Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 6 • № 2 • 2009 С. 155 – 157

Применение методов Эверхарта 15, 17, 19, 21 порядков для вычисления траектории движения небесных тел в околопланетном пространстве

А.А. Базей, И.В. Кара

Одесская астрономическая обсерватория при Одесском национальном университете им. И.И. Мечникова

В статье мы предлагаем в общем виде формулы производных по декартовым координатам для зональных гармоник потенциала планет. Эти формулы нужны для описания движения тел в околопланетном пространстве. Используемыми методами численного интегрирования полученных уравнений движения являются методы Эверхарта. В статье представлены вычисленные необходимые для построения методов коэффициенты. Представленные формулы и методы Эверхарта проверены на задаче исследования орбиты астероида (144898) 2004 VD17. Результаты наших вычислений согласуются с результатами NASA.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЕВЕРХАРТА 15, 17, 19, 21 ПОРЯДКІВ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ НЕБЕСНИХ ТІЛ В НАВКОЛОПЛАНЕТНОМУ ПРОСТОРІ, Базей А.А., Кара І.В. — В статті ми пропонуємо в загальному вигляді формули похідних по декартових координатах для зональних гармонік потенціалу планет. Ці формули потрібні для опису руху тіл в навколопланетному просторі. Методами, які використовуються для чисельного інтегрування отриманих рівнянь руху є методи Еверхарта. В статті представлені обчислені необхідні для побудови методів коефіцієнти. Представлені формули та методи Еверхарта перевірені на задачі дослідження орбіти астероїда (144898) 2004 VD17. Результати наших обчислень співпадають з результатами NASA.

USING OF EVERHART'S METHOD OF 15, 17, 19 AND 21st-ORDER FOR COMPUTATION OF CELESTIAL BODIES' TRAJECTORIES IN THE CIRCUMPLANETARY SPACE, by Bazey A.A., Kara I.V. — In this article we propose in a general form the formulas of the derivatives on the Cartesian co-ordinates for zonal harmonics of planetary potential. These formulas are necessary for description of motion of the Solar system bodies in the circumplanetary space. Used methods of the numerical integration of the derived equations of motion are the Everhart's methods. Here we present calculated coefficients that are necessary for the method construction. Presented formulas and Everhart's methods are checked using the problem of the asteroid (144898) 2004 VD17 orbit. It should be noted that our results agree well with the NASA predictions.

Одной из актуальных задач теоретической астрономии является вычисление траектории движения небесных тел в околопланетном пространстве. Сложность описания такого движения заключается в том, что планеты имеют конечные размеры и потому их потенциал в общем случае не является центрально-симметричным. В общем виде сам потенциал имеет довольно сложный вид, включающий в себя вклады от центрально-симметричного компонента и от компонентов зональных и тессеральных гармоник. Вклады от зональных и тессеральных гармоник описывают отличия гравитационного потенциала планеты от гравитационного потенциала материальной точки. В зависимости от требуемой точности результата исследователь сам принимает решение об учете потенциала планеты. В задачах с быстро движущимися объектами, таких как астероиды, учетом возмущения от тессеральных гармоник потенциала можно пренебречь из-за незначительного времени действия этого возмущения на объект. В нашей работе мы получили явный вид производных потенциала для зональных гармоник в уравнениях движения тел в околоземном пространстве.

Будем представлять движение небесного тела как движение материальной частицы бесконечно малой массы в поле тяготения центрального тела массой M под действием сил, определенных потенциальной функцией U, и совокупности сил $\vec{\mathbf{P}}$, не имеющих потенциала. Тогда дифференциальные уравнения движения частицы в инерциальной прямоугольной системе координат, связанной с центральным телом M, можно представить в виде:

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial\vec{\mathbf{r}}}+\vec{\mathbf{P}} \tag{1}$$

с начальными условиями $\vec{\mathbf{r}}_0=\vec{\mathbf{r}}(t_0)$, $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_0=\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t_0)$, где

$$U=\frac{GM}{r}\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\left[C_n^m\cos m\lambda+S_n^m\sin m\lambda\right]\right)$$

Первое слагаемое в выражении (1) U — потенциал, обусловленный притяжением несферической планеты, а второе слагаемое $\vec{\mathbf{P}}$ представляет собой потенциал возмущающих сил; $\vec{\mathbf{r}} = (x; y; z)^T$ — вектор положения тела; t — время; r — модуль вектора положения; G — универсальная гравитационная постоянная; $U = U(t, \vec{\mathbf{r}})$; $\dfrac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{r}}}$ — градиент.

В ходе работы мы получили выражения частных производных по декартовым координатам для зональных вкладов разложения потенциала U. Формулы (2) выражают возмущение от зональных гармоник в общем виде для любого порядка n.

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{r}}} = GM\left(-\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{\partial Z}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = GM \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} r_0^n J_n \frac{x}{r^{n+3}} \left[(n+1)P_n(\sin\varphi) + \frac{z}{r}\frac{dP_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)}\right] \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y} = GM \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} r_0^n J_n \frac{y}{r^{n+3}} \left[(n+1)P_n(\sin\varphi) + \frac{z}{r}\frac{dP_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)}\right] \\ \dfrac{\partial Z}{\partial z} = GM \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} r_0^n J_n \frac{1}{r^{n+3}} \left[(n+1)zP_n(\sin\varphi) - \frac{x^2+y^2}{r}\frac{dP_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)}\right] \end{cases} \tag{2}$$

Несмотря на видимую громоздкость выражений, их вычисление можно организовать довольно просто, используя рекуррентные выражения для полиномов Лежандра. Данные уравнения (2) справедливы для любой планеты. Важно использовать коэффициенты J_n выбранной планеты.

Теперь уравнения движения (1) подготовлены для численного моделирования в декартовых координатах. Поскольку аналитическое решение задачи N тел невозможно, то необходимо выбрать и реализовать численный метод для их интегрирования. В настоящее время стандартом численного интегрирования в небесной механике являются методы Эверхарта. Описание методов можно найти во многих источниках, например [1, 2]. Коэффициенты, необходимые для построения методов от 3 до 15 нечетных порядков, приведены в авторской статье Эверхарта [2] и в некоторых специализированных справочниках [3], но только до 15 порядка. Так как на практике точность метода Эверхарта 15 порядка не всегда является удовлетворительной, мы решили воспользоваться авторской методикой Эверхарта и вычислить необходимые коэффициенты самостоятельно и избежать возможных опечаток в справочниках, например [3]. В результате нами была написана программа для вычисления коэффициентов для любого нечетного порядка. В табл. 1 приведены вычисленные с помощью нее коэффициенты для перечисленных выше порядков согласно разбиению внутри шага интегрирования $t_i = h_i \cdot \mathrm{step}$:

Таблица 1. Коэффициенты h_i для методов Эверхарта

15 порядок	17 порядок	19 порядок	21 порядок
0.05626256053692	0.044633955289969	0.03625781288320	0.03002903216149
0.18024069173689	0.144366257042146	0.11807897878999	0.09828901220985
0.35262471711317	0.286824757144431	0.23717698481496	0.19902107896310
0.54715362633055	0.454813315196573	0.38188276530470	0.32405553832334
0.73421017721541	0.628067835416728	0.53802959891899	0.46326123428434
0.88532094683909	0.785691520604369	0.69033242007236	0.60536015311421
0.97752061356128	0.908676392100206	0.82388334383701	0.73884032399154
	0.982220084852637	0.92561261029080	0.85288855035693
		0.98558759035112	0.93826792812285
			0.98808238656758

Для эволюционных задач, чем выше порядок метода, тем более длинный шаг интегрирования можно выбирать без потери точности вычислений, но использовать очень высокий порядок метода для своих задач нет смысла [4], так как в этом случае быстро падает эффективность метода. С повышением порядка метода количество вычислительных операций, а значит и время вычислений, возрастает быстрее, чем точность вычислений. Поэтому на практике мы ограничились методами 15, 17, 19 и 21 порядка. Для тестирования реализованных методов мы исследовали орбиту одного из астероидов сближающегося с Землей. Проблеме астероидной опасности уделяется сегодня много внимания по вполне понятным причинам. Открыто множество астероидов, которые считали потенциально опасными. Для многих из них после более тщательных исследований понизили уровень опасности. Нашим объектом исследований стал астероид (144898) 2004 VD17. Он был выбран для тестирования реализации методов Эверхарта и формул (2) на длительных интервалах времени. Для исследования орбиты астероида необходимо знать точные положения планет. Для этого мы воспользовались данными численной модели DE405. В эволюционном развитии орбит небесных тел могут происходить тесные сближения с планетами. В эти моменты необходимо учитывать дополнительные возмущения в их движении по формулам (2), так как после тесного сближения с планетой орбиты тел существенно изменяются и от того, как точно учтен потенциал планеты зависит достоверность вычислений после сближения.

Астероид (144898) 2004 VD17 диаметром около 600 метров обнаружили сотрудники Массачусетского технологического института в рамках проекта по обнаружению околоземных космических объектов. 23 февраля 2006 года в NASA завершили вычисления его орбиты и присвоили ему категорию опасности "2" по Туринской шкале. Оказалось, что он может столкнуться с Землей. По данным NASA столкновение возможно 4 мая 2102 года.

По результатам наших вычислений 4 мая 2102 года астероид сближается на минимальное расстояние с Землей, что соответствует данным NASA. Этот момент получается при использовании методов Эверхарта 15, 17, 19 порядков, при этом геоцентрическое расстояние около 800 000 км, то есть орбита астероида проходит за орбитой Луны. Сближений менее 10 млн. км с Венерой и Марсом до 2200 года не прогнозируется.

Для проверки достоверности вычислений на основе информации о точности элементов орбиты мы построили ансамбль траекторий некоторого множества тестовых частиц. В результате вычислений получилось, что все новые орбиты не сближаются с Землей менее 500 000 км.

В результате этой работы мы вычислили и проверили формулы для описания потенциала планет с учетом только зональных гармоник, вычислили коэффициенты необходимые для построения методов Эверхарта и программно реализовали методы Эверхарта 15, 17, 19, 21 порядков. С помощью написанной программы мы исследовали орбиту выбранного астероида. Астероид подбирался для тестирования реализации методов и сравнения их эффективности на длительных интервалах времени. В результате интегрирования выяснилось, что оптимальным методом Эверхарта по показателям точности и скорости вычислений является 19 порядок. Результаты исследования орбиты астероида согласуются с данными NASA. Программная реализация методов Эверхарта применялась также и при исследовании других астероидов сближающихся с Землей [5]. В результате всей работы написана программа, с помощью которой можно исследовать орбиту любого астероида.

1. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. — Томск: Изд-во Томского университета, 2007.
2. *Everhart E.* Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits // Celest.Mech. — 1974. — **10**. — P. 35–55.
3. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. — М.: Наука, 1984.
4. *Заусаев А.А.* Математическое моделирование движения небесных тел на основе высокоточных разностных схем. — Самара, 2005.
5. *Токовенко А.А., Кара И.В.* Тесное сближение астероида Apophis 99942 с Землей // Международная конференция «Околоземная астрономия 2007», п. Терскол, 2007 г. — С.9.

Поступила в редакцию 25.07.2009