Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 8 • № 1 • 2012 С. 66 – 70

УДК 530.12

Космологическая модель с идеальной жидкостью

А.А. Егурнов, М.П. Коркина

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

Рассмотрена однородная анизотропная космологическая модель с идеальной жидкостью. Анализ инвариантов тензора пространственной кривизны показал, что инварианты зависят только от $\zeta(t)$ и не имеют сингулярностей. Для построения модели выбираются следующие начальные условия: 1) В качестве начальных условий выбирается Большой взрыв, как и в моделях Фридмана. Также в начальный момент времени выбирается ультрарелятивистское уравнение состояния. 2) В качестве конечных условий $t \to \infty$ рассматриваемая метрика переходит в метрику Робертсона–Милна.

КОСМОЛОГІЧНА МОДЕЛЬ З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ, Єгурнов О.О., Коркіна М.П. — Розглянута однорідна анізотропна космологічна модель з ідеальною рідиною. Аналіз інваріантів тензора просторової кривизни показав, що інваріанти залежать тільки від довільної функції $\zeta(t)$ та не мають сингулярностей. Побудова моделі базується на наступних граничних умовах: 1) У якості початкових умов обирається Великий вибух, як і у моделей Фрідмана. Також у початковий момент часу обирається ультрарелятивістське рівняння стану. 2) У якості кінцевих умов $t \to \infty$ розглянута метрика переходить у метрику Робертсона–Мілна.

COSMOLOGICAL MODEL WITH PERFECT FLUID, by Iegurnov O.O., Korkina M.P. — The cosmological model with perfect fluid is considered. We suppose that this model is homogeneous and anisotropic. The analysis of the spatial curvature tensor invariants showed that they have no singularities and depends on arbitrary function $\zeta(t)$ and have no singularities. Construction of the model is based on the following boundary conditions: 1) As initial conditions we choose the Big Bang, the corresponding Friedman model. We also suppose that at initial moment of time we have ultrarelativistic state equation. 2) When $t \to \infty$ describing metric turns into Robertson–Milne metric.

Ключевые слова: космологическая модель; тензор кривизны пространства.

Key words: cosmological model; spatial curvature tensor.

1. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассматриваются однородные анизотропные сферически симметричные космологические модели с уравнением состояния идеальной жидкости. Рассматриваемая метрика имеет сферическую симметрию, что в общем виде может быть записано следующим образом:

$$ds^2 = e^{\nu(R,t)}dt^2 - e^{\lambda(R,t)}dR^2 - r^2(R,t)d\sigma^2. \tag{1}$$

Тензор энергии-импульса соответствует однородной анизотропной идеальной жидкости: $T_0^0 = \varepsilon(t)$, $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p(R,t)$. Применяя метод массовой функции [2], уравнения Эйнштейна принимают вид:

$$\begin{cases} \dot m = -r^2\dot r p, \\ m' = r^2 r'\varepsilon(t), \\ 2\dot r' = \dot r\Phi' + r'\dot\Omega, \\ 2\dot m' = \dot m\Phi' + m'\dot\Omega - 4prr'\dot r, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$m(R,t) = r(R,t)(1 + e^{\Phi} - e^{\Omega}), \tag{3}$$

$$e^{\Phi} = e^{-\nu}\dot r^2, \quad e^{\Omega} = e^{-\lambda}r'^2, \tag{4}$$

где точка обозначает производную по времени, штрих — по пространственной координате. Интегрирование второго уравнения системы (2) дает:

$$m = \frac{1}{3}\varepsilon(t)r^3. \tag{5}$$

Далее вычисляем производную по времени и по пространственной координате:

$$\dot m = r^2\dot r\varepsilon + \dot\varepsilon\frac{r^3}{3}, \tag{6}$$

$$\dot m' = \varepsilon(2rr'\dot r + r^2\dot r') + \dot\varepsilon r^2 r'. \tag{7}$$

Выразив в четвертом уравнении системы (2) давление через массовую функцию,

$$2\dot m' = \dot m\Phi' + m'\dot\Omega + 4\dot m\frac{r'}{r}, \tag{8}$$

и подставив вместо производных от массовой функции их соответствующие значения, получим:

$$2\dot{\varepsilon}r^2r' + 4\varepsilon r r'\dot{r} + 2\varepsilon r^2\dot{r}' = (r^2\dot{r}\varepsilon + \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}r^3)\Phi' + r^2r'\varepsilon\dot{\Omega} + 4r\dot{r}r'\varepsilon + \frac{4}{3}\dot{\varepsilon}r^2r', \tag{9}$$

разделив обе части (9) на $r^2\varepsilon$ и произведя необходимые сокращения, имеем:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\left(2r' - \frac{r}{3}\Phi' - \frac{4}{3}r'\right) = 0. \tag{10}$$

Отсюда следует равенство нулю выражения в скобке, что дает следующее уравнение:

$$\frac{2r'}{r} = \Phi'. \tag{11}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем: $\Phi = \ln r^2\Psi^2(t)$ или $e^{\Phi} = r^2\Psi^2(t)$, где $\Psi(t)$ — произвольная функция интегрирования. Далее подставим (11) в предпоследнее уравнение системы (2):

$$2\dot{r}' = \dot{r}\frac{2r'}{r} + r'\dot{\Omega}, \tag{12}$$

$$\frac{2\dot{r}'}{r'} = 2\frac{\dot{r}}{r} + \dot{\Omega}, \tag{13}$$

$$\ln r'^2 = \ln r^2 + \Omega + \ln k'^2(R), \tag{14}$$

где $k(R)$ — произвольная функция интегрирования, $k'(R)$ здесь используется для удобства последующих вычислений. Далее получаем выражение для Ω.

$$\Omega = \ln\frac{r'^2}{r^2k'^2}, \tag{15}$$

$$e^{\Omega} = \frac{r'^2}{r^2k'^2}. \tag{16}$$

Из (4) получаем выражения для e^{ν} и e^{λ}:

$$e^{\nu} = \frac{\dot{r}^2}{r^2\Psi^2}, \tag{17}$$

$$e^{\lambda} = r^2k'^2. \tag{18}$$

Таким образом, получается решение свободное от сдвига (10), (11), соответствующее моделям с уравнением состояния идеальной жидкости [1,5,7]:

$$ds^2 = \frac{\dot{r}^2}{r^2\Psi^2(t)}dt^2 - r^2(k'^2(R)dR^2 + d\sigma^2). \tag{19}$$

Для того, чтобы получить явное выражение для $r(R,t)$, перепишем (3) с учетом (5), (11) и (16):

$$m = r\left(1 + r^2\Psi^2 - \frac{r'^2}{r^2k'^2}\right), \tag{20}$$

$$\frac{r^2\varepsilon}{3} = 1 + r^2\Psi^2 - \frac{r'^2}{r^2k'^2}, \tag{21}$$

$$\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r^4\Psi^2 - \frac{r^4\varepsilon}{3}}} = k', \tag{22}$$

$$\int\frac{dr}{\sqrt{r^2 + r^4\Psi^2 - \frac{r^4\varepsilon}{3}}} = k + \eta(t), \tag{23}$$

Для удобства используется замена:

$$\Psi^2(t) - \frac{1}{3}\varepsilon(t) = \zeta(t), \tag{24}$$

$$\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2\zeta + 1}} = k + \eta, \tag{25}$$

Интеграл берется в элементарных функциях:

$$r = 2(e^{-k-\theta} - \zeta e^{k+\theta})^{-1}, \tag{26}$$

где $e^{\theta(t)} = \sqrt{|\zeta(t)|}e^{\eta}$. В зависимости от знака ζ (26) принимает вид:

$$\begin{aligned} \zeta > 0: &\quad \frac{1}{r} = \sqrt{\zeta}\,\sinh\bigl(k(R) + \theta(t)\bigr), \\ \zeta < 0: &\quad \frac{1}{r} = \sqrt{-\zeta}\,\cosh\bigl(k(R) + \theta(t)\bigr), \\ \zeta = 0: &\quad \frac{1}{r} = e^{k(R)+\eta(t)}. \end{aligned} \tag{27}$$

В отличие от модели Фридмана, где существуют три отдельных не переходящих друг в друга решения (для плоского, открытого и закрытого миров), для рассматриваемой модели существует одно общее решение, а тип пространства определяется функцией ζ.

Однородное решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости в сопутствующей системе координат было получено Кустанхеймо в 1947 г. [6, 7].

2. ЗАВИСИМОСТЬ ИНВАРИАНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВИЗНЫ ОТ ВРЕМЕНИ. СМЫСЛ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Однородное сферически симметричное решение с уравнением состояния идеальной жидкости обладает интересным свойством: инварианты тензора кривизны [3, 4], построенного для пространственной части метрики (19) зависят от произвольной функции $\zeta(t)$. В частности, скалярная кривизна:

$$R = 6\zeta(t), \tag{28}$$

инвариант Кречмана:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} = 12\zeta^2(t). \tag{29}$$

Таким образом можно считать $\zeta(t)$ функцией, которая определяет пространственную кривизну. Тот факт, что мир является плоским, открытым или закрытым полностью определяется знаком $\zeta(t)$.

$k(R)$ может быть выбрано любым удобным образом, т.к. его выбор определяет только лишь переход в другую систему координат. В метрике (19) замена $k'^2(R)\,dR^2 = dK^2$ есть ничто иное как переход от R к K. Вообще, эту пространственную переменную можно выбрать так, что пространственная часть решения (19) будет конформна пространственной части любого из трех однородных и изотропных пространств:

$$dk^2 + d\sigma^2 = \frac{1}{\sinh^2(R_1)}\left(dR_1^2 + \sinh^2(R_1)d\sigma^2\right) = \frac{1}{\sin^2(R_2)}\left(dR_2^2 + \sin^2(R_2)d\sigma^2\right) = \frac{1}{R_3^2}\left(dR_3^2 + R_3^2 d\sigma^2\right). \tag{30}$$

$\Psi(t)$ имеет смысл критической плотности энергии (соответствующей плоскому пространству). Действительно, в случае, когда пространственная скалярная кривизна равна нулю и согласно (28) $\zeta(t) = 0$. Из (24) следует, что

$$\Psi^2(t) = \frac{1}{3}\varepsilon_c(t). \tag{31}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Исследования инвариантов пространственной кривизны метрики (23) показали, что пространственная кривизна полностью зависит от знака $\zeta(t)$:

$\zeta < 0$ — положительная кривизна,

$\zeta = 0$ — нулевая кривизна,

$\zeta > 0$ — отрицательная кривизна;

и инварианты кривизны не имеют сингулярностей. Поэтому решение (19) может описывать как модели с постоянной пространственной кривизной, так и с переменной. Особый интерес представляет изучение моделей с переменной пространственной кривизной. В частности интересно: возможно ли существование таких моделей в принципе, и если возможно, то при каких условиях. В рамках поставленного вопроса предлагается toy-модель Вселенной с переменной пространственной кривизной

Метрика (19) содержит ряд произвольных функций зависящих от пространственной координаты и от времени: $k(R)$, $\eta(t)$, $\Psi(t)$, $\varepsilon(t)$. Судя по (30) вид пространственной переменной $k(R)$ определяется из соображений удобства дальнейших вычислений. Для определения остальных неизвестных функций необходимо задать начальные и конечные условия. Помимо этого, существует некий момент времени, когда пространственная кривизна равна нулю. Это обстоятельство так же может служить ограничением на искомые функции.

Выберем, для определенности, ультрарелятивистское уравнение состояния в начальный момент времени:

$$p(0,t) = \frac{1}{3}\varepsilon(t). \tag{32}$$

Как и для моделей Фридмана, выберем начальное состояние — Большой взрыв. Из системы уравнений (2) с учетом (3), (11), (13) следует уравнение, связывающие давление и плотность энергии:

$$p(R,t) = -\varepsilon(t) - \frac{\dot{\varepsilon}(t)r(R,t)}{3\dot{r}(R,t)}. \tag{33}$$

Когда $R \to 0$ с учетом (26), (32), (33) получаем:

$$4\varepsilon = \frac{\dot{\varepsilon}}{3}\cdot\frac{e^{k+\theta} - \zeta e^{-k-\theta}}{\dot{\theta}(e^{k+\theta} + \zeta e^{-k-\theta}) - \dot{\zeta}e^{-k-\theta}}, \tag{34}$$

выбрав $k(R) = \ln\coth\frac{R}{2}$, получаем:

$$\dot{\theta}e^{2\theta} + \frac{\dot{\theta}\zeta}{\coth^2\left(\frac{R}{2}\right)} - \frac{\dot{\zeta}}{\coth^2\left(\frac{R}{2}\right)} = -\frac{\dot{\varepsilon}\zeta}{4\varepsilon\coth^2\left(\frac{R}{2}\right)} + \frac{\dot{\varepsilon}e^{2\theta}}{4\varepsilon}, \tag{35}$$

при $R \to 0$ следует, что $\coth(\frac{R}{2}) \to \infty$, тогда (35) приобретает вид

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\varepsilon}}{4\varepsilon}. \tag{36}$$

Плотность энергии выбираем такую же как и во фридмановских моделях:

$$\varepsilon(t) = \frac{a_r^2}{t^2(2a_r+t)^2}, \tag{37}$$

где a_r — постоянная излучения, с учетом (36), (37) $\theta(t)$ в начальный момент времени определяется с точностью до константы:

$$e^{\theta} = \sqrt{\frac{a_r}{t^2(2a_r+t)^2}} + A, \tag{38}$$

Для удобства выбираем $A = 0$.

В качестве конечных условий $t \to \infty$ выберем переход модели к пустому пространству. Для удобства рассмотрим переход метрики (19) к метрике Робертсона–Милна. Этот выбор связан с тем, что пустое пространство, описываемое метрикой Робертсона–Милна, имеет отрицательную пространственную кривизну, что удобно для рассматриваемой нами модели.

Метрика (19), на бесконечности переходят в метрику Робертсона–Милна, при условии, что

$$\Psi \to \frac{1}{\tau}, \tag{39}$$

$$\eta \to 0. \tag{40}$$

Рассматривается переход для метрики с отрицательной пространственной кривизной. Запишем (17) и (18) с учетом (27):

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2\Psi^2} = \frac{\left(\frac{\dot{\Psi}}{\Psi}\sinh(k+\eta) + \dot{\eta}\cosh(k+\eta)\right)^2}{\zeta\sinh^2(k+\eta)}, \tag{41}$$

$$r^2 k'^2 = \frac{k'^2}{\zeta\sinh^2(k+\eta)}. \tag{42}$$

Действительно, при граничных условиях $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ и при условиях перехода (39), (40) для $k(R) = \ln\coth(\frac{R}{2})$

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2\Psi^2} = \frac{\left(\frac{\dot{\Psi}}{\Psi}\sinh(k+\eta) + \dot{\eta}\cosh(k+\eta)\right)^2}{\zeta\sinh^2(k+\eta)} \to 1$$

$$r^2 k'^2 = \frac{k'^2}{\zeta\sinh^2(k+\eta)} \to \tau^2.$$

Таким образом метрика (19) переходит в метрику Робертсона–Милна:

$$ds^2 = d\tau^2 - \tau^2\left(d\chi^2 + \sinh^2(\chi)\,d\sigma^2\right). \tag{43}$$

Тогда с учетом (39), (31), (26):

$$\Psi(t) = \frac{B}{t}, \tag{44}$$

$$e^{\theta} = \sqrt{\Psi^2 - \frac{1}{3}\varepsilon}. \tag{45}$$

Константа B может быть определена как момент перехода модели в состояние с нулевой пространственной кривизной: $\zeta(t) = 0$, $t = t_c$. Тогда, согласно (24)

$$\frac{B}{t_c} = \frac{a_r^2}{3t_c^2(2a_r+t_c)^2}, \tag{46}$$

$$\Psi(t) = \frac{a_r}{\sqrt{3}(2a_r+t_c)t}. \tag{47}$$

Зависимость $\zeta(t)$ (напомним, что ζ отвечает за пространственную кривизну) с учетом (37), (47) принимает вид:

$$\zeta(t) = \frac{a_r^2}{3t^2}\left(\frac{1}{(2a_r+t_c)^2} - \frac{1}{(2a_r+t)^2}\right). \tag{48}$$

Для удобства графической интерпритации (48) обезразмеривается:

$$\zeta(t)\,t_c^2 = \frac{b^2}{3x^2}\left(\frac{1}{(2b+1)^2} - \frac{1}{(2b+x)^2}\right), \tag{49}$$

где $b = \frac{a_r}{t_c}$ и $x = \frac{t}{t_c}$. На рис. 1 построены зависимости $\zeta(t)\,t_c^2$ от $\frac{t}{t_c}$.

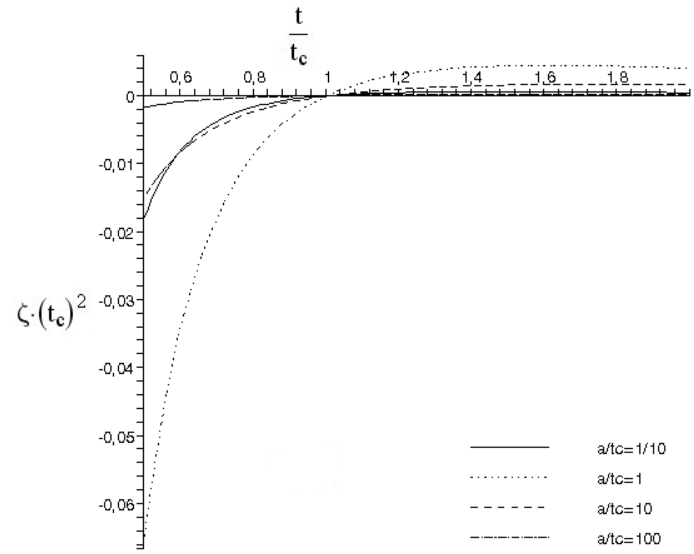

Рис. 1. Зависимость $\zeta(t)\, t_c^2$ от $\frac{t}{t_c}$. График построен для значений $\frac{t}{t_c} \in (0{,}5; 2)$

Согласно начальным условиям, в нуле — сингулярность (Большой взрыв). Далее кривизна непрерывно меняется со временем изменяя свой знак. Модель начинает эволюционировать с положительной пространственной кривизной ($\zeta < 0$), далее наступает момент $t = t_c$ в который кривизна принимает значение нуль ($\zeta = 0$), после чего кривизна становится отрицательной ($\zeta > 0$), причем с течением времени её значение приближается к нулю. Таким образом модель Вселенной с уравнением состояния идеальной жидкости может иметь переменную пространственную кривизну.

1. *Бурликов В.В., Коркина М.П.* Однородные сферические конфигурации переменной пространственной кривизны // Известия вузов. Физика. — 1998. — № 3. — С. 12–17.
2. *Коркина М.П.* Уравнения Эйнштейна для жидкой сферы и массовая функция // Известия вузов. Физика. — 1995. — № 4. — С. 90–95.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973. — С. 343.
4. *Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж.* Гравитация. Т.1. — М.: Мир, 1977. — С. 273.
5. *Boots S.V., Burlikov V.V., Korkina M.P.* Model of a fluid sphere with the ultrarelativistic equation of state at the center // Gravitation and Cosmology. — 1996. — **2**, № 2(6). — P. 167–173.
6. *Cook M.W.* On a Class of Exact Spherically Symmetric Solutions to the Einstein Gravitation Field Equations // Aust. J. Phys. — 1975. — **28**. — P. 413–422.
7. *Kramer D., Stephani H., Mac-Callum M.A.H., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge. — 1980. — P.416.

Поступила в редакцию 25.06.2012