Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 6 • № 2 • 2009 С. 207 – 211

Особливості руху тіл змінної маси у центральному гравітаційному полі

Д.В. Кравченко

Національний авіаційний університет, Київ

Досліджено особливості руху матеріальної точки змінної маси у центральному гравітаційному полі з врахуванням сили тертя.

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ, Кравченко Д.В. — Исследованы особенности движения материальной точки переменной массы в центральном гравитационном поле с учетом силы трения.

THE FEATURES OF THE MOTION OF VARIABLE MASS BODIES IN CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD, by Kravchenko D.V. — Some features of motion of variable mass point in central gravitational field under the action of a friction force are investigated.

1. ВСТУП

На сучасному етапі розвитку астрономії та космонавтики все виникають задачі, в яких розглядається динаміка самогравітуючих систем змінної маси. Для космонавтики визначення орбіт космічних апаратів, рух яких зумовлений реактивною силою, яка виникає за рахунок зміни маси (втрата маси за рахунок згоряння пального), в астрономії зміна маси зумовлюється еволюцією небесних тіл, зокрема зміна маси зоряних систем, зміна маси комет та супутників планет. В залежності від стадій еволюції маса небесних тіл може зменшуватись (втрата маси) чи збільшуватись (акреція речовини). Прикладами можуть слугувати подвійні зірки, в яких маса перетікає з однієї зірки на іншу, захоплення зірками та масивними планетами комет, астероїдів тощо, рух комет біля зірки, при якому комета втрачає масу при наближенні до зірки, і набуває — при віддалені або навпаки.

В даній роботі розглянуто динаміку тіла змінної маси, яке можна прийняти за матеріальну точку, що рухається навколо центрального тіла, маса якого не змінюється, причому маса "рухомого" тіла залежить від відстані. Прикладом такої системи може слугувати система "комета — зірка".

Комета може втрачати свою масу при русі навколо Сонця (або іншої зірки) за рахунок її взаємодії із сонячним вітром, або навпаки може збільшувати свою масу за рахунок притягування космічного пилу. Оскільки параметри об'єктів носять змінний характер, то і задачу слід розглядати з тієї позиції, що гравітаційна взаємодія тіл має більш складну форму.

Досліджується динамічна задача матеріальної точки в центральному симетричному полі, маса $m(\vec{\mathbf{r}})$ якої залежить від відстані до гравітуючого центру сталої маси M. Зміна маси точкового тіла впливає на характер орбіти, завдяки цьому відбувається еволюція елементів орбіти матеріальної точки. У літературі така задача більш відома як задача Гільдена–Мещерського.

При розгляді даної системи були введені певні умови:

- Маса центрального тіла набагато більша, за масу комети
- Центральне тіло має сферичну форму, а отже його гравітаційне поле також буде сферично-симетричним
- Центр координат поміщено у центр тяжіння більш масивного тіла (зірка)
- Центральне тіло (зірка) має сталу масу
- Маса супутника (комети) є функцією відстані
- Початкові умови вважались відомими
- Відомий закон тертя у середовищі

До цього необхідно додати механізм втрати маси, бо характер зміни орбіти залежить не тільки від швидкості втрати маси, так як й від напрямку викиду частинок речовини, а також від напрямку відносної швидкості викиду частинок речовини.

2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли частинки відділяються від комети у напрямку, який є протилежний напрямку руху зі швидкістю рівною за модулем швидкості руху самої комети, а збільшення маси відбувається за рахунок приєднання нерухомих частинок, з якими зіткнулась комета.

За таких умов диференціальне рівняння руху матеріальної точки можна записати так:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\mathbf{v}}) = -\frac{GMm(r)}{r^3}\vec{\mathbf{r}}, \tag{1}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \tag{2}$$

де $\vec{\mathbf{r}}$ — радіус-вектор, що проведений з центру координат (зірка) до матеріальної точки (комета), M — маса центрального тіла (зірки), m — маса матеріальної точки (комети), G — гравітаційна стала.

Взявши похідну у лівій частині отримаємо

$$\frac{dm}{dt}\vec{\mathbf{v}} + m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -\frac{GMm(r)}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \tag{3}$$

Враховуючи (2) і виконавши певні перетворення отримаємо

$$m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GMm(r)}{r^3}\vec{\mathbf{r}} - \frac{dm}{dt}\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \tag{4}$$

У правій частині рівняння (4) є похідна від маси за часом, однак, за умови маса є функцією відстані, і не є функцією часу у явному вигляді. Тоді, використавши заміну $\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dr}\frac{dr}{dt}$ отримаємо:

$$m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GMm(r)}{r^3}\vec{\mathbf{r}} - \frac{dm}{dr}\dot{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}} \tag{5}$$

Перетворення рівняння руху для конкретної задачі з використанням формул Куммера–Ліувіля для приведення цієї задачі до вигляду, що має рівняння Гільдена–Мещерського:

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{G\mu(t)}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \tag{6}$$

де $\mu(t)$ містить у собі маси обох тіл

Даний шлях потребує точного визначення закону зміни маси матеріальної точки (комети), оскільки перетворення Куммера–Ліувіля для даного рівняння базуються на підстановці змінних, що залежать саме від закону зміни маси супутника (комети).

При розв'язанні рівняння (5) у відношенні до конкретно визначених законів зміни маси було отримано наступне:

Для закону зміни маси

$$m(r) = A\cdot r^{-n} \qquad (n=0, n=1, n=2, n=3) \tag{7}$$

рівняння (5) переписалось:

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} + \frac{n}{r}\dot{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}} \tag{8}$$

Як можна побачити, різноманітні випадки зміни маси за законом (7) описуються однаковим рівнянням руху, а значить матимуть однотипні орбіти.

Для випадку

$$m(r) = m_0\exp(-\alpha r) \tag{9}$$

рівняння (5) має вигляд

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} + \alpha\dot{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}} \tag{10}$$

Аналітичний розв'язок рівнянь (8) та (10) має складний характер, тому для визначення характеру орбіти було використано чисельні методи. Хоч рівняння (8) та (10) і мають різні множники біля $\dot{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}}$, що суттєво впливає на траєкторію руху, однак характер руху для них однаковий. Траєкторія є спіраллю, що закручується, або розкручується, в залежності від початкових параметрів, тобто матеріальна точка наближається або віддаляється від центрального тіла у порівнянні зі стаціонарним випадком. Відбуваються зміни з часом ексцентриситету та велика піввісі орбіти.

Рівняння (8) та (10) описують рух в певному середовищі, де існує сила тертя:

для (8): $\vec{\mathbf{F}} = -\frac{n}{r}\dot{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}}$ або $F = cv^2r^{-1}$,

для (10): $\vec{\mathbf{F}} = \alpha\dot{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}}$ або $F = cv^2$

Виявилось, що для сили тертя, яка описується $F = cv^2r^{-1}$ (зміна маси за законом (7)) ексцентриситет залишається постійним за рахунок одночасної зміни обох півосей, а для $F = cv^2$ ексцентриситет збільшується або зменшується в залежності від параметру α в законі (9):

при $\alpha > 0$ — збільшується,

при $\alpha < 0$ — зменшується,

при $\alpha = 0$ — ексцентриситет не змінюється.

Закони зміни маси можуть носити періодичний характер, тобто при наближенні до центрального тіла, маса матеріальної точки збільшується, а при віддалені знову зменшується. Дане зауваження вносить додаткові корективи у характер руху матеріальної точки.

Крім зміни маси матеріальної точки за рахунок взаємодії з сонячним вітром та притягування космічного пилу, на рух також впливає і середовище, в якому рухається тіло. Сили тертя, що виникають при такому русі гальмують матеріальну точку, а значить велика піввісь зменшується (тіло рухається все ближче до центрального тіла).

Якби не було зміни маси тіл, а зміна орбіти відбувалася лише за рахунок сили тертя, то рівняння руху записується так:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{\mu_0}{r^3}\vec{\mathbf{r}} - f(r)\dot{\vec{\mathbf{r}}} \tag{11}$$

тобто сила опору пропорційна швидкості матеріальної точки, а також залежить від деякої функції $f(r)$.

Якщо ж накласти обидві умови, тобто маса точки змінюється, рух відбувається у певному середовищі, то отримаємо наступне:

$$m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GMm(r)}{r^3}\vec{\mathbf{r}} - \left(\frac{dm}{dt} + f(r)\right)\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \tag{12}$$

або

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} - \left(\frac{\dot{m}}{m} + f(r)\right)\dot{\vec{\mathbf{r}}} \tag{13}$$

Дія, щодо зміни параметрів орбіти, як наприклад великої напіввісі, від різних чинників може бути протилежною. Так наприклад, сила опору зменшує велику напіввісь, а зміна маси, навпаки, може збільшувати. При певних умовах може спостерігатися ситуація, коли ці протилежні дії взаємно компенсуються. Так наприклад, для рівняння (13) відбувається вище згадана компенсація при умові, що коефіцієнт при $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$ дорівнює нулю. Тобто $\frac{\dot{m}}{m} + f(r) = 0$, або $-\frac{\dot{m}}{m} = f(r)$, а врахувавши заміну $\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dr}\frac{dr}{dt}$ отримаємо

$$-\frac{m'_r}{m}\dot{r} = f(r) \tag{14}$$

Для законів зміни маси (7) та (9) функція $f(r)$ визначається як:

$$f(r) = n\frac{\dot{r}}{r} \qquad \text{(у випадку (7))} \tag{15}$$

та

$$f(r) = \alpha\dot{r} \qquad \text{(у випадку (9)).} \tag{16}$$

Враховуючи (15) та (16) отримаємо наступні вирази для сил тертя:

$$\vec{\mathbf{R}} = n\frac{\dot{r}}{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}} \qquad \text{(для закону зміни маси (7))} \tag{17}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \alpha\dot{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}} \qquad \text{(для закону зміни маси (9))} \tag{18}$$

або у скалярній формі, враховуючи, що $\dot{r} = v$, і замінивши константи n та α на c:

$$R = cv^2r^{-1} \tag{19}$$

$$R = cv^2 \tag{20}$$

Тобто, для законів зміни маси (7) та (9) існують такі закони тертя, для яких рух буде квазістаціонар-

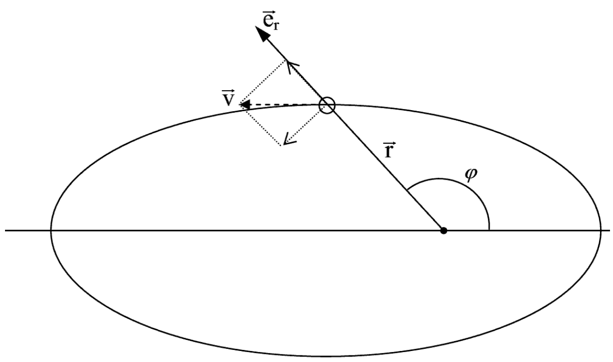

Рис. 1

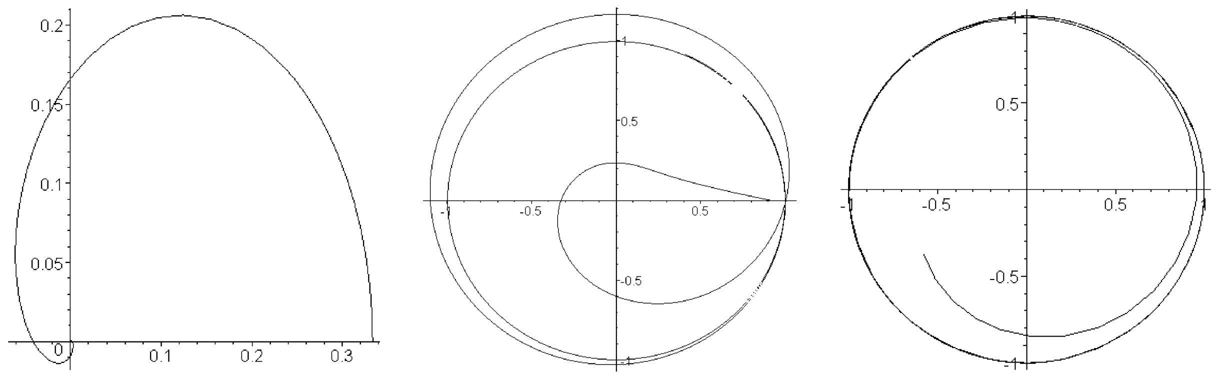

Рис. 2

ним на всіх ділянках руху, тобто фактично орбіта буде стаціонарною і для обох законів зміни маси рух тіла буде визначатись рівнянням:

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

Однак розглянуті випадки руху носять спрощений характер. В загальному випадку зміна маси (втрата маси) відбувається під певним кутом до напрямку руху, відносна швидкість частинок може залежати від деяких додаткових параметрів. За таких умов розв'язок задачі стає неможливим у загальному випадку.

Однак розглянемо випадок, коли втрата маси відбувається вздовж радіус-вектора.

Розглянемо рівняння руху

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} + (\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})\frac{dm}{dt}$$

де $F = -\frac{GmM}{r^3}\vec{\mathbf{e}}_r$, $\vec{\mathbf{v}} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{\mathbf{e}}_\varphi$, $(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}}_B = \lambda\vec{\mathbf{e}}_r$ — відносна швидкість викиду частинок.

Замінивши $w = 1/r$ і розв'язавши систему

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = c, \\ mc^2\left(\dfrac{d^2w}{d\varphi^2} + w\right) = \dfrac{GMm}{r^2} - \Phi, \end{cases}$$

де $\Phi = \lambda\frac{dm}{dt}$

Для закону зміни маси $m = m_0e^{2\alpha/r}$ система рівнянь запишеться так:

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = c \\ \dfrac{d^2w}{dw^2} - \dfrac{2\alpha\lambda}{c}\dfrac{dw}{d\varphi} + w = \dfrac{GM}{c^2} \end{cases}$$

Розв'язок системи залежить від $\frac{2\alpha\lambda}{c}$ наступним чином

1) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} > 1$ $\quad r = \left[C_1e^{(\beta-\gamma)\varphi/2} + C_2e^{(\beta+\gamma)\varphi/2} + \frac{GM}{c^2}\right]^{-1}$;

2) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} < 1$ $\quad r = \left[e^{-\gamma\varphi/2}\left(c_1\sin\frac{\gamma\varphi}{2} + c_2\cos\frac{\gamma\varphi}{2}\right) + \frac{GM}{c^2}\right]^{-1}$;

3) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} = 1$ $\quad r = \left[e^{-\varphi}(c_1\varphi + c_2) + \frac{GM}{c^2}\right]^{-1}$;

де $\beta = \left(\frac{\alpha\lambda}{c}\right)^2 - 4$, $\gamma = \frac{\alpha\lambda}{c}$

Орбіти, що характеризують ці рівняння подані на рис.1.

У першого випадку тіло падає на центральне тіло, при другому — тіло рухається, намагаючись зайняти стійку орбіту, причому значення відстані до центрального тіла здійснює гармонійні коливання, що затухають, для третього випадку — тіло також намагається зайняти стаціонарну орбіту, зміна значення радіальної відстані має аперіодичний характер. В останніх двох випадках ексцентриситет наближається до 0, а велика піввісь — до певного сталого значення.

Записавши дані рівняння у класичному вигляді типу

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

отримаємо:

1) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} > 1$ $$r = \frac{\frac{c^2}{GM}}{1 + \frac{c^2}{GM}\left(C_1 e^{(\beta-\gamma)\varphi/2} + C_2 e^{(\beta+\gamma)\varphi/2}\right)}$$

2) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} < 1$ $$r = \frac{\frac{c^2}{GM}}{1 + \frac{c^2}{GM} e^{-\gamma\varphi/2}\left(c_1 \sin\frac{\gamma\varphi}{2} + c_2 \cos\frac{\gamma\varphi}{2}\right)}$$

3) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} = 1$ $$r = \frac{\frac{c^2}{GM}}{1 + \frac{c^2}{GM} e^{-\varphi}\left(c_1\varphi + c_2\right)}$$

де $\beta = \left(\frac{\alpha\lambda}{c}\right)^2 - 4$, $\gamma = \frac{\alpha\lambda}{c}$

Тобто фокальний параметр p для всіх трьох розв'язків є величина стала, а залежність ексцентриситету від кута φ визначається наступним чином:

1) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} > 1$ $$E = \frac{c^2}{GM\cos\varphi}\left(C_1 e^{(\beta-\gamma)\varphi/2} + C_2 e^{(\beta+\gamma)\varphi/2}\right)$$

2) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} < 1$ $$E = \frac{c^2}{GM}\frac{e^{-\gamma\varphi/2}}{\cos\varphi}\left(c_1 \sin\frac{\gamma\varphi}{2} + c_2 \cos\frac{\gamma\varphi}{2}\right)$$

3) при $\frac{2\alpha\lambda}{c} = 1$ $$E = \frac{c^2}{GM}\frac{e^{-\varphi}}{\cos\varphi}\left(c_1\varphi + c_2\right)$$

де $\beta = \left(\frac{\alpha\lambda}{c}\right)^2 - 4$, $\gamma = \frac{\alpha\lambda}{c}$.

3. ВИСНОВКИ

Динаміка самогравітуючих систем змінної маси має складний характер, задачі по знаходженню розв'язків рівняння руху часто неможливо розв'язати аналітично, а тому використовують наближені методи чисельного інтегрування динамічних рівнянь.

В роботі знайдено рівняння руху матеріальної точки змінної маси у центральному гравітаційному полі. Орбіта частинок нагадує спіраль. Розглянуто випадки компенсації впливу сили тертя і реактивної сили та виникнення при цьому квазістаціонарних еліптичних орбіт.

1. E. P. Razbitnaya. The problem of two bodies with variable masses: classification of different cases / Vladimir Pedagogical Institute (Submitted March 20, 1984) Astron. Zh. 62, 1175-1181 (November-December 1985)
2. G. Lopez and E. M. Juarez. About the Constant of Motion, Lagrangian and Hamiltonian of the Gravitational Attraction of Two Bodies with Variable Mass(Gylden-Meshcherskii problem) / Departamento de Fisica de la Universidad de Guadalajara, Apartado Postal 4-137, 44410 Guadalaj Jalisco, Mexico.
3. L G. Glikman. On the problem of two bodies of variable mass / Institute of Nuclear Physics, Academy of Sciences of the Kazakh SSR, (Submitted February 15, 1977), Astron. Zh. 55, 873-880 (July-August 1978)
4. Celia A. de Sousa and Vitor H. Rodrigues. Mass redistribution in variable mass systems / Departamento de Fisica da Universidade de Coimbra.

Надійшла до редакції 21.10.2009