



Плоские орбиты во внешнем гравитационном поле прецессирующего однородного эллипсоида

А.А. Терещенко

Национальный авиационный университет

В окрестности прецессирующего однородного эллипсоида возможны такие движения частиц, в котором орбита целиком лежит приблизительно в одной плоскости, причем возможные ориентации плоскостей зависят как от трехосности, угловой скорости вращения и угла прецессии эллипсоида, так и от размеров и эксцентриситета самой орбиты. Получены условия, при которых плоскость орбиты сохраняет устойчивое положение относительно системы координат, связанной с эллипсоидом.

ПЛОСКІ ОРБИТИ У ЗОВНІШНЬОМУ ГРАВИТАЦІЙНОМУ ПОЛІ ПРЕЦЕСУЮЧОГО ОДНОРІДНОГО ЕЛІПСОЇДА, Терещенко А.О. — В околі прецесуючого однорідного еліпсоїда можливі такі рухи частинок, в яких орбіта цілком лежить приблизно в одній площині, причому можливі орієнтації площин залежать як від тривісності, кутової швидкості обертання та кута прецесії еліпсоїда, так і від розмірів і ексцентриситету самої орбіти. Отримано умови, за яких площина орбіти зберігає стійке положення відносно системи координат, пов'язаної з еліпсоїдом.

PLANE ORBITS IN THE EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD OF PRECESSING HOMOGENEOUS ELLIPSOID, by Tereshchenko A.A. — It is possible to find out such orbits that lie completely at some planes in the neighborhood of precessing homogeneous ellipsoid. Orientations of these planes depend both on the ellipsoid's triaxiality, rotation velocity, angle of precession, and eccentricity of the orbit. The conditions of stability of orbital plane's position relative to rotating coordinate system are obtained.

1. ВВЕДЕНИЕ

Газопылевое вещество может двигаться снаружи небесного тела, образуя при этом структуры — диски, кольца, облака в точках либрации. Во многих случаях внешнее гравитационное поле небесных тел (к примеру, Земли, планет Солнечной системы, астероидов, галактик) можно аппроксимировать потенциалом трехосного однородного эллипсоида [4, 6, 11]. В данной работе газопылевая среда будет рассматриваться как совокупность частиц, которые движутся во внешнем гравитационном поле однородного трехосного вращающегося эллипсоида. При этом не учитывается взаимодействие частиц между собой, т.е. самогравитацией и вязкостью газопылевого вещества будем пренебрегать.

Особое значение для космогонии Солнечной системы имеет прецессия небесных тел, влияющая на формирование газопылевых протопланетных и протоспутниковых систем. Для тел Солнечной системы прецессия порождается гравитационным взаимодействием планеты с другими небесными телами [10].

Задача о движении частиц во внешнем гравитационном поле эллипсоида рассматривалась в работах [1–3, 7–9], однако остались нерешенными вопросы о том, каким образом влияет трехосность и прецессия центрального тела на элементы орбит частиц, в частности, при каких условиях возможно существование плоских орбит.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В данной работе мы рассмотрим движение частицы вокруг трехосного однородного эллипсоида с массой M и полуосями a , b , c (для определенности примем, что $a > b > c$). Свяжем декартову систему координат с эллипсоидом так, чтобы полуоси a , b , c расположились вдоль координатных осей x , y , z , а начало координат совпадало с центром масс эллипсоида. Будем предполагать, что эллипсоид равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, вектор которой расположен в плоскости xz под углом α по отношению к координатной оси z .

Уравнения движения частицы во вращающейся системе координат имеют вид

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla\Phi - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (1)$$

где Φ — внешний гравитационный потенциал однородного эллипсоида, который приближенно описывается выражением

$$\Phi(x, y, z) = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{10} \frac{(2a^2 - b^2 - c^2)x^2 + (2b^2 - a^2 - c^2)y^2 + (2c^2 - a^2 - b^2)z^2}{r^5}, \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ограничимся рассмотрением случая, в котором, во-первых, эллипсоид имеет малую трехосность, а во-вторых, угловая скорость вращения является малой величиной. Таким образом, изучение движения частицы во вращающейся системе отсчета можно свести к рассмотрению движения частицы в поле притягивающего центра, на которое накладываются возмущения, порождаемые силами инерции и несимметричностью гравитационного потенциала, описываемой вторым слагаемым в выражении (2).

Будем разыскивать такие орбиты, которые приблизительно лежат целиком в одной плоскости, неподвижной относительно эллипсоида. Во вращающейся системе координат, связанной с эллипсоидом, возможно такое движение газопылевого вещества вокруг эллипсоида, при котором орбита отдельной частицы хоть и не является замкнутой, но заполняет плоское круговое кольцо, охватывающее эллипсоид (рис. 1).

Уравнения движения (2) допускают интеграл Якоби вида

$$H = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \Phi(x, y, z) - \frac{1}{2} (\vec{\Omega} \times \mathbf{r})^2 = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Phi(x, y, z) - \frac{1}{2} \Omega^2 [y^2 + (x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2], \quad (3)$$

который является аналогом интеграла энергии в инерциальной системе отсчета.

Введем следующие обозначения для элементов невозмущенной орбиты: Ω_n — долгота восходящего узла, i — наклонение орбиты, ω — аргумент перигея, p — фокальный параметр, e — эксцентриситет, φ — истинная аномалия. Как известно, при невозмущенном эллиптическом движении декартовы координаты частицы выражаются через элементы орбиты следующим образом [5]:

$$\begin{cases} x = r [\cos(\omega + \varphi) \cos \Omega_n - \sin(\omega + \varphi) \sin \Omega_n \cos i], \\ y = r [\cos(\omega + \varphi) \sin \Omega_n + \sin(\omega + \varphi) \cos \Omega_n \cos i], \\ z = r \sin(\omega + \varphi) \sin i, \end{cases} \quad (4)$$

Компоненты скорости частицы также выразим через элементы орбиты, добавив дополнительные слагаемые, учитывающие преобразование скорости при переходе к вращающейся системе отсчета

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{r} v_r + v_\tau [-\sin(\omega + \varphi) \cos \Omega_n - \cos(\omega + \varphi) \sin \Omega_n \cos i] + y \Omega \cos \alpha, \\ \dot{y} = \frac{y}{r} v_r + v_\tau [-\sin(\omega + \varphi) \sin \Omega_n + \cos(\omega + \varphi) \cos \Omega_n \cos i] + z \Omega \sin \alpha - x \Omega \cos \alpha, \\ \dot{z} = \frac{z}{r} v_r + v_\tau \cos(\omega + \varphi) \sin i - y \Omega \sin \alpha, \end{cases} \quad (5)$$

где v_r и v_τ — радиальная и тангенциальная составляющие скорости:

$$v_r = \sqrt{\frac{M}{p}} e \sin \varphi, \quad v_\tau = \sqrt{\frac{M}{p}} (1 + e \cos \varphi). \quad (6)$$

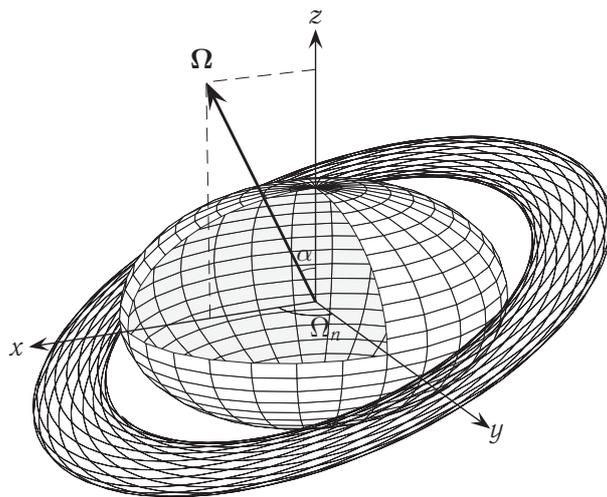


Рис. 1. Плоская орбита вблизи прецессирующего эллипсоида

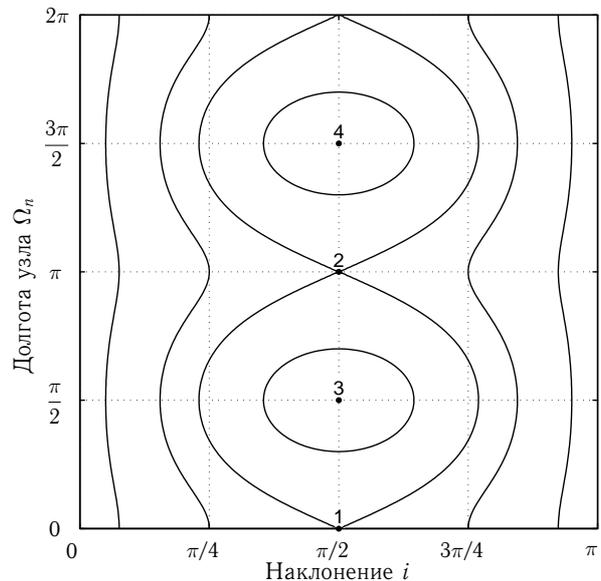


Рис. 2. Вид функции $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при условии отсутствия вращения эллипсоида. Линии $\bar{H} = \text{const}$ изображены сплошными; точками обозначены экстремумы и седловые точки функции $\bar{H}(i, \Omega_n)$.

Подставим (4), (5), (6) в (3), усредним полученное выражение по периоду обращения вдоль невозмущенной орбиты (т.е. полагая элементы орбиты постоянными), для дальнейшего сокращения записи сразу домножим на постоянный множитель $p^{3/2}$ и на основании соотношения $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{Mp}$ перейдем к переменной интегрирования φ ; получим

$$\begin{aligned} \bar{H} = p^{3/2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T H dt = p^{3/2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H \frac{r^2}{\sqrt{Mp}} d\varphi = -\frac{p^2}{2} \sqrt{\frac{M}{1-e^2}} - k\Omega(\sin i \sin \alpha \sin \Omega_n + \cos \alpha \cos i) + \\ + \frac{\sqrt{M}}{20} [3(b^2 - a^2) \sin^2 i \cos^2 \Omega_n + 3(c^2 - a^2) \cos^2 i + 2a^2 - b^2 - c^2] \end{aligned} \quad (7)$$

где введено обозначение

$$k \equiv \frac{p^{7/2}}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (8)$$

Выпишем выражения для частных производных, полученных на основании (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial i} &= -k\Omega(\cos i \sin \alpha \sin \Omega_n - \cos \alpha \sin i) - \frac{3}{10} \sqrt{M} [(a^2 - b^2) \cos^2 \Omega_n + c^2 - a^2] \sin i \cos i, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Omega_n} &= \left[\frac{3}{10} \sqrt{M} (a^2 - b^2) \sin i \sin \Omega_n - \Omega k \sin \alpha \right] \cos \Omega_n \sin i, \\ \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial i^2} &= k\Omega(\sin i \sin \alpha \sin \Omega_n + \cos \alpha \cos i) - \frac{3}{10} \sqrt{M} [(a^2 - b^2) \cos^2 \Omega_n + c^2 - a^2] \cos 2i, \end{aligned}$$

а также составим дифференциальную форму

$$\begin{aligned} \mathbb{J} = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial i^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \Omega_n^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial i \partial \Omega_n} \right)^2 = \left[k\Omega \sin i \sin \alpha \sin \Omega_n + \frac{3}{10} \sqrt{M} \cos 2\Omega_n (a^2 - b^2) \sin^2 i \right] \times \\ \times \left[k\Omega(\sin i \sin \alpha \sin \Omega_n + \cos \alpha \cos i) - \frac{3}{10} \sqrt{M} ((a^2 - b^2) \cos^2 \Omega_n + c^2 - a^2) \cos 2i \right] - \\ - \left[\left(\frac{3}{5} \sqrt{M} (a^2 - b^2) \sin i \sin \Omega_n - k\Omega \sin \alpha \right) \cos i \cos \Omega_n \right]^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение \bar{H} можно рассматривать как функцию долготы узла Ω_n и наклона i орбиты при фиксированных значениях p и e . Эллиптической орбите с конкретными значениями i , Ω_n соответствует своя изображающая точка на поверхности $\bar{H} = \bar{H}(i, \Omega_n)$, причем в ходе эволюции орбитальных элементов i , Ω_n изображающая точка должна смещаться вдоль линии $\bar{H} = \text{const}$. Следовательно, для того, чтобы плоскость орбиты сохраняла неподвижность в пространстве, достаточно, чтобы i , Ω_n определялись уравнениями

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Omega_n} = 0, \quad (10)$$

Если i , Ω_n будут немного отличаться от значений $i^{(0)}$, $\Omega_n^{(0)}$, определяемых уравнениями (10), то изображающая точка будет либо совершать вокруг $i^{(0)}$, $\Omega_n^{(0)}$ циклические движения, если точке $i^{(0)}$, $\Omega_n^{(0)}$ соответствует экстремум функции $\bar{H}(i, \Omega_n)$ (максимум или минимум; условием этого является $\mathbb{J}(i^{(0)}, \Omega_n^{(0)}) > 0$), либо будет непрерывно отдаляться от $i^{(0)}$, $\Omega_n^{(0)}$, если точка $i^{(0)}$, $\Omega_n^{(0)}$ является седловой для функции $\bar{H}(i, \Omega_n)$ (т.е. при $\mathbb{J}(i^{(0)}, \Omega_n^{(0)}) < 0$). Следовательно, орбите, плоскость которой устойчиво сохраняет свое положение относительно эллипсоида, соответствует один из экстремумов функции \bar{H} . Таким образом, выражение (7) позволяет не только найти ориентацию неподвижной плоскости орбиты, но и исследовать ее устойчивость относительно i и Ω_n .

3. ПЛОСКИЕ ОРБИТЫ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Вначале рассмотрим возможность существования плоских орбит *при отсутствии* собственного вращения эллипсоида, т.е. при $\Omega = 0$. Условия (10) при этом дают

$$\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial i} \right|_{\Omega=0} = -\frac{3}{10} \sqrt{M} [(a^2 - b^2) \cos^2 \Omega_n - a^2 + c^2] \sin i \cos i = 0, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Omega_n} \right|_{\Omega=0} = \frac{3}{10} (a^2 - b^2) \sqrt{M} \sin^2 i \sin \Omega_n \cos \Omega_n = 0, \quad (12)$$

откуда следуют возможные случаи (они изображены на рис. 2):

Случай 1: $i = \frac{\pi}{2}$, $\Omega_n = 0$ — это меридиональные орбиты вокруг промежуточной оси эллипсоида.

Случай 2: $i = \frac{\pi}{2}$, $\Omega_n = \pi$ — меридиональные орбиты вокруг промежуточной оси, обратные по отношению к случаю 1.

Орбитальные плоскости в случаях 1 и 2 неустойчивы, так как им соответствуют седловые точки функции \bar{H}

$$\mathbb{J}\Big|_{\substack{i=\pi/2 \\ \Omega_n=0}} = \mathbb{J}\Big|_{\substack{i=\pi/2 \\ \Omega_n=\pi}} = \frac{9}{100}M(a^2 - b^2)(c^2 - b^2) < 0,$$

поскольку $c < b < a$.

Случай 3: $i = \frac{\pi}{2}$, $\Omega_n = \frac{\pi}{2}$.

Случай 4: $i = \frac{\pi}{2}$, $\Omega_n = \frac{3\pi}{2}$.

Это меридиональные орбиты вокруг большой оси эллипсоида. Для них выполняется условие

$$\mathbb{J}\Big|_{\substack{i=\pi/2 \\ \Omega_n=\pi/2}} = \mathbb{J}\Big|_{\substack{i=\pi/2 \\ \Omega_n=3\pi/2}} = \frac{9}{100}M(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) > 0,$$

а, значит, их плоскости устойчивы.

Случай 5: $i = 0$.

Случай 6: $i = \pi$.

Случаям 5 и 6 соответствуют прямая и обратная экваториальные орбиты, т.е. орбиты вокруг малой оси эллипсоида. В данном случае восходящий узел можно считать прецессирующим синхронно с движением частицы по орбите, поэтому для устойчивости плоскости орбиты достаточно отсутствия седловых точек на линиях $i = 0$ и $i = \pi$. Действительно, вторые производные

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial i^2}\Big|_{i=0} = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial i^2}\Big|_{i=\pi} = -\frac{3}{10}\sqrt{M}[(a^2 - b^2)\cos^2 \Omega_n - (a^2 - c^2)] > 0$$

при всех возможных значениях Ω_n , т.к. $a^2 - b^2 < a^2 - c^2$.

4. ОРБИТЫ ВОКРУГ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПСОИДА

Теперь рассмотрим возможность существования экваториальных орбит вокруг *вращающегося* эллипсоида, для которых $i = 0$, если орбита прямая, и $i = \pi$, если орбита обратная. В данном случае остается лишь первое из условий (10), при $i = 0$ и $i = \pi$ дающее соответственно

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial i}\Big|_{i=0} = -\Omega k \sin \alpha \sin \Omega_n = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial i}\Big|_{i=\pi} = \Omega k \sin \alpha \sin \Omega_n = 0, \quad (13)$$

откуда следует, что и прямая, и обратная экваториальные орбиты могут существовать только при $\alpha = 0$, т.е. когда эллипсоид вращается вокруг оси z .

Для прямой экваториальной орбиты условие

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial i^2}\Big|_{\substack{i=0 \\ \alpha=0}} = \Omega k - \frac{3}{10}\sqrt{M}[(a^2 - b^2)\cos^2 \Omega_n - (a^2 - c^2)] > 0$$

выполняется при всех возможных положительных значениях Ω , а потому седловые точки на прямой $i = 0$ появиться не могут и плоскость прямой экваториальной орбиты сохраняет устойчивое положение.

Напротив, в случае обратной экваториальной орбиты с увеличением параметра k (он определяется выражением (8)) седловые точки 1, 2 и экстремумы 3, 4 на рис. 2 начинают смещаться вправо. Из условия

$$\frac{\partial^2 H}{\partial i^2}\Big|_{\substack{\alpha=0 \\ i=\pi \\ \Omega_n=\pi}} = -\Omega k - \frac{3}{10}\sqrt{M}(c^2 - b^2) = 0$$

находим критическое значение параметра k

$$k_1 = \frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(b^2 - c^2)}{\Omega},$$

при котором седловые точки 1, 2 достигают прямой $i = \pi$ и плоскость обратной экваториальной орбиты теряет устойчивость (рис. 3). При дальнейшем увеличении параметра k экстремумы 3, 4 на рис. 3 продолжают смещаться вправо и достигают прямой $i = \pi$ при критическом значении

$$k_2 = \frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(a^2 - c^2)}{\Omega},$$

а плоскость обратной экваториальной орбиты снова становится устойчивой. Таким образом, при k , лежащем в пределах

$$\frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(b^2 - c^2)}{\Omega} \leq k < \frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(a^2 - c^2)}{\Omega} \quad (14)$$

плоскость обратной экваториальной орбиты является неустойчивой.

Рассмотрим также гипотетический случай вращения эллипсоида вокруг *промежуточной оси*, т.е. пусть эллипсоид вращается вокруг оси z , но $b < c < a$. При $\Omega = 0$ устойчивыми являются только четыре орбитальные плоскости, для которых $i = \frac{\pi}{2}$, $\Omega_n = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ (точки 1, 2, 3, 4 на рис. 5); им соответствуют меридиональные орбиты вокруг большой и малой осей эллипсоида; прямые и обратные экваториальные орбиты неустойчивы (на них расположены седловые точки 5–12 на рис. 5). Если $\Omega > 0$, то с увеличением параметра k экстремумы 1 и 3 на рис. 5 смещаются влево, а экстремумы 2 и 4 — вправо. При достижении критического значения

$$k = \frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(c^2 - b^2)}{\Omega}$$

экстремумы 1 и 3 оказываются лежащими на прямой $i = 0$ (рис. 6) и плоскость прямой экваториальной орбиты становится устойчивой. При дальнейшем увеличении k и достижении ним критического значения

$$k = \frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(a^2 - c^2)}{\Omega}$$

экстремумы 2 и 4 достигают прямой $i = \pi$ и устойчивой становится плоскость обратной экваториальной орбиты (вид функции $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при этом аналогичен изображенному на рис. 4). Таким образом, вращение эллипсоида вокруг промежуточной оси способно сделать устойчивыми часть экваториальных орбит относительно положения орбитальной плоскости.

Перейдем к изучению *наклонных орбит* (т.е. $i \neq 0$, $i \neq \frac{\pi}{2}$, $i \neq \pi$) вокруг вращающегося эллипсоида. В первую очередь рассмотрим случаи, когда $\Omega_n = 0$ или $\Omega_n = \pi$. Подстановка $\Omega_n = 0$ в (10) приводит к уравнениям

$$\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial i} \right|_{\Omega_n=0} = k\Omega \cos \alpha \sin i + \frac{3}{10} \sqrt{M}(b^2 - c^2) \sin i \cos i = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Omega_n} \right|_{\Omega_n=0} = -k\Omega \sin i \sin \alpha = 0. \quad (16)$$

Из уравнения (16) следует, что наклонные орбиты могут существовать только при $\alpha = 0$; тогда уравнение (15) позволяет определить наклонение орбиты:

$$\cos i = -\frac{10\Omega k}{3\sqrt{M}(b^2 - c^2)}. \quad (17)$$

Для того, чтобы плоскость орбиты была устойчивой, должно выполняться условие

$$\mathbb{J} \Big|_{\substack{\Omega_n=0 \\ \alpha=0}} > 0,$$

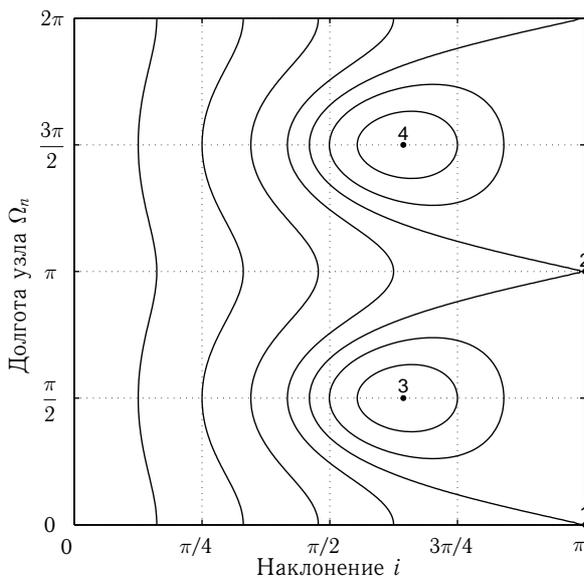


Рис. 3. Функция $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при $k = k_1$

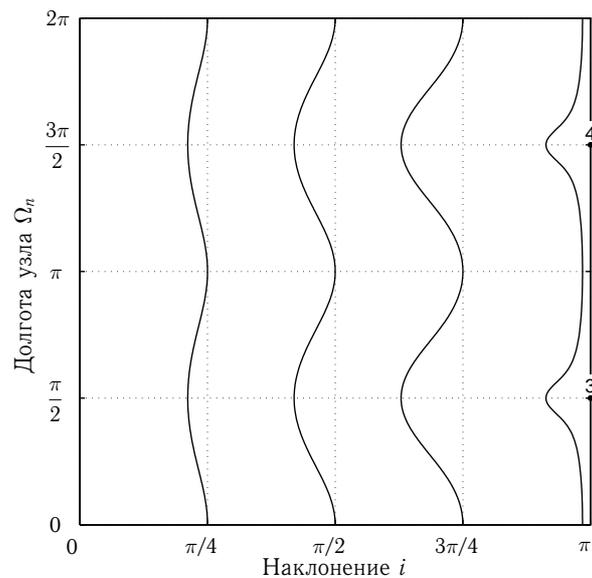


Рис. 4. Функция $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при $k = k_2$

которое после постановки в него (17) приводится к виду

$$\frac{10\Omega k}{3\sqrt{M}(b^2 - c^2)} > 1,$$

однако выражение в левой части, согласно (17), никак не может превысить 1, а потому данный вид орбит всегда неустойчив. Точно такие же результаты получаются и для случая $\Omega_n = \pi$.

Теперь рассмотрим случаи наклонных орбит, для которых $\Omega_n = \frac{\pi}{2}$. Условие

$$\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Omega_n} \right|_{\Omega_n = \pi/2} = 0$$

для них выполняется тождественно, а для поиска наклона остается уравнение

$$\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial i} \right|_{\Omega_n = \pi/2} = 0,$$

которое приводится к виду

$$\frac{\sin \alpha}{\sin i} - \frac{\cos \alpha}{\cos i} = f, \quad (18)$$

где введено обозначение

$$f = \frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(a^2 - c^2)}{\Omega k}. \quad (19)$$

Уравнение (18) позволяет найти точные значения возможных наклонов i плоскости орбиты при заданных f, α . Наклонение будет однозначно определяться соотношениями

$$\cos i = \frac{\mathbb{Z} \cos \alpha}{\sin \alpha - 2f\mathbb{Z}}, \quad \sin i = \mathbb{Z}, \quad (20)$$

где \mathbb{Z} — один из действительных корней уравнения 4-й степени

$$4\mathbb{Z}^4 f^2 - 4\mathbb{Z}^3 f \sin \alpha + (1 - 4f^2)\mathbb{Z}^2 + 4f\mathbb{Z} \sin \alpha - \sin^2 \alpha = 0. \quad (21)$$

Выражения для корней (21) запишем в виде

$$\mathbb{Z}_1 = -\eta_2 + \frac{\sin \alpha}{4f} - \sqrt{\eta_3 - \eta_4 + \eta_1}, \quad \mathbb{Z}_2 = -\eta_2 + \frac{\sin \alpha}{4f} + \sqrt{\eta_3 - \eta_4 + \eta_1}, \quad (22a)$$

$$\mathbb{Z}_3 = \eta_2 + \frac{\sin \alpha}{4f} - \sqrt{\eta_3 - \eta_4 - \eta_1}, \quad \mathbb{Z}_4 = \eta_2 + \frac{\sin \alpha}{4f} + \sqrt{\eta_3 - \eta_4 - \eta_1}, \quad (22b)$$

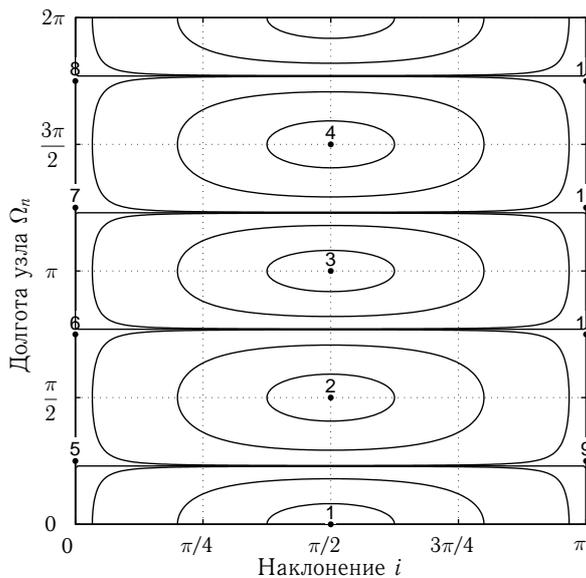


Рис. 5. Функция $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при $\Omega = 0, b < c < a$

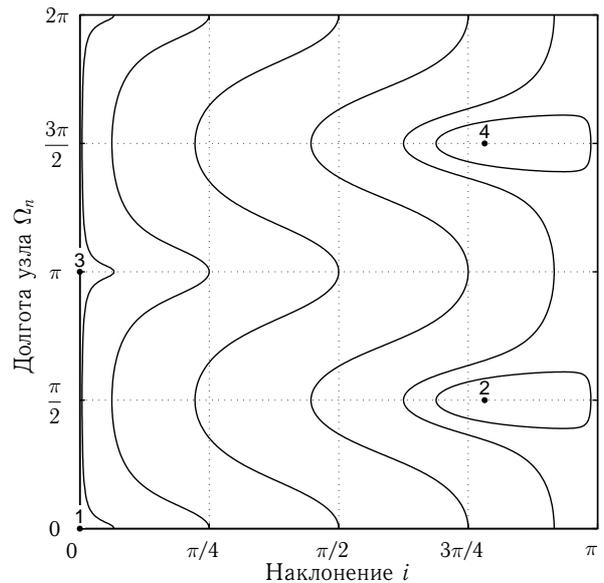


Рис. 6. Функция $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при $\Omega = 0, b < c < a, k = \frac{3}{10} \frac{\sqrt{M}(c^2 - b^2)}{\Omega}$

где обозначено

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{(1 + 8f^2 + \cos 2\alpha) \sin \alpha}{64f^3 \eta_2}, & \eta_2 = \sqrt{\frac{\eta_3}{2} + \eta_4}, \\ \eta_3 = \frac{1}{4f^2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1 - 4f^2}{3} \right), & \eta_4 = \frac{1}{48f^2} \left(\frac{(4f^2 - 1)^2}{\eta_5} + \eta_5 \right), \\ \eta_5 = [(1 - f^2)(1 + 8f^2)^2 + 3f(-9f \cos 4\alpha + \eta_6 \cdot \sin 2\alpha)]^{1/3}, \\ \eta_6 = \sqrt{6} \sqrt{2 + 3f^2 + 96f^4 - 128f^6 - 27f^2 \cos 4\alpha}. \end{cases} \quad (23)$$

На рис. 7 показана связь между наклоением i и параметром f в соответствии с (18) при некотором заданном α . При $f < f_1$ отдельному значению f соответствует единственное значение наклоения i (на рис. 8 ему соответствует точка 2 — единственный экстремум функции \bar{H} на прямой $\Omega_n = \frac{\pi}{2}$). Минимум на кривой $f(i)$ на рис. 7 можно определить из условия $\frac{df}{di} = 0$, в котором производная берется в силу уравнения (18), т.е.

$$\frac{df}{di} = -\frac{\cos(\alpha - i) + 2f \cos 2i}{\sin 2i} = 0. \quad (24)$$

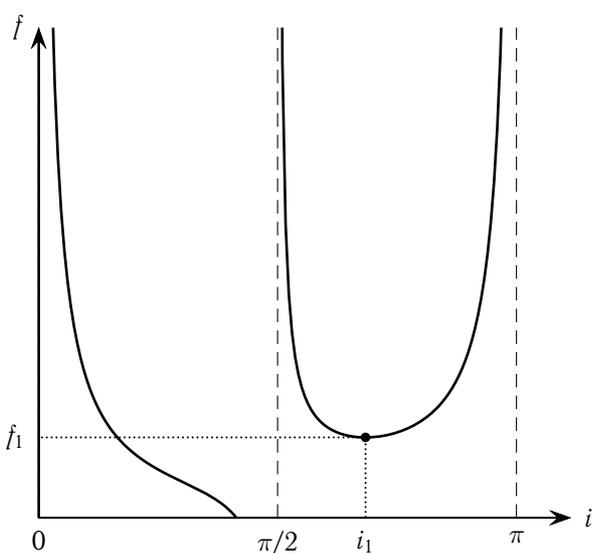


Рис. 7

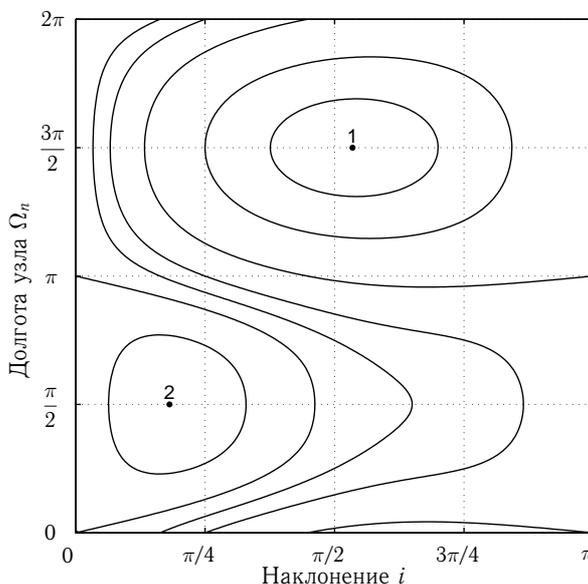


Рис. 8. Функция $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при $f < f_1$

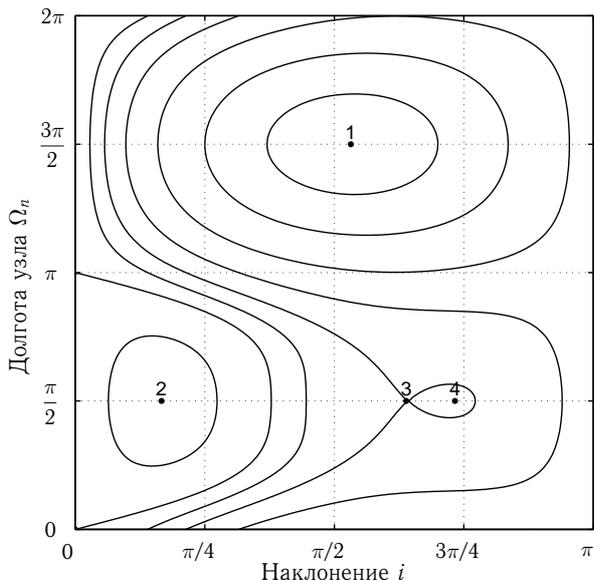


Рис. 9. Функция $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при $f_1 < f < f_2$

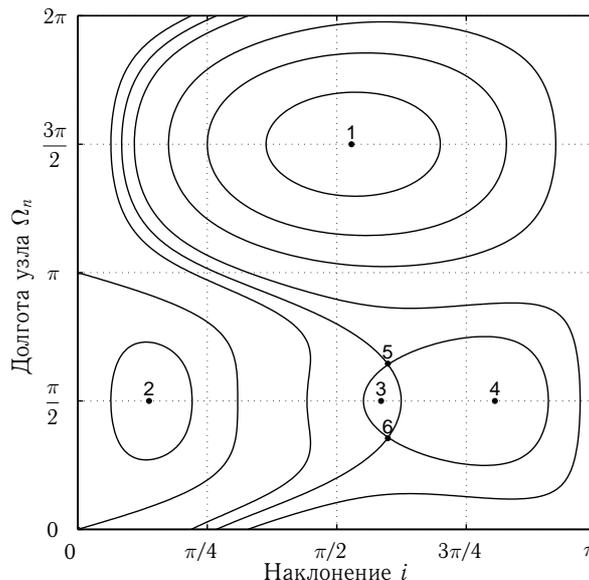


Рис. 10. Функция $\bar{H}(i, \Omega_n)$ при $f > f_2$

Из (18), (24) находим положение минимума

$$i_1 = \pi - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg}^{1/3} \alpha \right), \quad f_1 = \frac{\sin(\alpha - i_1)}{\sin 2i_1} \quad (25)$$

Из рис. 8 видно, что при $f > f_1$ отдельному значению f соответствует уже три значения наклона, что, в свою очередь, качественно отражается на функции $\bar{H}(i, \Omega_n)$ (рис. 9): на прямой $\Omega_n = \frac{\pi}{2}$ от точки с абсциссой $i = i_1$ отделяются экстремум 3 и седловая точка 4. Поэтому точку (25) можно считать точкой бифуркации.

Дальнейшее увеличение параметра f ведет к тому, что седловая точка при некотором критическом значении $f = f_2$ в свою очередь разделяется на три точки (рис. 10) — экстремум 4, лежащий на прямой $\Omega_n = \frac{\pi}{2}$, и седловые точки 5 и 6. Положение второй точки бифуркации найдем из условия

$$\mathbb{J}|_{\Omega_n = \pi/2} = \left(\Omega k \sin \alpha \sin i - \frac{3}{10} \sqrt{M} (a^2 - b^2) \sin^2 i \right) \times \left(\Omega k \cos(\alpha - i) + \frac{3}{10} \sqrt{M} (a^2 - c^2) \cos 2i \right) = 0 \quad (26)$$

Второй множитель в (26) в силу (24) обращается в нуль при $i = i_1$ $f = f_1$, а потому для нахождения положения второй точки бифуркации достаточно равенства нулю первого множителя в (26), который с учетом (19) приводится к виду

$$\sin \alpha - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \cdot 2f \sin i = 0,$$

которое вместе с (18) образует систему уравнений, из которой находим

$$i_2 = \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} \operatorname{tg} \alpha \right), \quad f_2 = \frac{\sin(\alpha - i_2)}{\sin 2i_2}. \quad (27)$$

Возможен также случай, когда вторая точка бифуркации оказывается не слева, а справа от первой, т.е. $i_2 > i_1$. Из (25) и (27) находим, что условием этого является

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg}^{1/3} \alpha,$$

откуда

$$\alpha > \alpha_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right)^{3/2} \quad (28)$$

В частности, при $\alpha = \alpha_0$ первая и вторая точки бифуркации совпадают, и при $f > f_1 = f_2$ от них сразу отделяются четыре точки: два экстремума, лежащие на прямой $\Omega_n = \frac{\pi}{2}$, и две седловые точки.

Таким образом, при $\Omega_n = \frac{\pi}{2}$ возможно различное количество устойчивых орбитальных плоскостей: при $f < f_1$ — одна, при $f_1 < f < f_2$ — две, при $f > f_2$ — три плоскости.

Напротив, при $\Omega_n = \frac{3\pi}{2}$ для различных значений f возможно лишь одно значение наклона, причем оно соответствующее устойчивому положению орбитальной плоскости (точка 1 на рис. 8–10). Подстановка $\Omega_n = \frac{3\pi}{2}$ в (10) приводит к уравнению

$$\sin(\alpha + i) + f \sin 2i = 0, \quad (29)$$

служащее для нахождения искомого наклона, а именно: наклонение будет определяться выражениями

$$\cos i = -\frac{\mathbb{Z} \cos \alpha}{\sin \alpha + 2f\mathbb{Z}}, \quad \sin i = \mathbb{Z},$$

где \mathbb{Z} — действительный корень уравнения

$$4\mathbb{Z}^4 f^2 + 4\mathbb{Z}^3 f \sin \alpha + (1 - 4f^2)\mathbb{Z}^2 - 4f\mathbb{Z} \sin \alpha - \sin^2 \alpha = 0,$$

равный $\mathbb{Z} = \eta_2 - \frac{1}{4f} \sin \alpha + \sqrt{\eta_3 - \eta_4 + \eta_1}$ с учетом обозначений (23).

5. ВЫВОДЫ

Наши исследования показали, что во внешнем гравитационном потенциале однородного трехосного эллипсоида, совершающего вращение либо вокруг оси одной из осей инерции, либо наклонное, возможно существование такие движений частиц, при которых орбита целиком лежит приблизительно в одной плоскости. В зависимости от трехосности эллипсоида, ориентации и величины вектора угловой скорости его вращения, а также от размеров и эксцентриситета самой орбиты возможно существование нескольких ориентаций орбитальной плоскости, при которых наклонение и долгота узла орбиты не претерпевают вековых изменений и устойчиво сохраняют свои значения. Получены условия, показывающие, сколько вариантов ориентации «устойчивой» плоскости возможно при заданных параметрах эллипсоида и орбиты.

1. *Батраков Ю.В.* Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида // Бюллетень Ин-та теор. астрономии АН СССР. — 1957. — Т. 6, № 8 (81). — С. 524–542.
2. *Аксенов Е.П.* О периодических движениях частицы в поле тяготения вращающегося тела // Вестник МГУ, серия 3. Физика, астрономия. — 1960. — № 4. — С. 86–95.
3. *Аксенов Е.П.* Почти круговые движения частицы в поле тяготения вращающегося тела // Вестник МГУ, серия 3. Физика, астрономия. — 1960. — № 5. — С. 94–102.
4. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1968. — 800 с.
5. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — М.: Наука, 1976. — 864 с.
6. *Загребин Д.В.* Введение в теоретическую гравиметрию. — Л.: Наука, 1976. — 293 с.
7. *David L.P., Steiman-Cameron T.Y., Durisen R.H.* Preferred orbit planes in triaxial galaxies. II. Tumbling about a nonprincipal axis // *Astroph. J.* — 1984. — Vol. 286. — Pp. 53–61.
8. *David L.P., Steiman-Cameron T.Y., Durisen R.H.* Preferred orbit planes in tumbling triaxial galaxies. III. Application to the Schwarzschild ellipsoid // *Astroph. J.* — 1985. — Vol. 295. — Pp. 65–72.
9. *Durisen R.H., Tohline J.E., Burns J.A., Dobrovolskis R.* Preferred orbit planes in the gravitational field of a tumbling spheroidal galaxy // *Astroph. J.* — 1983. — Vol. 264. — Pp. 392–407.
10. *Манк У., Макдональд Г.* Вращение Земли. — М.: Мир, 1964. — 382 с.
11. *Огородников К.Ф.* Динамика звездных систем. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 627 с.

Поступила в редакцию 14.09.2008