0,139	166,539	160,404	1,247	2,532	1,247	371,952	256,647	401,011
Forjot (Форнійот, S/2004 S 8)	24 504 879	427,540	-1432,16	0,186	167,886	171,016	1,169	2,089	1,169	394,571	273,626	427,540

Таблиця 3. Ретроградні супутники Урана

Назва	Велика піввісь		Період обертання (д)	Ексцент- риситет	Нахил орбіти до локальної площини Лапласа (°)	1 + δ	$10^3 \cdot h$	$10^{10} \cdot \varepsilon$	$10^3 \cdot h_2$	H^2	H_1^2	$\frac{1}{2(h-\varepsilon)}$
	(км)	(рад. планети)										
Francisco (Франциско)	4 276 000	169,24	-266,56	0,1459	147,459	67,696	2,954	7,25	2,954	117,711	108,313	169,239
Caliban (Калібан)	7 230 000	286,16	-579,50	0,1587	139,885	68,677	1,747	1,5	1,747	163,142	183,139	286,155
Sterpano (Стефано)	8 002 000	316,71	-676,50	0,2292	141,873	76,010	1,579	1,11	1,579	185,688	202,695	316,710
Trinculo (Трінкуло)	8 571 000	339,23	-758,10	0,22	166,252	135,692	1,474	0,901	1,474	304,580	217,108	339,231
Sycorax (Сікоракса)	12 179 000	482,03	-1283,4	0,5224	152,456	115,687	1,037	0,314	1,037	275,536	308,500	482,031
Prospero (Просперо)	16 418 000	649,81	-1992,8	0,4448	146,017	155,953	0,769	0,128	0,769	358,396	415,876	649,806
Setebos (Сетебос)	17 459 000	691,01	-2202,3	0,5914	145,883	165,842	0,724	0,107	0,724	307,971	442,245	691,008
Ferdinand (Фердинанд)	20 900 000	827,20	-2823,4	0,3682	167,346	330,879	0,604	0,062	0,604	680,740	529,407	827,199

Таблиця 4. Ретроградні супутники Нептуна

Назва	Велика піввісь		Період обертання (д)	Ексцент- риситет	Нахил орбіти до локальної площини Лапласа (°)	1 + δ	$10^3 \cdot h$	$10^{10} \cdot \varepsilon$	$10^3 \cdot h_2$	H^2	H_1^2	$\frac{1}{2(h-\varepsilon)}$
	(км)	(рад. планети)										
Triton (Тритон)	354 759	14,45	-5,877	0,000016	156,834	8,670	346,043	5436,7	576,783	12,213	12,138	14,451
Halimede (Галімеда, S/2002 N 1)	16 611 000	676,56	-1879,08	0,2646	134,101	155,610	7,390	9,393	8,211	304,727	669,798	676,564
Psamathe (Псамафа, S/2003 N 1)	48 096 000	1958,94	-9074,3	0,3809	137,39	450,557	2,552	0,387	2,836	907,143	1939,355	1958,944
Neso (Несо, S/2002 N 4)	49 285 000	2007,37	-9740,73	0,5714	132,585	327,202	2,491	1,010	2,766	619,067	1987,298	2007,372

5. ВИСНОВКИ

Проведені дослідження показали, що

1. Майже всі ретроградні супутники планет-гігантів задовольняють критеріям стійкості руху за Лагранжем в гравітаційному полі з осью симетрії, при значеннях параметра $\delta = (0,4 - 0,5)$ для великої півосі орбіти супутника, вираженої в радіусах планети.

2. Для інших далеких ретроградних супутників зі значними значеннями ексцентриситету достатні критерії стійкості виконуються при менших значеннях $\delta = (0,12 - 0,24)$, причому співвідношення $r \geq 1 + \delta$ зберігається, що свідчить про стійкість їх орбіт, незважаючи на те, що елементи орбіт оскулюють у широких межах під дією сонячного гравітаційного поля.

1. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика / Под ред. Г.Н. Дубошина. — Т.2. — М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической л-ры, 1950. — 435 с.
2. *Лаплас П.С.* Изложение системы мира. (Exposition du systeme du monde). — Л.: Наука, 1982. — 379 с.
3. *Рой А.* Движение по орбитам. — М.: Мир, 1981. — 544 с.
4. *Холшевников К.В.* Устойчивость орбитального движения спутника в поле тяготения несферической планеты // Бюлл. ИТА. — 1965. — **10**. — № 5. — С. 92–102.
5. *Чеботарёв Г.А.* Интеграл Якоби и устойчивость спутниковых систем // Бюлл. ИТА. — 1969. — **11**. — № 10. — С. 625–641.
6. *Henon M.* Numerical exploration of the restricted problem, VI. Hill's case: non periodic orbits // Astron. Astrophys. — 1970. — **9**. — P. 24–36.
7. *Hill G.W.* On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon // Acta Math. — 1886. — **8**, Is. 1. — P. 1–36.
8. *Hill G.W.* Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. — 1878. — 1, pp. 5–26, 129–147, 245–261.
9. *Hunter R.B.* Motion of satellites and asteroids under the influence of Jupiter and the sun, I. Stable and unstable satellite orbits // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1967. — **136**. — P. 245–265.
10. *Jacobson R.A.* (2008). NEP078 — JPL satellite ephemeris. Retrieved October 18, 2010.
11. *Moulton F.R.* On the stability of direct and retrograde satellites // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1914. — **75**. — P. 40–57.
12. Natural Satellites Ephemeris Service. IAU: Minor Planet Center. Retrieved 2011-01-08.
13. New Satellites of Jupiter: S/2011 J 1 and S/2011 J 2. Central Bureau Electronic Telegrams (29 January 2012).
14. *Sheppard S.S.* Outer irregular satellites of the planets and their relationship with asteroids, comets and Kuiper Belt objects // Asteroids, Comets, Meteors. — Proceedings IAU Symposium. — 2005. — № 229. — P. 319–334.
15. *Sheppard S.S.* Jupiter's Known Satellites. Department of Terrestrial Magnetism at Carnegie Institution for science. Retrieved 2008-08-28.
16. *Spitale J.N., Jacobson R.A., Porco C.C., Owen W.M., Jr.* The orbits of Saturn's small satellites derived from combined historic and Cassini imaging observations // The Astronomical Journal. — 2006. — **132**, № 2. — P. 692–710.
17. *Williams, Dr. David R.* (2007-11-23). Uranian Satellite Fact Sheet. NASA (National Space Science Data Center). Retrieved 2008-12-20.

Надійшла до редакції 15.09.2013