

УДК 524.7

Чисельне моделювання процесу прискорення заряджених частинок в турбулентній замагніченій плазмі

М.В. Сидоренко¹, В.В. Марченко²¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка²Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г. Шевченка

Приведено результати прямого чисельного моделювання процесу прискорення заряджених частинок в турбулентній замагніченій плазмі — показано резонансний характер процесу розсіяння частинок в координатному та імпульсному просторах на альфвенівській хвилі як на одному компоненті стохастичного набору хвиль різної амплітуди та довжини. Також проведено моделювання формування енергетичного спектру прискорених частинок внаслідок їх взаємодії із повним спектром МГД-хвиль, що відповідають умовам в областях гальмування релятивістських струменів в FRI-радіогалактиках.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ, Сидоренко М.М., Марченко В.В. — Приведены результаты прямого численного моделирования процесса ускорения заряженных частиц в турбулентной замагнитизированной плазме. Показано резонансный характер процесса рассеивания частиц в координатном и импульсном пространствах на альфвенской волне как на одной компоненте стохастического набора волн различной амплитуды и длины. Также проведено моделирование формирования энергетического спектра ускоренных частиц в результате их взаимодействия с полным спектром МГД-волн, соответствующих условиям в областях торможения релятивистских струй в FRI-радиогалактиках.

THE DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF CHARGED PARTICLES' ACCELERATION IN TURBULENT MAGNETIZED PLASMAS, by Sydorenko M.M., Marchenko V.V. — Our paper presents the results of the direct numerical simulation of acceleration of charged particles in turbulent magnetized plasmas. We show the resonant nature of particles scattering in the coordinate and momentum spaces on the Alfvén wave as one component of a stochastic set of waves with different amplitudes and lengths. Also the modelling the energy spectrum formation of the accelerated particles due to their interaction with the full spectrum of MHD waves that satisfy the conditions in the relativistic jet deceleration regions of FRI-radio galaxies is performed.

Ключевые слова: численное моделирование; ускорение заряженных частиц; турбулентная замагнитизированная плазма.

Key words: numerical simulation; acceleration of charged particles; turbulent magnetized plasma.

1. ВСТУП

Земля постійно бомбардується зарядженими частинками високих енергій, що приходять із космічного простору — космічними променями (КП). Космічні промені — це електрони та ядра різних елементів, що прискорюються у Всесвіті і потрапляють в атмосферу Землі з енергіями від 10^8 еВ до понад 10^{20} еВ.

Вивчення КП дає цінні відомості про електромагнітні поля в різних областях космічного простору. Інформація, “записана” і “перенесена” частинками КП на їхньому шляху до Землі, розшифровується при дослідженні варіацій космічних променів, просторово-часових змін потоку КП під впливом динамічних електромагнітних і плазмових процесів у міжзоряному й навколоземному просторі. З іншого боку, як природне джерело частинок високої енергії КП відіграють важливу роль при вивченні будови речовини й взаємодій між елементарними частинками. Енергії окремих частинок КП настільки великі, що вони ще довго будуть залишатися поза конкуренцією в порівнянні із частинками, прискореними найпотужнішими земними прискорювачами (10^{13} еВ).

Існування космічних променів відкрив Гесс у 1912 році завдяки явищу зростання ступеня іонізації повітря із віддаленням від земної поверхні. Частинки космічних променів з енергіями менше 10^{15} еВ досліджують за допомогою детекторів, розташованих на космічних апаратах, виведених за межі земної атмосфери, що дозволяє порівняно точно безпосередньо визначити енергію та тип (заряд та масове число) кожної детектованої частинки. Оскільки можливості сучасної космічної техніки не дозволяють за розумний час набрати суттєву статистику для частинок космічних променів з більшими енергіями, то їх досліджують непрямыми методами у наземних експериментах, які є чи не найбільшими фізичними експериментальними установками (площа сітки детекторів найбільшого експерименту AUGER становить ~ 3000 км²). Енергійні частинки, зокрема, космічні промені високих (із енергією більше 10^{15} еВ) та надвисоких (більше 10^{18} еВ) енергій, взаємодіючи із частинками верхньої атмосфери, породжують

каскад продуктів ядерних реакцій (такі каскади називають широкими атмосферними зливами), що досягає поверхні Землі й безпосередньо детектується у непрямому методі дослідження космічних променів високих та надвисоких енергій. Феноменологія широких атмосферних злив була розроблена Гейтлером у 1938 році, а вперше це явище спостерігав П'єр Оже із співробітниками у 1939 році, що можна назвати відкриттям космічних променів високих енергій. Перший успішний експеримент спостереження космічних променів найвищих енергій було розпочато у 1963 році Лінслі (експеримент Volcano Ranch). Найвідомішими експериментами із спостереження космічних променів високих та надвисоких енергій були Haverah Park, HiRes Prototype/MIA, Akeno, Fly's Eye, Akeno Giant Shower Array (AGASA), High Resolution Fly's Eye (HiRes). Зараз працюють Yakutsk, Pierre Auger Observatory (AUGER) та Telescope Array (TA). Детальніше про експерименти із спостереження космічних променів високих та надвисоких енергій див., наприклад, [1, 6].

На формування спостережуваного спектру КП впливають, насамперед, такі чинники, як початковий спектр генерації, магнітні поля, взаємодія КП з мікрохвильовим фоном, тощо. Дослідження спектру КП в області високих енергій грає ключову роль у відборі кандидатів на джерела та механізми прискорення частинок, а також у вивченні розподілу галактичних і позагалактичних магнітних полів. Основним джерелом космічних променів з енергіями до 10^{18} еВ вважаються галактичні залишки Наднових зір, тоді як джерелами космічних променів з енергіями понад 10^{14} еВ вважають позагалактичні джерела, такі як активні ядра галактик (АЯГ), гама-спалахи, магнетари та ін. На джерела космічних променів надвисоких енергій накладається додаткова умова достатньої близькості до Землі, оскільки пробіг космічних променів надвисоких енергій в полі реліктового випромінювання обмежується до декількох сотень Мпк у результаті ГЗК-обрізання [5, 14]. Детальніше цю проблему розглянуто в оглядах [1, 4, 6, 7].

У класі АЯГ, декілька різних типів об'єктів можна вважати кандидатами на роль прискорювачів космічних променів до надвисоких енергій. Всі вони мають центральну активну область, один або два джети, які закінчуються радіовухами. В цих областях декілька механізмів прискорення можуть діяти паралельно [12]. Зокрема, процеси Фермі першого порядку можуть відбуватися біля фронтів ударних хвиль, індуктивне прискорення — у релятивістських струменях, а стохастичне прискорення, ймовірно, відбувається у радіовухах [8, 10, 13]. Особливий інтерес представляє Cen A, радіогалактика FR I в південній півкулі, з якою, можливо, пов'язані ряд подій, виявлених установкою Auger (енергія вище $10^{19.7}$ еВ).

У цій статті ми продовжимо розглядати випадок стохастичного прискорення, яке відбувається в областях радіовух АЯГ (попередні результати див. в [15]). Як відомо, радіовуха — це сильно турбулізовані середовища, особливо в області гальмування релятивістського струменя, в яких частка густини енергії турбулентного магнітного поля, $\frac{(\delta B)^2}{B_0^2}$, може бути значною (не є малим параметром), що створює сприятливі умови для прискорення (чи доприскорення) космічних променів до надвисоких енергій [11].

2. МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОГО СЕРЕДОВИЩА

Стандартний чисельний підхід до аналізу динаміки іонів в турбулентних магнітних полях розглядає стаціонарне магнітне поле \vec{B}_0 , на яке накладено змінне магнітне поле $\delta\vec{B}$, де $\delta\vec{B}$ утворюється сумуванням великого числа випадково поляризованих поперечних альфвенівських хвиль з довжинами хвиль $\lambda_{A_n} = \frac{2\pi}{k_{A_n}}$, логарифмічно розподілених між λ_{\min} та λ_{\max} [3].

В астрофізичній плазмі внаслідок високої електропровідності електричні поля, як правило, відсутні. Однак присутність різного типу хвиль, які супроводжуються змінним магнітним полем, викликає появу фіктивного змінного електричного поля, яке може прискорювати заряджені частинки [11]. В даній статті ми розглянемо випадок випадкових однаково поляризованих (вектори електричного поля всіх випадкових хвиль лежать в одній площині) альфвенівських хвиль, тому турбулентну область в блазарах ми будемо моделювати набором хвиль з різною довжиною, амплітудою, частотою та фазою, накладених на фонове однорідне поле \vec{B}_0 .

Змінне магнітне поле $\delta\vec{B}$ задається набором N випадково спрямованих плоских хвиль, що рухаються вздовж осі ОХ в різних напрямках:

$$\delta\vec{B} = \sum_{n=1}^N \vec{A}_n e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega_n t + \varphi_0)}, \quad (1)$$

де напрямком вектора \vec{k}_n , а також фаза φ_0 задається випадковим чином [2].

Загальне число членів у сумі 1 визначається так: $N = N_k \lg[k_{\max}/k_{\min}]$, а значення k_n рівномірно розподілені по логарифмічній шкалі між $k_{\min} = 2\pi/\lambda_{\max}$ і $k_{\max} = 2\pi/\lambda_{\min}$. Бажаний спектр встановлюється

шляхом вибору показника спектру Γ при розрахунках амплітуди випадкової хвилі:

$$A_n = A_0^2 \left[\frac{k_n}{k_0} \right]^{-\Gamma} \cdot \frac{\Delta k_n}{\Delta k_0} = A_0^2 \left[\frac{k_n}{k_0} \right]^{-\Gamma+1}, \quad (2)$$

де $\Gamma = 5/3$ для спектру Колмогорова. Значення величини A_0 залежить від параметра ξ , що визначає середню густину турбулентного магнітного поля: $\langle \delta B^2 \rangle = A_0^2 \sum_n \left[\frac{k_n}{k_0} \right]^{-\Gamma+1} = \xi B_0^2$ [2].

Наявність компоненти електричного поля, паралельної до магнітного поля може значно збільшити ефективність прискорення, особливо якщо процес відбувається в нелінійному режимі ($\delta B \sim B_0$) [2]. Тим не менш, міжзоряне середовище характеризується високою провідністю. Альфвенівські хвилі не стискають середовище, через яке вони поширюються, однак надають йому певної швидкості. Ця швидкість задовольняє умові $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$. Загальну швидкість середовища запишемо через суму [11]:

$$\delta \vec{v} = \sum_{n=1}^N \delta \vec{v}_n. \quad (3)$$

Звідси рівняння для знаходження загального електричного поля буде мати такий вигляд:

$$\delta \vec{E} = -\frac{\delta \vec{v}}{c} \times \vec{B}, \quad (4)$$

де $\vec{B} = B_0 \hat{x} + \delta \vec{B}$.

3. РУХ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ТУРБУЛЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Рух зарядженої частинки з зарядом q , масою спокою m_0 , швидкістю $v = \beta c$, Лоренц-фактором $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ та імпульсом $p = mv = \gamma m_0 v$ в електричних і магнітних полях \vec{E} і \vec{B} , характерних для областей гальмування релятивістських струменів в блазарах, визначається рівняннями:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v}\vec{B}], \quad (5)$$

де c — швидкість світла, та

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \quad (6)$$

Для чисельного моделювання руху заряджених частинок в магнітних полях зручно перейти до безрозмірних змінних. За масштаб часу виберемо $t_m = \omega_H^{-1}$, де $\omega_H = \frac{qB_0}{\gamma_0 m_0 c}$ — гірчастота частинки зарядом q і масою m_0 , що влітає в магнітне поле B_0 з початковим Лоренц-фактором γ_0 . Всі відстані будемо нормувати на величину $L_m = c \cdot t_m$, де c — швидкість світла.

В результаті нескладних математичних операцій, отримаємо систему диференціальних рівнянь для знаходження зміни з часом положення та імпульсу релятивістської частинки. Для заданих початкових умов розв'язки цих рівнянь знаходяться аналітичними чи чисельними методами.

4. ПАРАМЕТРИ МОДЕЛЮВАННЯ І ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

На основі диференціальних рівнянь, про які говорилося вище, можна дослідити прискорення заряджених частинок в турбулентній плазмі, моделюючи турбулентні флуктуації магнітних та електричних полів набором випадкових МГД хвиль різної довжини та частоти, та чисельно досліджуючи траєкторії та імпульси великої кількості частинок, інжектованих в область існування змодельованої турбулентності. Головний вклад в сумарну зміну імпульсу кожної частинки складатиметься з окремих актив резонансної взаємодії частинки з турбулентними флуктуаціями, в нашому випадку — з альфвенівськими хвилями [9].

У нашому моделюванні міжзоряне середовище задається значенням фонового магнітного поля B_0 та швидкістю альфвенівських хвиль v_A . Турбулентне поле, в свою чергу, — параметрами Γ , λ_{\max} , λ_{\min} , N_k та δ (де N_k — кількість хвиль). Для кожного експерименту в область прискорення в початковий момент часу в початку координат інжектуються $N_k = 500$ протонів з однаковим значенням Лоренц-фактора γ_0 .

Рівняння руху інтегруються протягом деякого мінімального часу $t_{\min} = 10 \cdot \frac{\lambda_{\max}}{c}$. При цьому кожна частинка з набору потрапляє у свою унікальну структуру магнітного поля. Це досягається за допомогою випадкового вибору фази та напрямку альфвенівських хвиль. Як відомо, коефіцієнти дифузії є дуже інформативними даними для характеристики дифузійних процесів, оскільки їх значення не змінюється для частинок в дифузійному режимі. В даній статті ми будемо спиратися в основному на коефіцієнт дифузії в імпульсному просторі: $D_\gamma = \langle \Delta \gamma_{\text{fin}}^2 \rangle / (2t)$, де γ_{fin} — кінцеве значення Лоренц-фактора частинки, t — час розрахунку.

Ще одною характеристикою дифузійного процесу є час прискорення $t_{\text{acc}} = \gamma_0^2 / D_\gamma$, який показує, скільки часу потрібно для того, щоб частинки, інжектовані в область прискорення з енергією $\gamma_0 m_p c^2$, отримали енергію, що буде значно перевищувати початкову.

Таблиця 1. Параметри моделей.

Модель	β_a	n_p (см ⁻³)	ξ	λ_{\min} (pc)	λ_{\max} (pc)	B_0 (G)
1	0,002	10^{-4}	0,1	10^{-5}	1,0	$3 \cdot 10^{-6}$
2	0,002	10^{-4}	1,0	10^{-5}	1,0	$3 \cdot 10^{-6}$
3	0,2	10^{-8}	0,1	10^{-5}	1,0	$3 \cdot 10^{-6}$
4	0,2	10^{-8}	1,0	10^{-5}	1,0	$3 \cdot 10^{-6}$

Результати чисельного моделювання ми будемо порівнювати з теоретичними результатами, що дає квазілінійна теорія, розрахованими за формулою з роботи [11]:

$$t_{\text{acc}} \approx 50 \left(\frac{\beta_A}{7 \cdot 10^{-4}} \right)^{-2} \left(\frac{\lambda_{\max}}{10 \text{ кpc}} \right)^{2/3} \left(\frac{\varepsilon}{10^{19} \text{ eV}} \right)^{1/3} \left(\frac{\delta B^2}{B_0^2} \right)^{-1} \text{ Гуг}, \quad (7)$$

де $\varepsilon = \gamma_0 m_0 c^2$.

З метою мінімізації затрати комп'ютерного часу для отримання результатів, задамо діапазон довжин хвиль в межах від $\lambda_{\min} = 10^{-5}$ пк до $\lambda_{\max} = 1$ пк. Кількість хвиль $N_k = 25$ для всіх моделей. Швидкість альфвенівських хвиль визначається густиною протонів [2]: $\beta_A = \frac{1}{c} \frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_p n_p}}$.

В нашій роботі використовуються 4 моделі, параметри яких наведені в зведеній табл. 1. Ми розгля-

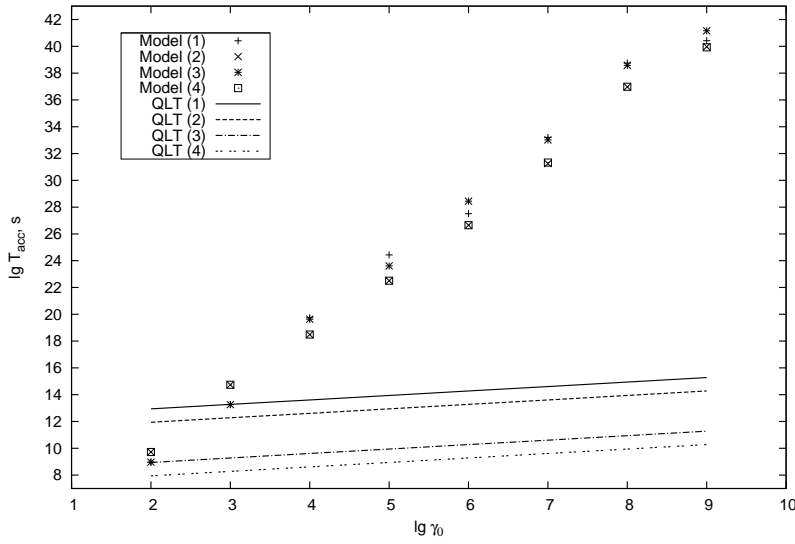


Рис. 1. Залежність часу прискорення частинок t_{acc} від початкового Лоренц-фактора частинки γ_0 для моделей (1)–(4) у тестових задачах ($\beta_A = 0$). Прямими лініями показані результати, що дає квазілінійна теорія (QLT).

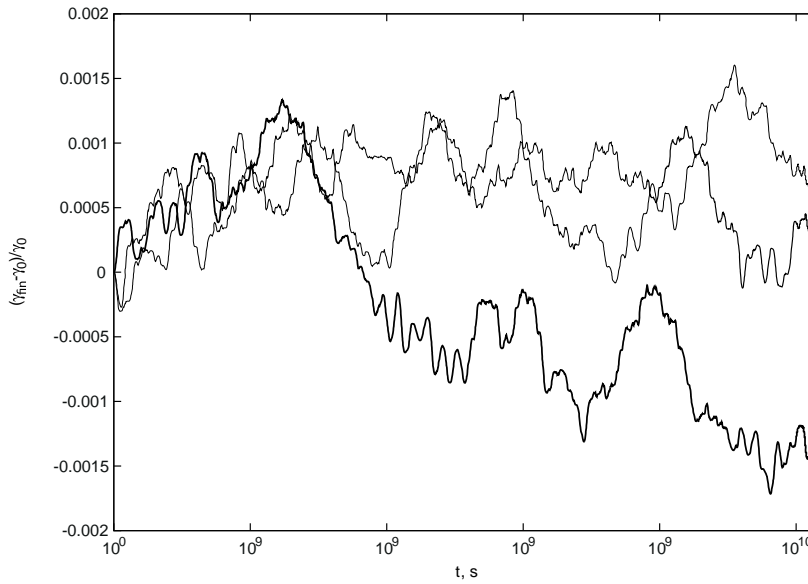


Рис. 2. Відносна зміна енергії $\frac{\Delta \gamma_{\text{fin}}}{\gamma_0}$ як функція від часу для трьох частинок, які рухаються в турбулентному середовищі (модель (1)).

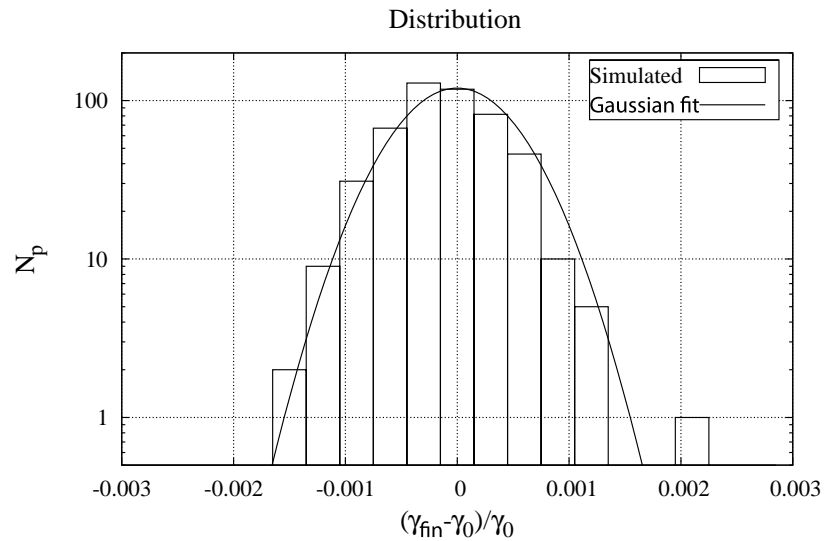


Рис. 3. Розподіл частинок за енергіями для ансамблю $N_p = 500$ протонів з однаковим початковим значенням Лоренц-фактора $\gamma_0 = 10^6$ (модель (1)).

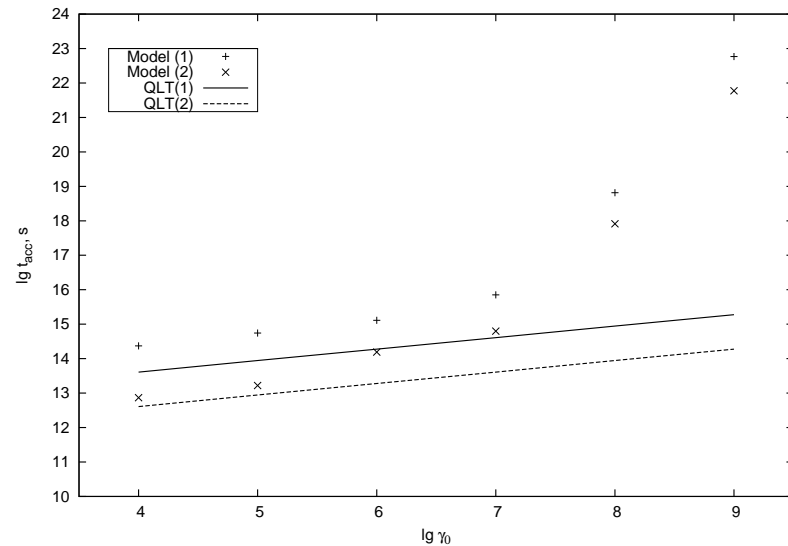


Рис. 4. Залежність часу прискорення частинок t_{acc} від початкового Лоренц-фактора частинки γ_0 для моделей 1 та 2. Прямими лініями показані результати, що дає квазілінійна теорія (QLT).

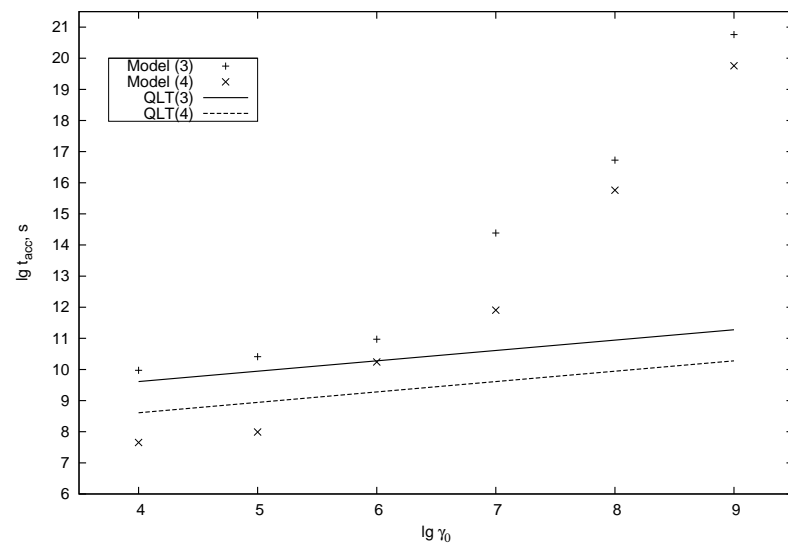


Рис. 5. Залежність часу прискорення частинок t_{acc} від початкового Лоренц-фактора частинки γ_0 для моделей 3 та 4. Прямими лініями показані результати, що дає квазілінійна теорія (QLT).

даємо нерелятивістську турбулентність ($\beta_A = 0,002$) для низьких і високих рівнів турбулентності ($\xi = 0,1$ та $\xi = 1,0$ відповідно) — моделі (1) та (2), а також релятивістську турбулентність ($\beta_A = 0,2$) для низького і високого рівнів турбулентності — моделі (3) та (4).

На рис. 1 показано результат розрахунку руху частинок у тестовому випадку, коли альфвенівські хвилі не рухаються — $\beta_A = 0$. У цьому випадку ми маємо стаціонарне магнітне поле. Тоді всі частинки рухаються із збереженням енергії, а “розповзання” їх моноенергетичного ансамблю виникає внаслідок чисельних похибок обчислень (похибки розрахунків приводять до того, що магнітне поле має додаток, який змінюється з часом і грає роль рухомих альфвенівських хвиль — тоді в полі похибок частинка також прискорюватиметься за допомогою механізму Фермі другого роду). Результати цього фіктивного прискорення зображені точками для відповідних моделей (1)–(4). З малюнка видно, що для частинок з початковим значенням Лоренц-фактора $\gamma_0 < 10^4$ похибки обчислень “прискорюватимуть” частинку швидше, ніж взаємодія з реальними турбулентними збуреннями в моделях (1)–(4). Тому частинки з $\gamma_0 < 10^4$ у нашому моделюванні використовуватися не будуть.

Як можна бачити з рис. 2, зміна енергії однієї окремої частинки, що характеризується величиною $\frac{\Delta\gamma_{fin}}{\gamma_0}$, має чисто випадковий характер. За умов турбулентного прискорюючого поля, розподіл за енергіями для ансамблю частинок, введених з однаковим початковим Лоренц-фактором стає нормальним (гаусівським) — рис. 3. За цим розподілом можна оцінити коефіцієнт дифузії моноенергетичного ансамблю частинок в імпульсному просторі D_γ , який і буде характеризувати стохастичне прискорення в турбулентному магнітному полі. На рис. 4–5 показані залежності часу прискорення частинок $t_{acc} = \gamma_0^2/D_\gamma$ від початкового Лоренц-фактора. Як видно з малюнків, у випадку низького рівня турбулентності експериментальні дані добре узгоджуються з результатами квазілінійної теорії по порядку величини. Слід зазначити, що при високих початкових енергіях ($\gamma_0 = 10^7 \sim 10^9$) час прискорення сильно відхиляється від теоретичного результату. Це пояснюється тим, що гірорадіус цих частинок перевищує масштаб, в якому присутні відповідні їм резонансні хвилі. В той же час для моделей (2) та (4), які характеризуються вищим рівнем турбулентності, в порівнянні з моделями (1) та (3), відхилення експериментальних значень від теоретичних також значне — час прискорення стає меншим, а, відповідно, ефективність прискорення зростає. Цей результат має важливе значення для теорії прискорення космічних променів механізмом Фермі другого роду в турбулентних середовищах, оскільки в околах активних ядер галактик слід очікувати сильно розвинутої слабोरелятивістської турбулентності, де квазілінійне наближення незастосовне, і тільки пряме чисельне моделювання може дати кількісну картину прискорення космічних променів в цих об’єктах.

5. ВИСНОВКИ

Активні ядра галактик відносять до найімовірніших джерел космічних променів найвищих енергій. Релятивістські потоки плазми, колімовані в струмені, здатні генерувати ударні хвилі, які ефективно прискорюють заряджені частинки механізмом Фермі першого роду. Однак галактики FR II з ознаками потужних ударних хвиль знаходяться надто далеко, щоб забезпечити спостережуваний потік космічних променів надвисоких енергій. Тому останнім часом значна увага приділяється дослідженню прискорення космічних променів в галактиках типу FR I, які розміщені достатньо близько, однак їхні струмені менш потужні та гальмуються поступово. Область гальмування повинна бути сильно турбулентною і мати умови, сприятливі для прискорення космічних променів механізмом Фермі другого роду, причому роль розсіюючих центрів відводиться турбулентним флуктуаціям та МГД хвилям. В нашій роботі приведені результати прямого чисельного моделювання процесу прискорення космічних променів в умовах сильно збудженої слабोरелятивістської турбулентності, де квазілінійна теорія незастосовна, і показано, що в умовах сильної турбулентності ефективність прискорення суттєво зростає в порівнянні з квазілінійним випадком слабкої турбулентності. Цей факт суттєво підвищує можливість прискорення космічних променів найвищих енергій в радіогалактиках типу FR I. Що важливо, до цього типу відносяться близькі до нас радіогалактики Cen A та Virgo A. Тому в наступній роботі ми розглянемо прискорення космічних променів в умовах, що відповідають областям гальмування струменів в цих галактиках.

1. Bergman D., Belz J. Topical Review: Cosmic rays: the Second Knee and beyond // J. of Phys. G: Nucl. and Part. Phys. — 2007. — **34**, Is.10. — P. R359–R400.
2. Fatuzzo M., Melia F. Assessing the Feasibility of Cosmic-Ray Acceleration by Magnetic Turbulence at the Galactic Center // Ap.J. — 2012. — **750**, Is.1. — article id.21.
3. Fatuzzo M., Melia F., Todd E., Adams F.C. High-energy Cosmic-ray Diffusion in Molecular Clouds: A Numerical Approach // Ap.J. — 2010. — Vol.725, Is.1. — P. 515–527.
4. Fraschetti F. On the acceleration of ultra-high-energy cosmic rays // Philosoph. Trans. of the Royal Soc. A: Math., Phys. and Engin. Sci. — 2008. — **366**, Is.1884. — P. 4417–4428.
5. Greisen K. End to the Cosmic-Ray Spectrum? // Phys. Rev. Lett. — 1966. — **16**, Is.17. — P. 748–750.

6. *Halzen F.* The Search for the Sources of the Cosmic Rays One Century after their Discovery // Invited talk at XVI International Symposium on Very High Energy Cosmic Ray Interactions (ISVHECRI 2010), Batavia, Illinois, USA 28 June 2 July 2010.
7. *Hörandel J.* The origin of galactic cosmic rays // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. Sect. A. — 2008. — **588**, Is.1–2. — P. 181–188.
8. *Lyutikov M., Ouyed R.* Inductive acceleration of UHECRs in sheared relativistic jets // Astropart. Phys. — 2007. — **27**, Is.6. — P. 473–489.
9. *Melrose B.* Acceleration Mechanisms // Encyclopedia of Complexity and Systems Science. — 2009. — Part 1. — P. 21–42.
10. *Ostrowski M.* Acceleration of ultra-high energy cosmic ray particles in relativistic jets in extragalactic radio sources // Astronomy and Astrophysics. — 1998. — **335**. — P. 134–144.
11. *O’Sullivan S., Reville B., Taylor A.M.* Stochastic particle acceleration in the lobes of giant radio galaxies // Mon. Not. of the Royal Astron. Soc. — 2009. — **400**, Is.1. — P. 248–257.
12. *Rieger F., Bosch-Ramon V., Duffy P.* Fermi acceleration in astrophysical jets // Ap. and SS. — 2007. — **309**, Is.1–4. — P. 119–125.
13. *Rieger F., Duffy P.* Shear Acceleration in Relativistic Astrophysical Jets // ApJ. — 2004. — **617**, Is.1. — P. 155–161.
14. *Zatsepin G.T., Kuzmin A.* Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays // JETP. — 1966. — **4**. — P. 78.
15. *Сидоренко М., Гнатик Б.* Стохастичне прискорення космічних променів в області гальмування релятивістських струменів в блазарах // Вісник Астрономічної Школи. — 2011. — **7**, № 1–2. — С. 108–113.

Надійшла до редакції 1.10.2012