



До розрахунку середньої довжини вільного пробігу частинок всередині зір

С.Г. Кузьменков

Херсонський державний університет

Наводиться метод розрахунку середньої довжини вільного пробігу заряджених частинок всередині зір. Порівнюються розраховані значення середньої довжини вільного пробігу електронів і фотонів всередині Сонця.

К РАСЧЁТУ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА ЧАСТИЦ ВНУТРИ ЗВЁЗД, Кузьменков С.Г. — Представлен метод расчёта средней длины свободного пробега заряженных частиц внутри звёзд. Сравниваются рассчитанные значения средней длины свободного пробега электронов и фотонов внутри Солнца.

TO CALCULATION OF AVERAGE FREE PATH LENGTH OF PARTICLES INSIDE STARS, by Kuzmenkov S.G. — The method of calculation of average free path length of charged particles inside stars is presented in the article. The calculated values of average free path length of electrons and photons inside the Sun are compared in the article.

1. ВСТУП

Для з'ясування внутрішньої будови зір і розрахунку їх моделей важливою є відповідь на питання, яким чином енергія переноситься із надр до поверхні зорі. В існуючих підручниках з загальної астрономії [1, 5, 6], загальної [2, 9] та теоретичної астрофізики [3, 11], і навіть у монографіях, присвячених внутрішній будові зір [4, 10, 13–15], наголошується як дещо очевидне або як встановлений факт, що у нормальних зорях перенесення енергії із більш нагрітих в менш нагріті шари відбувається завдяки двом процесам: променистому перенесенню та конвекції. Домінування того чи іншого механізму визначається конкретними локальними умовами: градієнтом температури, густиною та непрозорістю речовини. Але ж насправді є третій спосіб перенесення енергії — теплопровідність. Так, у звичайних газів навіть за вельми високих температур теплопровідність зовсім мала у порівнянні з променистим перенесенням або конвекцією і тому її можна не враховувати. Але всередині навіть звичайних зір ми маємо справу з плазмою, густина якої може сягати $\rho \sim (10^5 - 10^6)$ кг/м³, тому нехтування теплопровідністю не може вважатися таким вже очевидним. Абсолютне ігнорування теплопровідності в нормальних зорях, строго кажучи, не обґрунтоване кількісно. Таке обґрунтування особливо важливе під час навчання астрономії, оскільки робить цей процес доказовим, а отже, й більш переконливим та ефективним, наближає процес пізнання до наукового.

Насправді немає принципової різниці між теплопровідністю та променистим перенесенням, оскільки в обох випадках відбувається обмін енергією під час зіткнень енергійних частинок з менш енергійними. А ефективність перенесення енергії визначається двома факторами: енергією, яку переносять частинки, та відстанню, яку вони долають між зіткненнями, або середньою довжиною вільного пробігу.

Порівняємо густину енергії електронів та фотонів, наприклад, у центрі Сонця. Для електронів з концентрацією n_e густина енергії дорівнює

$$\omega_e = \frac{3}{2} n_e k T, \quad (1)$$

Неважко показати, що в результаті повної іонізації концентрація електронів становить

$$n_e = \frac{1}{2} (1 + X) \frac{\rho}{m_p} \quad (2)$$

де X — вагова частка гідрогену, ρ — густина речовини, m_p — маса протона.

Приймаючи для центра Сонця $X = 0.65$ та $\rho = 1.49 \cdot 10^5$ кг/м³, знаходимо $n_e = 7.36 \cdot 10^{31}$ м⁻³. Тоді для $T = 1.55 \cdot 10^7$ К дістаємо $\omega_e = 2.36 \cdot 10^{16}$ Дж/м³.

Для фотонів густина енергії визначається формулою

$$\omega_\gamma = a T^4, \quad (3)$$

де a — стала густини теплового випромінювання ($a = 7.56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^4}$), і тоді $\omega_\gamma = 4.36 \cdot 10^{13}$ Дж/м³. Отже, $\omega_e / \omega_\gamma \approx 540$.

Для середньої точки Сонця ($r = 0.5R_{\odot}$, де R_{\odot} — радіус Сонця) за $X = 0.70$, $\rho = 1.32 \cdot 10^3$ кг/м³ та $T = 4 \cdot 10^6$ К [6] отримуємо $n_e = 6.72 \cdot 10^{29}$ м⁻³, і тоді $\omega_e/\omega_{\gamma} \approx 290$. Бачимо, що із віддаленням від центру зорі відношення ω_e/ω_{γ} зменшується, проте лишається досить великим. Отже, всередині зір (за винятком наймасивніших) енергія, що зосереджена в електронах, значно переважає енергію, яка переноситься випромінюванням.

Розрахуємо тепер середні довжини вільного пробігу електронів та фотонів всередині Сонця та порівняємо їх між собою. Зауважимо, що ці розрахунки мають певні особливості (або інакше, містять “підводні камені”), тому мають важливе значення і з методологічної точки зору.

2. СЕРЕДНЯ ДОВЖИНА ВІЛЬНОГО ПРОБІГУ ЕЛЕКТРОНІВ ВСЕРЕДИНИ СОНЦЯ

Оскільки ми маємо справу із зарядженими частинками, то під зіткненням слід розуміти кулонівське розсіяння, коли швидша частинка в результаті взаємодії з іншою (повільнішою) частинкою відхиляється від початкової траєкторії на помітний кут (зазвичай приймається, що на кут 90° і більше). Газ всередині більшої частини Сонця складається переважно з електронів, протонів та ядер гелію. Тому розглянемо розсіяння електронів на електронах, протонах та α -частинках та підрахуємо спочатку відповідні парціальні довжини l_{ee} , l_{ep} , l_{eHe} .

З урахуванням того, що величина, обернена концентрації, є об’єм, який припадає на одну частинку, і на кожний тип частинок припадає певна частка від загального об’єму, для середніх значень матимемо

$$\bar{l}_{ee} = \frac{n}{\sqrt{2} n_e^2 \sigma_{ee}}, \quad (4)$$

$$\bar{l}_{ep} = \frac{n}{n_e n_p \sigma_{ep}}, \quad (5)$$

$$\bar{l}_{eHe} = \frac{n}{n_e n_{He} \sigma_{eHe}}, \quad (6)$$

де n_e, n_p, n_{He} — концентрації електронів, протонів та α -частинок, n — повна концентрація частинок, σ — ефективний переріз розсіяння.

Звертаємо увагу на те, що у формулах для \bar{l}_{ep} та \bar{l}_{eHe} відсутній $\sqrt{2}$ у знаменнику, який, як відомо, враховує ту обставину, що частота зіткнень визначається середньою швидкістю руху частинок по відношенню одна до одної. Але оскільки для мас частинок справедливі нерівності: $m_e \ll m_p$ і $m_e \ll m_{He}$, то для швидкостей — $\bar{v}_e \gg \bar{v}_p$ і $\bar{v}_e \gg \bar{v}_{He}$, тобто можна вважати, що протони і α -частинки порівняно з електронами знаходяться у спокої.

Грубу оцінку величини σ можна отримати, поклавши $\sigma = \pi b^2$, де b — прицільний параметр, який можна розрахувати за допомогою формули Резерфорда, що пов’язує кут розсіяння θ (див. рис.1) швидшої частинки з прицільним параметром:

$$b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}, \quad (7)$$

покладаючи в ній $\theta = \pi/2$. У цій формулі Ze — заряд частинки (мішені), на якій відбувається розсіяння, m — зведена маса системи, v — швидкість швидшої частинки.

Щоб отримати середню довжину вільного пробігу, з максимальним урахуванням кулонівської взаємодії, необхідно зінтегрувати прицільний параметр по області його значень: від b , що відповідає куту $\pi/2$ (фактично охоплює усі кути розсіяння від $\pi/2$ до π), до деякого b_{\max} , що відповідає малим кутам розсіяння.

Якщо газ складається в основному із заряджених частинок (плазма), то існує максимальний прицільний параметр, який дорівнює [8, 12]

$$b_{\max} = R_D = \left(\frac{n_e e^2 + n_p e^2 + 2n_{He} e^2}{\epsilon_0 k T} \right)^{-1/2}, \quad (8)$$

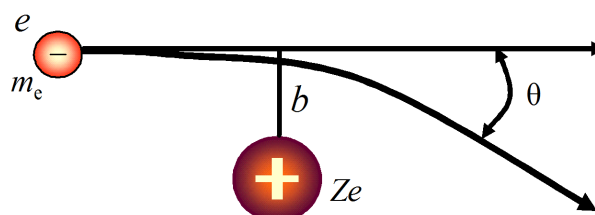


Рис. 1. Розсіяння електрона на позитивно зарядженій частинці

де R_D — дебаєвський радіус (інакше, радіус екранування). Оскільки у зорях концентрація α -частинок мала порівняно з концентрацією протонів та електронів, то

$$R_D \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2}}. \quad (9)$$

Для врахування розсіяння на малих кутах скористаємось поняттям транспортного перерізу, що визначається так [7]:

$$\sigma_{tr} = \int (1 - \cos \theta(b)) 2\pi b db, \quad (10)$$

де $\theta = \theta(b)$ — кут розсіяння більш швидкої частинки як функція прицільного параметру b .

За малих θ можемо написати

$$1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2}. \quad (11)$$

А з формули Резерфорда (7) дістаємо

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2} = \frac{Z e^2}{4\pi \varepsilon_0 m v^2 b}. \quad (12)$$

Тоді

$$\sigma_{tr} \approx \pi \int_b^{R_D} \theta^2 b db = \frac{Z^2 e^4}{4\pi \varepsilon_0^2 m^2 v^4} \int_b^{R_D} \frac{db}{b} = \frac{Z^2 e^4}{4\pi \varepsilon_0^2 m^2 v^4} \ln \Lambda, \quad (13)$$

де $\Lambda = R_D/b$, а $\ln \Lambda$ — так званий кулонівський логарифм [7, 12].

Нарешті, для парціальних довжин вільного пробігу знаходимо

$$\bar{l}_{ee} = \frac{9\pi}{\sqrt{2}} \frac{n(\varepsilon_0 k T)^2}{n_e^2 e^4 \ln \Lambda_{ee}}, \quad (14)$$

$$\bar{l}_{ep} = \frac{36\pi n(\varepsilon_0 k T)^2}{n_e n_p e^4 \ln \Lambda_{ep}}, \quad (15)$$

$$\bar{l}_{eHe} = \frac{9\pi n(\varepsilon_0 k T)^2}{n_e n_{He} e^4 \ln \Lambda_{eHe}}. \quad (16)$$

Тут враховано, що зведена маса (у формулі Резерфорда) у разі розсіяння електронів на електронах дорівнює $m_e/2$, а у інших випадках, оскільки $m_p \gg m_e$ та $m_{He} \gg m_e$, просто m_e . Тут також враховано, що заряд ядра гелію дорівнює $2e$. Під v розуміємо середньоквадратичну швидкість електронів

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}. \quad (17)$$

Для різних процесів розсіяння отримуємо

$$\Lambda_{ee} = \Lambda_{eHe} = \frac{6\pi}{e^3} \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 k T)^3}{n}}, \quad (18)$$

$$\Lambda_{ep} = \frac{12\pi}{e^3} \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 k T)^3}{n}}, \quad (19)$$

Концентрація електронів визначається формулою (2), а протонів, ядер гелію і повна концентрація відповідно:

$$n_p = \frac{X\rho}{m_p}, \quad n_{He} = \frac{Y\rho}{m_{He}} \approx \frac{Y\rho}{4m_p}, \quad n = \frac{\rho}{\mu m_p}, \quad (20)$$

де відносна молекулярна маса за повної іонізації речовини, як відомо, дорівнює

$$\mu = \frac{4}{6X + Y + 2}. \quad (21)$$

Приймаючи для центра Сонця $\rho = 1.49 \cdot 10^5$ кг/м³, $X = 0.65$, $Y = 0.33$, а також $T = 1.55 \cdot 10^7$ К, дістаємо

$$n = 1.39 \cdot 10^{32} \text{ м}^{-3}, \quad n_e = 7.36 \cdot 10^{31} \text{ м}^{-3}, \quad n_p = 5.80 \cdot 10^{31} \text{ м}^{-3}, \quad n_{He} = 7.36 \cdot 10^{30} \text{ м}^{-3}, \\ R_D = 2.31 \cdot 10^{-11} \text{ м}, \quad \ln \Lambda_{ee} = \ln \Lambda_{eHe} = 3.47, \quad \ln \Lambda_{ep} = 4.16.$$

Тоді для парціальних довжин вільного пробігу отримуємо

$$\bar{l}_{ee} \approx 0.8 \text{ нм}, \quad \bar{l}_{ep} \approx 4.8 \text{ нм}, \quad \bar{l}_{eHe} \approx 11.5 \text{ нм}.$$

Остаточно для повної середньої довжини вільного пробігу електронів знаходимо

$$\bar{l}_e = \left(\frac{1}{\bar{l}_{ee}} + \frac{1}{\bar{l}_{ep}} + \frac{1}{\bar{l}_{eHe}} \right)^{-1} \approx 0.65 \text{ нм.}$$

На відстані $r = 0.5R_\odot$ від центру матимемо:

$$n = 1.28 \cdot 10^{30} \text{ м}^{-3}, \quad n_e = 6.71 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}, \quad n_p = 5.52 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}, \quad n_{He} = 5.52 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3},$$

$$\ln \Lambda_{ee} = \ln \Lambda_{eHe} = 3.78, \quad \ln \Lambda_{ep} = 4.47,$$

$$\bar{l}_{ee} \approx 5.5 \text{ нм}, \quad \bar{l}_{ep} \approx 32 \text{ нм}, \quad \bar{l}_{eHe} \approx 94 \text{ нм.}$$

І результуюча довжина становить $\bar{l}_e \approx 4.5 \text{ нм}$.

3. СЕРЕДНЯ ДОВЖИНА ВІЛЬНОГО ПРОБІГУ ФОТОНІВ ВСЕРЕДИНІ СОНЦЯ

Середня довжина вільного пробігу фотонів визначається з умови

$$\bar{\tau}_\nu = \alpha_\nu \bar{l}_\nu = 1, \quad (22)$$

де $\bar{\tau}_\nu$ — середня оптична товща середовища, в якому розповсюджуються фотони, α_ν — коефіцієнт поглинання (ослаблення). Всі ці величини, взагалі кажучи, залежать від частоти фотона. В свою чергу

$$\alpha = \rho \kappa \quad (23)$$

де κ — коефіцієнт непрозорості зоряної речовини. Тут і далі використовується коефіцієнт непрозорості, вже осереднений за частотою. Отже,

$$\bar{l}_\gamma = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\rho \kappa} \quad (24)$$

В центральних областях Сонця головним механізмом непрозорості є розсіяння на вільних електронах (томсонівське розсіяння). В цьому разі

$$\kappa_T = \frac{n_e \sigma_T}{\rho} = \frac{1+X}{2m_p} \sigma_T = \frac{1+X}{2m_p} \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 = 0.02(1+X) = 0.033 \text{ м}^2/\text{кг.}$$

Тоді $\bar{l}_\gamma = 0.2 \text{ мм}$.

В більш холодних шарах Сонця до томсонівського розсіяння додається так зване вільно-вільне (гальмівне) поглинання (насправді поглинання фотона не відбувається, оскільки вільний електрон не може поглинути фотон. Проте, якщо поблизу такого електрона знаходиться заряджений іон, то можливе некогерентне розсіяння фотона, тобто зміна його енергії, що призводить до збільшення непрозорості). Коефіцієнт непрозорості процесу вільно-вільного поглинання визначається законом Крамерса у такому вигляді [11]:

$$\kappa_{ff} \approx 3.7 \cdot 10^{18} \cdot (1+X) (1+Y) \rho T^{-7/2}. \quad (25)$$

На відстані $r = 0.5R_\odot$ від центру, якщо взяти $\rho = 1.32 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ і $T = 4 \cdot 10^6 \text{ К}$, то $\kappa_{ff} = 0.065 \text{ м}^2/\text{кг}$ і тоді

$$\kappa = \kappa_T + \kappa_{ff} \approx 0.1 \text{ м}^2/\text{кг.}$$

Незважаючи на зростання непрозорості, завдяки зменшенню густини, середня довжина вільного пробігу фотонів навіть збільшується до $\bar{l}_\gamma = 7.5 \text{ мм}$.

ВИСНОВКИ

1. У центрі Сонця $\bar{l}_\gamma/\bar{l}_e \approx 3 \cdot 10^5$, а на половині радіусу це відношення ще збільшується — $\bar{l}_\gamma/\bar{l}_e \approx 1.7 \cdot 10^6$. Отже, середня довжина вільного пробігу фотонів набагато (п'ять-шість порядків!) перевищує цю величину для електронів, що більш ніж компенсує перевагу, яку мають електрони за енергією. Механізм теплопровідності є неефективним всередині звичайних зір саме завдяки дуже короткій довжині вільного пробігу електронів порівняно з фотонами. Отже, під час розрахунку моделей нормальних зір теплопровідність дійсно можна зовсім не враховувати.

2. Запропонований метод розрахунку довжини вільного пробігу заряджених частинок всередині зір має універсальний характер і може застосовуватись, наприклад, для обчислення середньої довжини вільного пробігу протонів з метою уточнення особливостей перебігу термоядерних реакцій.

1. Андрієвський С.М., Климишин І.А. Курс загальної астрономії: Навчальний посібник. — Одеса: Астропринт, 2007. — 480 с.
2. Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика. — Фрязино: Век-2, 2006. — 493 с.
3. Зельдович Я.Б., Блинников С.И., Шакура Н.И. Физические основы строения и эволюция звёзд. — М.: Изд-во МГУ, 1981. — 150 с.

4. *Каплан С.А.* Физика звёзд. — М.: Наука, 1977. — 208 с.
5. *Климишин І.А.* Астрономія. — Львів: Світ, 1994. — 384 с.
6. *Кононович Э.В., Мороз В.И.* Общий курс астрономии. Учебное пособие / Под ред. В.В.Иванова. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 544 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
8. *Ленг К.* Астрофизические формулы. Руководство для физиков и астрофизиков. Часть 1. — М.: Мир, 1978. — 448 с.
9. *Мартынов Д.Я.* Курс общей астрофизики. — М.: Наука, 1988. — 640 с.
10. *Масевич А.Г., Тутуков А.В.* Эволюция звёзд: теория и наблюдения. — М.: Наука, 1988. — 280 с.
11. *Соболев В.В.* Курс теоретической астрофизики. — М.: Наука, 1975. — 504 с.
12. *Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа. — М.: Мир, 1965. — 212 с.
13. *Тейлер Р.Дж.* Строение и эволюция звёзд. — М.: Мир, 1973. — 280 с.
14. *Шварцшильд М.* Строение и эволюция звезд. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 432 с.
15. *Шкловский И.С.* Звёзды: их рождение, жизнь и смерть. — М.: Наука, 1984. — 384 с.

Надійшла до редакції 25.08.2009