Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 8 • № 1 • 2012 С. 31 – 33

УДК 524.8

# Обобщение решения Толмена–Бонди

**М.П. Коркина, Е.М. Коптева**

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

*В работе найдено обобщение решения Толмена–Бонди, на основе которого построена модель шварцшильдовой черной дыры во вселенной с пылевидной материей. Проанализирован ряд решений, предлагаемых для описания подобной модели. Показано, что такие решения не могут описывать черную дыру, погруженную в пыль.*

*УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ТОЛМЕНА–БОНДІ, Коркіна М.П., Коптєва О.М. — В даній роботі знайдено узагальнення розв'язку Толмена–Бонді, на основі якого побудовано модель шварцильдової чорної діри у всесвіті, що заповнений пилоподібною матерією. Проаналізовано ряд розв'язків, запропонованих для опису такої моделі. Показано, що ці розв'язки не можуть описувати чорну діру, що занурена у пил.*

*GENERALIZATION OF TOLMAN–BONDI SOLUTION, by Korkina M.P., Kopteva E.M. — In this work the model of Schwarzschild black hole in the universe filled by dust-like matter is built on the basis of found generalization of Tolman–Bondi solution. A set of possible solutions for this model was analyzed with help of mass function method and it was shown that proposed solutions cannot describe the model under consideration.*

**Ключевые слова:** шварцшильдовская модель черной дыры; аналитические решения.

**Key words:** Schwarzschild's model of black hole; analytical solutions.

Проблема построения модели черной дыры в пространстве, которое не является пустым, а заполнено материей, представляет большой интерес как в физике черных дыр (при изучении динамики горизонта и термодинамики черных дыр), так и при изучении связи между расширением Вселенной и физикой локальных объектов — звезд, галактик и черных дыр.

Одна из первых работ этого направления — работа Мак Витти [1], который получил решение в виде

$$ds^2 = \left[\frac{1-\frac{r_g\mu(t)}{4R}}{1+\frac{r_g\mu(t)}{4R}}\right]^2 dt^2 - \frac{1}{\mu^2(t)}\left[1+\frac{r_g\mu(t)}{4R}\right]^4 (dR^2+R^2d\sigma^2), \qquad (1)$$

где $r_g = \frac{2\gamma M}{c^2}$ — радиус Шварцшильда.

При $\mu(t) = \mathrm{const} = 1$ выражение (1) представляет собой метрику Шварцшильда, выраженную в изотропных координатах. При $r_g = 0$ метрика (1) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\mu(t)^2}(dR^2+R^2d\sigma^2). \qquad (2)$$

Решение (2) можно рассматривать как модель Фридмана для случая плоского пространства; в зависимости от выбора функции $\mu(t)$ это может быть как пылевидная модель, так и модель с давлением. Мак Витти предложил своё решение в качестве модели частицы в расширяющейся вселенной. В работах [2, 3] было показано, что это решение не может описывать точечную частицу во вселенной, но, возможно, может описать черную дыру.

Чтобы выяснить физический смысл решения (1) применим метод массовой функции. Для сферически симметричного интервала общего вида

$$ds^2 = e^{\nu(R,t)}dt^2 - e^{\lambda(R,t)}dR^2 - r^2(R,t)\,d\sigma^2$$

массовая функция имеет вид

$$m(R,t) = r(R,t)\left(1+e^{-\nu(R,t)}\dot{r}^2 - e^{-\lambda(R,t)}r'^2\right).$$

Штрих означает дифференцирование по координате $R$, а точка — по $t$. Здесь и далее скорость света $c=1$. Уравнения Эйнштейна через массовую функцию в нашем случае записываются как

$$m' = \varepsilon r^2 r'; \qquad \dot{m} = -pr^2\dot{r}; \qquad 2\dot{r}' = \nu'\dot{r} + \dot{\lambda}r'; \qquad 2\dot{m}' = m'\dot{r}\frac{\nu'}{r'} + \dot{m}r'\left(\frac{\dot{\lambda}}{\dot{r}}+\frac{4}{r}\right). \qquad (3)$$

Получим вид массовой функции для решения (1):

$$m(R,t) = r_g + R^3\frac{\dot{\mu}^2(t)}{\mu^5(t)}\left(1+\frac{r_g}{4R}\mu(t)\right)^6 \qquad (4)$$

откуда при $\dot{\mu}(t)=0$ имеем $m=r_g$, то есть массовую функцию для решения Шварцшильда, а при условии $r_g=0$ и $\frac{\dot{\mu}^2(t)}{\mu^5(t)}=\mathrm{const}=\frac{1}{a_0^2}$ — массовую функцию для решения Фридмана в случае пылевидной материи. Из (3) и (4) получим плотность энергии и давления для метрики (1)

$$\varepsilon(t)=3\frac{\dot{\mu}^2(t)}{\mu^2(t)}; \qquad p(R,t)=6\mu^3(t)\frac{r_g/4R}{(r_g/4R)-1}. \tag{5}$$

Из выражений для массовой функции (4), плотности энергии и давления (5) сразу же видно, что решение (1) не может описывать ни точечную частицу, ни черную дыру в пространстве Фридмана (давление зависит и от $R$ и от $t$).

Решения, полученные в работах [4–6], фактически являются некоторыми модификациями решения (1). Так, решение из [4] — это решение (1), в котором метрические коэффициенты перед $dR^2$ и $d\sigma^2$ умножаются еще на некоторую функцию времени, а решение из [5, 6] — это решение (1), в котором $\mu(t)=\mathrm{const}$, а метрические коэффициенты перед $dR^2$ и $d\sigma^2$ также умножаются на функцию времени. Аналогичное рассмотрение этих решений с помощью метода массовой функции, показывает, что они также не описывают черную дыру ни в пространстве-времени Фридмана, ни Толмена–Бонди, поскольку давление в них является функцией и координаты $R$, и времени $t$.

В работе [7] строится модель черной дыры, вложенной во вселенную Толмена–Бонди. Анализ результатов, полученных в данной работе, будет дан ниже.

Построим модель черной дыры во вселенной, описываемой решением Толмена-Бонди, используя метод массовой функции.

Метрика, описывающая распределение пылевидной материи, имеет вид

$$ds^2=dt^2-\frac{r'^2(R,t)}{f^2(R)}dR^2-r^2(R,t)\,d\sigma^2, \tag{6}$$

где $f^2(R)$ — произвольная функция интегрирования, которая имеет смысл полной энергии частицы, находящейся в слое $R$, выраженной в безразмерных единицах

$$f^2(R=\mathrm{const})=\frac{E^2}{m^2c^4}.$$

В зависимости от величины $f^2(R)>,<,=1$ существует три типа решения:

– гиперболический тип, $f^2(R)>1$

$$r(R,t)=\frac{m(R)}{f^2(R)-1}\sinh^2\frac{\alpha}{2}; \qquad t-t_0(R)=\pm\frac{m(R)}{2(f^2(R)-1)^{3/2}}(\sinh\alpha-\alpha); \tag{7}$$

– эллиптический тип, $f^2(R)<1$

$$r(R,t)=\frac{m(R)}{1-f^2(R)}\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad t-t_0(R)=\frac{m(R)}{2(1-f^2(R))^{3/2}}(\alpha-\sin\alpha); \tag{8}$$

– параболический тип, $f^2(R)=1$

$$r(R,t)=\left[\pm\frac{3}{2}\sqrt{m(R)}(t-t_0(R))\right]^{2/3}. \tag{9}$$

Для гиперболического и параболического типов знак «+» соответствует расширению ($t_0<t<\infty$), а знак «–» — сжатию ($-\infty<t<t_0$). Массовая функция $m(R)$ здесь — произвольная функция $R$, и имеет смысл полной массы распределения пылевидной материи внутри слоя $R=\mathrm{const}$.

Решение Шварцшильда является частным случаем решения Толмена–Бонди (7)–(9) при $m(R)=r_g$.

Решение Фридмана также является частным случаем решения Толмена–Бонди при определенном выборе $m(R)$, $f(R)$ и $t_0(R)$. Например, из (8) получаем решение Фридмана для замкнутого мира при

$$m(R)=a_0\sin^3 R; \qquad f(R)=\cos R; \qquad t_0(R)=0; \tag{10}$$

$$r(R,t)=a_0\sin R\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad t=\frac{a_0}{2}(\alpha-\sin\alpha). \tag{11}$$

Из уравнений для массовой функции (3) следует, что массовая функция аддитивна (в предположении отсутствия взаимодействия между различными типами материи $\varepsilon=\sum\limits_i\varepsilon_i$, $p=\sum\limits_i p_i$). Поэтому решения, описывающие шварцшильдову черную дыру в пространстве-времени Толмена–Бонди (заполненном пылевидной материей) — это решения (7)–(9), где массовая функция выбирается в виде

$$m(R)\to r_g+m(R). \tag{12}$$

Например, решение, описывающее мир Фридмана для случая плоского пространства совместно с шварцшильдовой черной дырой, имеет вид

$$r(R,t)=\left[\pm\frac{3}{2}\sqrt{r_g+a_0R^3}(t-t_0(R))\right]^{2/3}. \tag{13}$$

Заметим, что (13) описывает не мир Фридмана, а мир Толмена–Бонди, в котором массовая функция выбрана такой же, как и в решении Фридмана, поскольку в решении Шварцшильда для плоского пространства $t_0(R)$ не может быть равным нулю (в отличие от Фридмана, где $t_0(R)=0$). В решении, полученном в работе [7],

$$r(R,t)=\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt{a_0R^3}+\sqrt{r_g}\right)t+R^{3/2}\right]^{2/3} \tag{14}$$

Выражение в круглых скобках в (14) представляет собой сумму двух соответствующих выражений — для пространства Шварцшильда:

$$r(R,t)=\left[\frac{3}{2}\sqrt{r_g}\,t+R^{3/2}\right]^{2/3},$$

и для пространства Фридмана:

$$r(R,t)=\left[\frac{3}{2}\sqrt{a_0}\,t\right]^{2/3}R.$$

В этой работе выбрано $t_0(R)=-R^{3/2}a_0$.

Массовая функция для решения (14) имеет вид

$$m(R)=r\dot{r}^2=\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt{a_0R^3}+\sqrt{r_g}\right)t+R^{3/2}\right]^{2/3}\times\frac{\left(\sqrt{a_0R^3}+\sqrt{r_g}\right)^2}{\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt{a_0R^3}+\sqrt{r_g}\right)t+R^{3/2}\right]^{2/3}}=\left(\sqrt{a_0R^3}+\sqrt{r_g}\right)^2; \tag{15}$$

$$m(R)=a_0R^3+r_g+2\sqrt{a_0r_g}R^{3/2}.$$

Таким образом, решение (14) представляет собой черную дыру в некотором специальном пространстве-времени с массовой функцией (15).

Рассмотрим решение (8). Положим $f(R)=\cos R$, как и в решении Фридмана. Пусть $m(R)=r_g+a_0\sin^3 R$, тогда

$$r(R,t)=\frac{r_g+a_0\sin^3 R}{\sin^2 R}\sin^2\frac{\alpha}{2};\qquad t-t_0(R)=\frac{r_g+a_0\sin^3 R}{2\sin^3 R}(\alpha-\sin\alpha). \tag{16}$$

И аналогично, для решения (7) выбирая $f(R)=\cosh R$ и $m(R)=r_g+a_0\sinh^3 R$, получим

$$r(R,t)=\frac{r_g+a_0\sinh^3 R}{\sinh^2 R}\sinh^2\frac{\alpha}{2};\qquad t-t_0(R)=\frac{r_g+a_0\sinh^3 R}{2\sinh^3 R}(\sinh\alpha-\alpha). \tag{17}$$

Таким образом, в работе проанализированы решения, предлагаемые в [4–7] для описания черной дыры, погруженной в пыль. Показано, что эти решения не могут описывать такую систему.

Построена модель шварцшильдовой черной дыры во вселенной с пылевидной материей, которая описывается точными решениями (13), (16), (17) для случаев плоского, закрытого и открытого пространства, соответственно.


1. *McVittie G.C.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 1933. — **93**. — P. 325.
2. *Nolan B.C.* // Phys. Rev. D. — 1998. — **58**, 064006.
3. *McClure M.L., Dyer C.C.* // Class. Quantum Grav. — 2006. — **23**, 1971; Gen. Rel. Gravit. — 2006. — **38**, 1347.
4. *Faraoni V., Jacques A.* // Phys. Rev. D. — 2007. — **76**, 063510.
5. *Thakurta S.N.G.* // Indian J. Phys. — 1981. — **55B**. — P. 304.
6. *Sultana J., Dyer C.C.* // Gen. Rel. Grav. — 2005. — **37**, 1349.
7. *Changjun Gao, et al.* // Phys. Rev. D. — 2011. — **84**, 104047.



Поступила в редакцию 5.06.2012