Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 6 • № 1 • 2009 С. 118 – 126

Периодические орбиты внутри самогравитирующего неоднородного прецессирующего эллипсоида

А.А. Терещенко

Национальный авиационный университет, Киев

Рассмотрена модель движения частиц внутри трехосного неоднородного эллипсоида с квадратичным распределением плотности, убывающим от центра к периферии, с учетом прецессии (наклонного вращения) эллипсоида. Построены приближенные аналитические решения, описывающие форму периодических орбит.

ПЕРІОДИЧНІ ОРБІТИ ВСЕРЕДИНІ САМОГРАВІТУЮЧОГО НЕОДНОРІДНОГО ПРЕЦЕСУЮЧОГО ЕЛІПСОЇДА, Терещенко А.О. — Розглянуто модель руху частинок всередині тривісного неоднорідного еліпсоїда з квадратичним розподілом густини, яка спадає від центру до периферії, з врахуванням прецесії (нахиленого обертання) еліпсоїда. Побудовано наближені аналітичні розв'язки, які описують форму періодичних орбіт.

PERIODIC ORBITS INSIDE THE SELF-GRAVITATING INHOMOGENEOUS PRECESSING ELLIPSOID, by Tereshchenko A.A. — A model of particle's motion inside a triaxial inhomogeneous ellipsoid having a quadratic density distribution that decreases from center to the ellipsoid's surface is examined. Precession (or inclined rotation) of the ellipsoid is taken into account. Approximate analytical solutions that define the form of periodical orbits are obtained.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование периодических орбит во внутреннем гравитационном поле эллипсоида важны для изучения динамики газопылевого вещества в галактиках, околопланетных дисках, космогонии Солнечной системы и внутреннего строения глобул межзвездного вещества. На определенной стадии эволюции галактик и околозвездных газопылевых дисков гравитационный потенциал в основном определяется звездной компонентой, поэтому оседание (аккреция) газопылевой материи происходит во внешнем гравитационном поле, иными словами, в динамических задачах можно не учитывать самогравитацию газопылевого вещества, что правомерно при рассмотрении глобальных процессов, которые приводят к формированию различных газопылевых образований в небесных телах. Таким образом, задачи космической газодинамики в приближении частиц можно заменить небесно-механическими. Исследованию движения частиц во внутреннем гравитационном поле эллипсоида были посвящены работы [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?].

Из астрофизических наблюдений известно, что газопылевые образования (диски и кольца) имеют различную форму, ориентацию и кинематику во внешнем гравитационном поле [?, ?, ?, ?, ?], в связи с чем возникает вопрос об их образовании. Здесь возможны рассмотрение прямой и обратной задач небесной механики — определение свойств семейств замкнутых орбит частиц в гравитационном поле, либо определение гравитационного поля и внутреннего строения небесных тел по известным форме газопылевого образования и распределению скоростей в нем.

На динамику газопылевого вещества влияет трехосность гравитационного потенциала, вращение и распределение плотности в небесных телах.

Основная особенность, которую вносит трехосность — это несимметрия динамики аккрецирующих частиц. В связи с этим возникает бифуркация решений, т.е. возможны несколько вариантов формирования газопылевых структур (оседание на экваториальную либо на наклонную плоскость). Важная роль вращения главного тела была отмечена в работах [?, ?], однако причины возникновения наклонного вращения газопылевых образований до конца не изучены, поскольку это связано с динамической эволюцией галактик и начальными условиями. По большей мере исследовались орбиты внутри однородного самогравитирующего эллипсоида, однако глобальная неоднородность распределения плотности может также вносить существенные ограничения в динамику газопылевого вещества. Неоднородности можно учитывать двояким образом: 1) задавая потенциал неоднородной самогравитирующей конфигурации; 2) задавая распределение плотности. В данной работе гравитационный потенциал будет задаваться как внутренний потенциал эллипсоида с квадратичным распределением плотности, убывающим от центра к периферии. При этом аналитические расчеты делаются в предположении, что трехосность и угловая скорость вращения эллипсоида не считаются малыми.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Предположим, что вектор угловой скорости вращения эллипсоида $\vec{\mathbf{\Omega}}$ расположен в плоскости xz под некоторым углом α к оси z; таким образом, предполагается, что галактика осуществляет наклонное вращение с угловой скоростью Ω.

Во вращающейся системе координат, связанной с телом галактики, уравнения движения газопылевой частицы имеют вид

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \nabla\Phi - 2\vec{\mathbf{\Omega}}\times\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{\Omega}}\times(\vec{\mathbf{\Omega}}\times\vec{\mathbf{r}}) \tag{1}$$

или в декартовой системе координат

$$\begin{cases} \ddot{x} = \quad \Omega\cos\alpha\,(2\dot{y}+\Omega\cos\alpha\cdot x+\Omega\sin\alpha\cdot z)+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ \ddot{y} = -2\Omega\cos\alpha\cdot\dot{x}+2\Omega\sin\alpha\cdot\dot{z}+\Omega^2 y+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ \ddot{z} = \quad \Omega\sin\alpha\,(-2\dot{y}-\Omega\cos\alpha\cdot x+\Omega\sin\alpha\cdot z)+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}, \end{cases} \tag{2}$$

где x, y, z — декартовы координаты частицы, а слагаемые $-2\vec{\mathbf{\Omega}}\times\vec{\mathbf{r}}$ и $-\vec{\mathbf{\Omega}}\times(\vec{\mathbf{\Omega}}\times\vec{\mathbf{r}})$ представляют собой кориолисовы и центробежные силы.

Гравитационный потенциал галактики $\Phi=\Phi(x,y,z)$ будем аппроксимировать внутренним потенциалом неоднородного трехосного эллипсоида, плотность которого убывает от центра к периферии по эллипсоидальному закону

$$\rho(x,y,z)=\rho_0+\varepsilon\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right), \tag{3}$$

где a,b,c — полуоси эллипсоида ($a>b>c$). Из (3) следует, что $(\rho_0+\varepsilon)$ — значение плотности в центре эллипсоида, ρ_0 — плотность вблизи поверхности эллипсоида. Будем считать, что $\varepsilon\ll\rho_0$, то есть ε можно рассматривать в данной задаче как малый параметр.

Внутренний потенциал эллипсоида с распределением плотности вида (2) известен [?]. Его можно разбить на две части:

1) основную часть, соответствующую потенциалу однородного эллипсоида (уравнения движения (2) для такого потенциала интегрируются точно)

$$\Phi_1(x,y,z)=\mathrm{const}-\tfrac{1}{2}\left(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2\right); \tag{4}$$

2) возмущающую часть

$$\Phi_2(x,y,z)=-\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(A_2^2x^2y^2+B_2x^2z^2+C_2^2y^2z^2\right)-\tfrac{1}{4}\varepsilon\left(A_4^2x^4+B_4^2y^4+C_4^2z^4\right), \tag{5}$$

причем предполагается, что ε является малым параметром и движение частицы происходит в области, где силы $\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}$ являются малыми по модулю по сравнению с силами $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}$.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Вначале рассмотрим движение частицы в потенциале однородного эллипсоида без учета возмущающей части (5). В уравнения движения (2) вместо Φ подставим основную часть потенциала (4):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=-A^2x,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=-B^2y,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=-C^2z. \tag{6}$$

и получим систему дифференциальных уравнений, описывающую линейные колебания с тремя степенями свободы. Подстановка элементарного решения $x=X\sin(\omega t+\beta)$, $y=Y\cos(\omega t+\beta)$, $z=Z\sin(\omega t+\beta)$ в уравнения движения дает линейную относительно X, Y, Z систему уравнений

$$\begin{cases} X(A^2-\omega^2-\Omega^2\cos^2\alpha) & +2Y\omega\Omega\cos\alpha & +Z\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha & =0, \\ 2X\omega\Omega\cos\alpha & +Y(B^2-\omega^2-\Omega^2) & -2Z\omega\Omega\sin\alpha & =0, \\ X\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha & -2Y\omega\Omega\sin\alpha & +Z(C^2-\omega^2-\Omega^2\sin^2\alpha) & =0. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейшем с целью сокращения записи введем обозначение для матрицы, зависящей от параметра ω:

$$\mathsf{M}(\omega)\equiv\begin{pmatrix} A^2-\omega^2-\Omega^2\cos^2\alpha & 2\omega\Omega\cos\alpha & \Omega^2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\omega\Omega\cos\alpha & B^2-\omega^2-\Omega^2 & -2\omega\Omega\sin\alpha \\ \Omega^2\sin\alpha\cos\alpha & -2\omega\Omega\sin\alpha & C^2-\omega^2-\Omega^2\sin^2\alpha \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Система (7) имеет ненулевые решения X, Y, Z при условии равенства нулю ее определителя $|\mathsf{M}(\omega)|=0$, или в раскрытом виде

$$(A^2-\omega^2)\left(\Omega^4-(B^2+C^2+2\omega^2)\Omega^2+\omega^4-(B^2+C^2)\omega^2+B^2C^2\right)+\Omega^2(3\omega^2-\Omega^2+B^2)(A^2-C^2)\cos^2\alpha=0, \tag{9}$$

Характеристическое уравнение (9) является кубическим относительно ω^2 и позволяет найти собственные частоты ω_1, ω_2, ω_3.

При $\omega=\omega_1$ система (7) имеет семейство ненулевых решений вида

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathrm{const}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \\ p_4 \end{bmatrix},$$

при $\omega=\omega_2$ семейством решений является

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathrm{const}\cdot\begin{bmatrix} p_2 \\ 1 \\ p_5 \end{bmatrix},$$

а при $\omega=\omega_3$ семейством решений будет

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathrm{const}\cdot\begin{bmatrix} p_3 \\ 1 \\ p_6 \end{bmatrix},$$

где обозначено

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{\Omega(B^2+3\omega_1^2-\Omega^2)\cos\alpha}{2\omega_1(\omega_1^2-A^2)}, & p_4=\dfrac{\Omega(B^2+3\omega_1^2-\Omega^2)\sin\alpha}{2\omega_1(C^2-\omega_1^2)}, \\ p_2=\dfrac{\Omega(B^2+3\omega_2^2-\Omega^2)\cos\alpha}{2\omega_2(\omega_2^2-A^2)}, & p_5=\dfrac{\Omega(B^2+3\omega_2^2-\Omega^2)\sin\alpha}{2\omega_2(C^2-\omega_2^2)}, \\ p_3=\dfrac{\Omega(B^2+3\omega_3^2-\Omega^2)\cos\alpha}{2\omega_3(\omega_3^2-A^2)}, & p_6=\dfrac{\Omega(B^2+3\omega_3^2-\Omega^2)\sin\alpha}{2\omega_3(C^2-\omega_3^2)}, \end{cases} \tag{10}$$

Общее решение уравнений движения запишем в виде

$$\begin{cases} x(t)=p_1\xi\sin(\omega_1t+\beta_1)+p_2\eta\sin(\omega_2t+\beta_2)+p_3\zeta\sin(\omega_3t+\beta_3), \\ y(t)=\xi\cos(\omega_1t+\beta_1)+\eta\cos(\omega_2t+\beta_2)+\zeta\cos(\omega_3t+\beta_3), \\ z(t)=p_4\xi\sin(\omega_1t+\beta_1)+p_5\eta\sin(\omega_2t+\beta_2)+p_6\zeta\sin(\omega_3t+\beta_3), \end{cases} \tag{11}$$

где $\xi,\eta,\zeta,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ — постоянные интегрирования, определяющиеся начальными условиями;

Решения (11) допускают возможность плоского движения частицы. Пусть n_x,n_y,n_z — компоненты вектора нормали к плоскости орбиты. Тогда условием плоского движения будет

$$x(t)\,n_x+y(t)\,n_y+z(t)\,n_z=0 \tag{12}$$

при всех значениях t. Подстановка (11) в (12)

$$\begin{gathered} (p_1n_x+p_4n_z)\xi\sin(\omega_1t+\beta_1)+n_y\xi\cos(\omega_1t+\beta_1)+ \\ +(p_2n_x+p_5n_z)\eta\sin(\omega_2t+\beta_2)+n_y\eta\cos(\omega_2t+\beta_2)+ \\ +(p_3n_x+p_6n_z)\zeta\sin(\omega_3t+\beta_3)+n_y\zeta\cos(\omega_3t+\beta_3)=0 \end{gathered} \tag{13}$$

и приравнивание к нулю коэффициентов при sin и cos показывает, что, во-первых, должно выполняться условие $n_y=0$, означающее, что плоскость орбиты должна проходить через ось y, а во-вторых, что плоская орбита может существовать в одном из трех возможных случаев:

1) $p_1n_x+p_4n_z=0,\ \ \xi\neq0,\ \eta=0,\ \zeta=0$;
2) $p_2n_x+p_5n_z=0,\ \ \xi=0,\ \eta\neq0,\ \zeta=0$;
3) $p_3n_x+p_6n_z=0,\ \ \xi=0,\ \eta=0,\ \zeta\neq0$.

Таким образом, внутри наклонно вращающегося эллипсоида с потенциалом вида (4) плоская орбита может лежать в одной из трех плоскостей, проходящих через ось y и по-разному наклоненных к оси z: тангенсы угла наклона $\operatorname{tg} i=\dfrac{n_x}{n_z}$ равны соответственно

$$\operatorname{tg} i_1=-\frac{p_4}{p_1}=\frac{A^2-\omega_1^2}{C^2-\omega_1^2}\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{tg} i_2=-\frac{p_5}{p_2}=\frac{A^2-\omega_2^2}{C^2-\omega_2^2}\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{tg} i_3=-\frac{p_6}{p_3}=\frac{A^2-\omega_3^2}{C^2-\omega_3^2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Пусть в момент времени $t=0$ частица пересекает ось y в точке $y=y_0$, т.е. $x(0)=0$, $y(0)=y_0$, $z(0)=z_0$. Тогда движение в первой плоскости описывается решениями

$$x(t)=p_1y_0\sin\omega_1t,\quad y(t)=y_0\cos\omega_1t,\quad z(t)=p_4y_0\sin\omega_1t, \tag{14}$$

движение во второй плоскости — решениями

$$x(t)=p_2y_0\sin\omega_2t,\quad y(t)=y_0\cos\omega_2t,\quad z(t)=p_5y_0\sin\omega_2t, \tag{15}$$

а движение в третьей плоскости — решениями

$$x(t)=p_3y_0\sin\omega_3t,\quad y(t)=y_0\cos\omega_3t,\quad z(t)=p_6y_0\sin\omega_3t. \tag{16}$$

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение частицы внутри неоднородного эллипсоида с учетом возмущающей части потенциала (5), т.е. в уравнениях (2) потенциал будем рассматривать как $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 описываются выражениями (4) и (5). Представляет интерес нахождение периодических орбит в возмущенном потенциале.

Следуя методу усреднения, изложенному в [**?**], будем строить периодические решения уравнений (2), близкие к невозмущенным колебаниям (14)–(16).

Периодическое решение, близкое к невозмущенному решению (14) будем разыскивать в виде

$$\begin{cases} x = p_1\xi\sin\varphi + \varepsilon Q_1(\xi,\varphi) + \varepsilon^2 Q_2(\xi,\varphi) + ..., \\ y = \quad \xi\cos\varphi + \varepsilon S_1(\xi,\varphi) + \varepsilon^2 S_2(\xi,\varphi) + ..., \\ z = p_4\xi\sin\varphi + \varepsilon U_1(\xi,\varphi) + \varepsilon^2 U_2(\xi,\varphi) + ..., \end{cases} \tag{17}$$

где $Q_i(\xi,\varphi)$, $S_i(\xi,\varphi)$, $U_i(\xi,\varphi)$ — неизвестные функции, периодические по φ с периодом 2π, подлежащие определению в ходе решения задачи, а ξ и φ — медленная и быстрая переменные, имеющие смысл соответственно амплитуды и фазы в невозмущенном движении. Будем искать решения, описывающие стационарные колебания, т.е. такие, в которых амплитуда ξ не претерпевает изменений со временем, и, таким образом, величины ξ и φ подчиняются уравнениям

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + ..., \end{cases} \tag{18}$$

где $g_i(\xi)$ — также неизвестные функции, дающие поправки к частоте ω_1 невозмущенного периодического движения.

Из (18) имеем:

$$\ddot{\varphi} = \left(\varepsilon\frac{dg_1}{d\xi} + \varepsilon^2\frac{dg_2}{d\xi} + \ldots\right)\frac{d\xi}{dt} = 0. \tag{19}$$

Дифференцируя (17) по t, с учетом $\dot{\xi} = 0$ получаем:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(p_1\xi\cos\varphi + \varepsilon\dfrac{\partial Q_1}{\partial\varphi} + \varepsilon^2\dfrac{\partial Q_2}{\partial\varphi} + ...\right)\cdot\left(\omega_1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + ...\right), \\ \dot{y} = \left(-\xi\sin\varphi + \varepsilon\dfrac{\partial S_1}{\partial\varphi} + \varepsilon^2\dfrac{\partial S_2}{\partial\varphi} + ...\right)\cdot\left(\omega_1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + ...\right), \\ \dot{z} = \left(p_4\xi\cos\varphi + \varepsilon\dfrac{\partial U_1}{\partial\varphi} + \varepsilon^2\dfrac{\partial U_2}{\partial\varphi} + ...\right)\cdot\left(\omega_1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + ...\right), \end{cases} \tag{20}$$

а после еще одного дифференцирования с учетом (19)

$$\begin{cases} \ddot{x} = \left(p_1\xi\sin\varphi + \varepsilon\dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial\varphi^2} + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial\varphi^2} + ...\right)\cdot\left(\omega_1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + ...\right)^2, \\ \ddot{y} = \left(-\xi\cos\varphi + \varepsilon\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial\varphi^2} + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 S_2}{\partial\varphi^2} + ...\right)\cdot\left(\omega_1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + ...\right)^2, \\ \ddot{z} = \left(p_4\xi\sin\varphi + \varepsilon\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial\varphi^2} + ...\right)\cdot\left(\omega_1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + ...\right)^2. \end{cases} \tag{21}$$

Подставим разложения (18), (20), (21) в уравнения движения (2) и в каждом из трех уравнений приравняем в правых и левых частях коэффициенты при одинаковых степенях ε; тем самым получим систему уравнений, определяющую неизвестные функции $Q_i(\xi,\varphi)$, $S_i(\xi,\varphi)$, $U_i(\xi,\varphi)$, $g_i(\xi)$.

Выделив коэффициенты, стоящие при ε^1, получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial\varphi^2}\,\omega_1^2 - 2\omega_1\Omega\cos\alpha\dfrac{\partial S_1}{\partial\varphi} + (A^2-\Omega^2\cos^2\alpha)Q_1 + U_1\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha + \\ \qquad +\xi g_1(\xi)(\Omega\cos\alpha-\omega_1 p_1)\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\xi^3 p_1\left[p_1^2A_4^2\sin^2\varphi + (p_4^2B_2^2+A_2^2)\cos^2\varphi\right]\sin\varphi \;=\; 0 \\ \dfrac{\partial^2 S_1}{\partial\varphi^2}\,\omega_1^2 + 2\Omega\omega_1\left(\dfrac{\partial Q_1}{\partial\varphi}\cos\alpha - \dfrac{\partial U_1}{\partial\varphi}\sin\alpha\right) + (B^2-\Omega^2)S_1 + \\ \qquad +2\xi g_1(\xi)(\Omega p_1\cos\alpha - \Omega p_4\sin\alpha-\omega_1)\cos\varphi + \xi^3(p_1^2A_2^2+p_4^2C_2^2+B_4^2\cos^2\varphi)\cos\varphi \;=\; 0, \\ \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2}\,\omega_1^2 + 2\omega_1\Omega\sin\alpha\dfrac{\partial S_1}{\partial\varphi} + (C^2-\Omega^2\sin^2\alpha)U_1 + Q_1\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha - \\ \qquad -2\xi g_1(\xi)(\Omega\sin\alpha+\omega_1 p_4)\sin\varphi + \xi^3 p_4\left[(p_1^2B_2^2+p_4^2C_4^2)\sin^2\varphi + C_2^2\cos^2\varphi)\right]\sin\varphi \;=\; 0. \end{cases} \tag{22}$$

Функции $Q_1(\xi,\varphi)$, $S_1(\xi,\varphi)$, $U_1(\xi,\varphi)$ будем искать в виде

$$\begin{cases} Q_1(\xi,\varphi) = q_{10}+q_{11}\sin\varphi+q_{12}\cos\varphi+q_{13}\sin 2\varphi+q_{14}\cos 2\varphi+q_{15}\sin 3\varphi+q_{16}\cos 3\varphi, \\ S_1(\xi,\varphi) = s_{10}+s_{11}\sin\varphi+s_{12}\cos\varphi+s_{13}\sin 2\varphi+s_{14}\cos 2\varphi+s_{15}\sin 3\varphi+s_{16}\cos 3\varphi, \\ U_1(\xi,\varphi) = u_{10}+u_{11}\sin\varphi+u_{12}\cos\varphi+u_{13}\sin 2\varphi+u_{14}\cos 2\varphi+u_{15}\sin 3\varphi+u_{16}\cos 3\varphi, \end{cases} \tag{23}$$

где q_{1k}, s_{1k}, u_{1k} — неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставим (23) в (22), разложим полученные выражения в ряд Фурье по φ и приравняем к нулю выражения, стоящие при гармониках $\sin k\varphi$, $\cos k\varphi$ ($k=0,1,2,3$). В результате получим систему уравнений для определения постоянных q_{1k}, s_{1k}, u_{1k}, которую разобьем на группы. В первую группу войдут уравнения

$$\begin{cases} q_{10}(A^2-\Omega^2\cos^2\alpha)+u_{10}\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha & =0, \\ s_{10}(\Omega^2-B^2) & =0, \\ q_{10}\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha+u_{10}(C^2-\Omega^2\sin^2\alpha) & =0, \end{cases} \tag{24}$$

откуда находим

$$q_{10}=0, \qquad u_{10}=0, \qquad s_{10}=0. \tag{25}$$

Вторую группу уравнений образуют выражения, содержащие q_{12}, s_{11}, u_{12}. Запишем систему уравнений в матричном виде

$$\mathsf{M}(-\omega_1)\cdot\begin{bmatrix} q_{12} \\ s_{11} \\ u_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{26}$$

Определитель $|\mathsf{M}(-\omega_1)|$ в системе (26) равен нулю, а потому в качестве решения можно выбрать

$$q_{12}=0, \qquad s_{11}=0, \qquad u_{12}=0. \tag{27}$$

В следующую группу войдут выражения, содержащие q_{11}, s_{12}, u_{11}

$$\mathsf{M}(\omega_1)\cdot\begin{bmatrix} q_{11} \\ s_{12} \\ u_{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi(p_1\omega_1-\Omega\cos\alpha)g_1(\xi)-\frac{1}{4}\xi^3p_1(A_2^2+3p_1A_4^2+3p_4^2B_2^2) \\ 2\xi(\omega_1+p_4\Omega\sin\alpha-p_1\Omega\cos\alpha)g_1(\xi)-\frac{1}{4}\xi^3(p_1^2A_2^2+p_4^2C_2^2+3B_4^2) \\ 2\xi(\Omega\sin\alpha+p_4\omega_1)g_1(\xi)-\frac{1}{4}\xi^3p_4(C_2^2+3p_1^2B_2^2+3p_4^2C_4) \end{bmatrix} \tag{28}$$

Определитель $|\mathsf{M}(\omega_1)|$ в (28) равен нулю, однако можно подобрать функцию $g_1(\xi)$ так, чтобы система (28) имела решение. Обозначим через K_1, K_2, K_3 компоненты вектора в правой части (28). Домножим обе части (28) на вектор $\left[\begin{smallmatrix}p_1\\1\\p_4\end{smallmatrix}\right]$:

$$\left(\mathsf{M}(\omega_1)\cdot\begin{bmatrix} q_{11} \\ s_{12} \\ u_{11}\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}p_1\\1\\p_4\end{bmatrix} = \left(\mathsf{M}(\omega_1)^T\cdot\begin{bmatrix}p_1\\1\\p_4\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} q_{11} \\ s_{12} \\ u_{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}K_1\\K_2\\K_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\1\\p_4\end{bmatrix}$$

Поскольку

$$\mathsf{M}(\omega_1)^T\cdot\begin{bmatrix}p_1\\1\\p_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

то и

$$\begin{bmatrix}K_1\\K_2\\K_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\1\\p_4\end{bmatrix} = 0,$$

то есть

$$K_1p_1+K_2+K_3p_4=0.$$

Отсюда находим функцию $g_1(\xi)$
$$g_1(\xi)=-\frac{\xi^2}{8}\frac{p_1^2(2A_2^2+3A_4^2p_1^2+6B_2^2p_4^2)+p_4^2(2C_2^2+3p_4^2C_4^2)+3B_4^2}{2\Omega(p_4\sin\alpha-p_1\cos\alpha)+\omega_1(1+p_1^2+p_4^2)},\tag{29}$$
а из (28) находим неизвестные постоянные q_{11}, u_{11}, выразив их через s_{12}:
$$q_{11}=p_1s_{12}+\frac{K_1\omega_1+\frac{1}{2}K_2\Omega\cos\alpha}{(A^2-\omega_1^2)\,\omega_1},\quad u_{11}=p_4s_{12}+\frac{K_3\omega_1-\frac{1}{2}K_2\Omega\sin\alpha}{(C^2-\omega_1^2)\,\omega_1}.\tag{30}$$

Коэффициенты при $\sin k\varphi$, $\cos k\varphi$, содержащие q_{13}, q_{14}, q_{16}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, u_{13}, u_{14}, u_{16} дают три системы уравнений
$$\mathsf{M}(2\omega_1)\cdot\begin{bmatrix}q_{13}\\ s_{14}\\ u_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathsf{M}(-2\omega_1)\cdot\begin{bmatrix}q_{14}\\ s_{13}\\ u_{14}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathsf{M}(-3\omega_1)\cdot\begin{bmatrix}q_{16}\\ s_{15}\\ u_{16}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$
определители которых не равны нулю, а потому
$$\begin{cases} q_{13}=0, & q_{14}=0, & q_{16}=0,\\ s_{13}=0, & s_{14}=0, & s_{15}=0,\\ u_{13}=0, & u_{14}=0, & u_{16}=0.\end{cases}\tag{31}$$

Для поиска q_{15}, s_{16}, u_{15} получаем систему
$$\mathsf{M}(3\omega_1)\cdot\begin{bmatrix}q_{15}\\ s_{16}\\ u_{15}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\xi^3p_1(p_1^2A_4^2+p_4^2B_2^2-A_2^2)\\ \frac{1}{4}\xi^3(p_1^2A_2^2+p_4^2C_2^2-B_4^2)\\ \frac{1}{4}\xi^3p_4(p_1^2B_2^2+p_4^2C_4^2-C_2^2)\end{bmatrix}\tag{32}$$
Обозначим через d_1 определитель $\left|\mathsf{M}(3\omega_1)\right|$
$$\begin{aligned}d_1=\left|\mathsf{M}(3\omega_1)\right|=&(B^2-\Omega^2+27\omega_1^2)\cdot(A^2-C^2)\Omega^2\cos^2\alpha+\\ &+\left[81\omega_1^4-9\omega_1^2(2\Omega^2+B^2+C^2)+\Omega^4-(B^2+C^2)\Omega^2+B^2C^2\right](A^2-9\omega_1^2),\end{aligned}\tag{33}$$
а через K_4, K_5, K_6 — компоненты вектора в правой части (32). Решая систему (32), находим
$$\begin{aligned}q_{15}=&\frac{1}{d_1}\Big\{6K_5(9\omega_1^2-C^2)\omega_1\Omega\cos\alpha-K_6(27\omega_1^2+B^2-\Omega^2)\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha+\\ &+\left[\Omega^4+\Omega^2(27\omega_1^2+B^2-\Omega^2)\cos^2\alpha-(C^2+18\omega_1^2+B^2)\Omega^2++(C^2-9\omega_1^2)(B^2-9\omega_1^2)\right]K_4\Big\},\\ s_{16}=&\frac{1}{d_1}\Big\{\left[\Omega^2(A^2-C^2)\cos^2\alpha+(C^2-\Omega^2-9\omega_1^2)(A^2-9\omega_1^2)\right]K_5\\ &-6K_4\omega_1\Omega\cos\alpha(C^2-9\omega_1^2)+6K_6\omega_1\Omega\sin\alpha(A^2-9\omega_1^2)\Big\},\\ u_{15}=&\frac{1}{d_1}\Big\{6K_5(A^2-9\omega_1^2)\omega_1\Omega\sin\alpha-K_4(27\omega_1^2+B^2-\Omega^2)\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha+\\ &+\left[(B^2-\Omega^2-9\omega_1^2)(A^2-9\omega_1^2)-\Omega^2(27\omega_1^2+B^2-\Omega^2)\cos^2\alpha\right]K_6\Big\}\end{aligned}\tag{34}$$

С учетом того, что часть из коэффициентов q_{1k}, s_{1k}, u_{1k} обратились в нуль, решения (17), описывающие форму траектории в первом приближении приводится к виду
$$\begin{cases} x=(p_1\xi+\varepsilon q_{11})\sin\varphi+\varepsilon q_{15}\sin 3\varphi,\\ y=\quad(\xi+\varepsilon s_{12})\cos\varphi+\varepsilon s_{16}\cos 3\varphi,\\ z=(p_4\xi+\varepsilon u_{11})\sin\varphi+\varepsilon u_{15}\sin 3\varphi,\end{cases}\tag{35}$$
где q_{11}, u_{11} выражаются формулами (30), а q_{15}, s_{16}, u_{15} — формулами (34). Потребовав, чтобы при $\varphi=0$ орбита пересекала ось y в точке $y=\xi$, из (35) получим
$$s_{12}=-s_{16}.\tag{36}$$

Перейдем к построению второго приближения. Выделив коэффициенты, стоящие при ε^2, получаем систему уравнений:

$$
\begin{cases}
2\omega_1 g_1(\xi)\dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial\varphi^2}+\omega_1^2\dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial\varphi^2}-2\Omega\cos\alpha\left(g_1(\xi)\dfrac{\partial S_1}{\partial\varphi}+\omega_1\dfrac{\partial S_2}{\partial\varphi}\right)+(A^2-\Omega^2\cos^2\alpha)Q_2+\\
\quad+\xi^2\left[A_2^2\cos^2\varphi+(p_4^2B_2^2+3p_1^2A_4^2)\sin^2\varphi\right]Q_1+2\xi^2 p_1\sin\varphi(B_2^2p_4\sin\varphi\cdot U_1+A_2^2\cos\varphi\cdot S_1)\\
\quad+\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot U_2+2\xi\left[g_2(\xi)(\Omega\cos\alpha-p_1\omega_1)-\frac{1}{2}p_1g_1(\xi)\right]\sin\varphi\;=\;0,\\
2\omega_1 g_1(\xi)\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial\varphi^2}+\omega_1^2\dfrac{\partial^2 S_2}{\partial\varphi^2}+2\Omega\cos\alpha\left(g_1(\xi)\dfrac{\partial Q_1}{\partial\varphi}+\omega_1\dfrac{\partial Q_2}{\partial\varphi}\right)-\Omega\sin\alpha\left(g_1(\xi)\dfrac{\partial U_1}{\partial\varphi}+\omega_1\dfrac{\partial U_2}{\partial\varphi}\right)+\\
\quad+(B^2-\Omega^2)S_2+\xi^2\left[3B_4^2\cos^2\varphi-(p_1^2A_2^2+p_4^2C_2^2)\sin^2\varphi\right]S_1-\\
\quad-2\xi\cos\varphi\;\left[\frac{1}{2}g_1(\xi)^2+g_2(\xi)(p_4\Omega\sin\alpha-p_1\Omega\cos\alpha+\omega_1)-\xi\sin\varphi(p_1A_2^2Q_1+p_4C_2^2U_1)\right]\;=\;0,\\
2\omega_1 g_1(\xi)\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2}+\omega_1^2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial\varphi^2}+2\Omega\sin\alpha\left(g_1(\xi)\dfrac{\partial S_1}{\partial\varphi}+\omega_1\dfrac{\partial S_2}{\partial\varphi}\right)+(C^2-\Omega^2\sin^2\alpha)U_2+\\
\quad+\xi^2\left[C_2^2\cos^2\varphi+(B_2^2p_1^2+3p_4^2C_4^2)\sin^2\varphi\right]U_1+2\xi^2B_2^2p_1p_4\sin^2\varphi\cdot Q_1+\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot Q_2+\\
\quad+2\xi\sin\varphi\left[\xi p_4C_2^2\cos\varphi\cdot S_1-(\Omega\sin\alpha+\omega_1p_4)g_2(\xi)-\frac{1}{2}p_4g_1(\xi)^2\right]\;=\;0,
\end{cases}
\tag{37}
$$

в которой функции Q_1, S_1, U_1 уже найдены (формулы (23)), а функции Q_2, S_2, U_2 будем разыскивать в виде

$$
\begin{cases}
Q_2(\xi,\varphi)=q_{20}+q_{21}\sin\varphi+q_{22}\cos\varphi+q_{23}\sin 2\varphi+q_{24}\cos 2\varphi+q_{25}\sin 3\varphi+q_{26}\cos 3\varphi+\\
\qquad\qquad+q_{27}\sin 4\varphi+q_{28}\cos 4\varphi+q_{29}\sin 5\varphi+q_{210}\cos 5\varphi,\\
S_2(\xi,\varphi)=s_{20}+s_{21}\sin\varphi+s_{22}\cos\varphi+s_{23}\sin 2\varphi+s_{24}\cos 2\varphi+s_{25}\sin 3\varphi+s_{26}\cos 3\varphi+\\
\qquad\qquad+s_{27}\sin 4\varphi+s_{28}\cos 4\varphi+s_{29}\sin 5\varphi+s_{210}\cos 5\varphi,\\
U_2(\xi,\varphi)=u_{20}+u_{21}\sin\varphi+u_{22}\cos\varphi+u_{23}\sin 2\varphi+u_{24}\cos 2\varphi+u_{25}\sin 3\varphi+u_{26}\cos 3\varphi+\\
\qquad\qquad+u_{27}\sin 4\varphi+u_{28}\cos 4\varphi+u_{29}\sin 5\varphi+u_{210}\cos 5\varphi,
\end{cases}
\tag{38}
$$

где q_{2k}, s_{2k}, u_{2k} — неизвестные постоянные.

Подставим (38) в (37), разложим полученные выражения в ряд Фурье по φ и приравняем к нулю выражения, стоящие при $\sin k\varphi$, $\cos k\varphi$ $(k=1{,}2{,}3{,}4{,}5)$.

Как и при построении первого приближения, можно обнаружить, что часть коэффициентов в (38), а именно q_{20}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{26}, q_{27}, q_{28}, q_{29}, s_{20}, s_{21}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{27}, s_{28}, s_{210}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{26}, u_{27}, u_{28}, u_{29} обращаются в нуль.

Система уравнений для q_{21}, s_{22}, u_{21} имеет вид

$$
\mathsf{M}(\omega_1)\cdot\begin{bmatrix}q_{21}\\ s_{22}\\ u_{21}\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
p_1\xi g_1(\xi)^2+2(s_{16}\Omega\cos\alpha+\omega_1q_{11})g_1(\xi)-\frac{1}{4}\Big[(q_{11}+q_{15}-4p_1s_{16})A_2^2+(9q_{11}-3q_{15})p_1^2A_4^2\\
\quad+[p_4(3q_{11}-q_{15})+p_1(6u_{11}-2u_{15})]p_4B_2^2\Big]\xi^2+2\xi g_2(\xi)(\omega_1p_1-\Omega\cos\alpha)\\
\hdashline
\xi g_1(\xi)^2-2(q_{11}\Omega\cos\alpha+s_{16}\omega_1-u_{11}\Omega\sin\alpha)g_1(\xi)-\frac{1}{2}\Big[p_4(u_{11}+u_{15}-p_4s_{16})C_2^2+\\
p_1(q_{15}+q_{11}-p_1s_{16})A_2^2+3s_{16}B_4^2\Big]\xi^2+2\xi g_2(\xi)(\omega_1-p_1\Omega\cos\alpha+p_4\Omega\sin\alpha)\\
\hdashline
p_4\xi g_1(\xi)^2+2(\omega_1u_{11}-s_{16}\Omega\sin\alpha)g_1(\xi)-\frac{1}{4}\Big[(u_{11}+u_{15}-4p_4s_{16})C_2^2+(9u_{11}-3u_{15})p_4^2C_4^2\\
\quad+[(3u_{11}-u_{15})p_1+p_4(6q_{11}-2q_{15})]p_1B_2^2\Big]\xi^2+2\xi g_2(\xi)(\Omega\sin\alpha+p_4\omega_1)
\end{bmatrix}
\tag{39}
$$

Система (39) целиком аналогична системе (28). Поэтому тем же способом, как и для (28), находим выражение для функции $g_2(\xi)$

$$
\begin{aligned}
g_2(\xi)=\Big\{8\Big[&(q_{11}-p_1s_{16})\Omega\cos\alpha+(p_4s_{16}-u_{11})\Omega\sin\alpha-\omega_1(p_4u_{11}+p_1q_{11}-s_{16})\Big]g_1(\xi)-4\xi(p_1^2+p_4^2+1)g_1(\xi)^2-\\
&-\;3\xi^2\Big[p_1(2p_1s_{16}-q_{15}-q_{11})A_2^2+p_1^3(q_{15}-3q_{11})A_4^2+\big[(u_{15}-3u_{11})p_1+(q_{15}-3q_{11})p_4\big]p_1p_4B_2^2\;+\;2s_{16}B_4^2\;+\\
&+p_4(2p_4s_{16}-u_{11}-u_{15})C_2^2\;+\;p_4^3(u_{15}-3u_{11})C_4^2\Big]\Big\}\times\Big[8\xi\omega_1(1+p_1^2+p_4^2)+16\xi\Omega(p_4\sin\alpha-p_1\cos\alpha)\Big]^{-1}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

и коэффициенты q_{21}, u_{21}, выраженные через s_{22}

$$
q_{21}=p_1s_{22}+\frac{\omega_1K_7+\frac{1}{2}K_8\Omega\cos\alpha}{(A^2-\omega_1^2)\omega_1},\qquad u_{21}=p_4s_{22}+\frac{\omega_1K_9-\frac{1}{2}K_8\Omega\sin\alpha}{(C^2-\omega_1^2)\omega_1},
\tag{41}
$$

где K_7, K_8, K_9 — компоненты вектора в правой части (39).

Для нахождения q_{25}, s_{26}, u_{25} имеем систему уравнений

$$\mathsf{M}(3\omega_1)\cdot\begin{bmatrix}q_{25}\\ s_{26}\\ u_{25}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(18\omega_1 q_{15}-6s_{16}\Omega\cos\alpha)g_1(\xi)+\frac14\xi^2\Big[(2p_1s_{16}-2q_{15}-q_{11})A_2^2+\\ (3q_{11}-6q_{15})p_1^2A_4^2-\big[(4u_{15}-2u_{11})p_1p_4+(2q_{15}-q_{11})p_4^2\big]B_2^2\Big]\\ \hdashline 6(u_{15}\Omega\sin\alpha-q_{15}\Omega\cos\alpha+3s_{16}\omega_1)g_1(\xi)+\\ \frac14\xi^2\Big[(3s_{16}p_1^2-2p_1q_{11})A_2^2-(3s_{16}p_4^2-2p_4u_{11})C_2^2+3s_{16}B_4^2\Big]\\ \hdashline (6s_{16}\Omega\sin\alpha+18\omega_1u_{15})g_1(\xi)-\\ \frac14\xi^2\Big[\left((2u_{15}-u_{11})p_1^2+(4q_{15}-2q_{11})p_1p_4\right)B_2^2+\\ (u_{11}-2p_4s_{16}+2u_{15})C_2^2+3(2u_{15}-u_{11})p_4^2C_4^2\Big]\end{bmatrix}\qquad(42)$$

из которой, с учетом сделанного ранее обозначения (33), находим

$$\begin{aligned}q_{25}=&\frac{1}{d_1}\Big[\big[(9\omega_1^2\cos^2\alpha-C^2)\Omega^2+(\Omega^2-B^2-18\omega_1^2)\Omega^2\sin^2\alpha+(C^2-9\omega_1^2)(B^2-9\omega_1^2)\big]K_{10}+\\ &+6K_{11}(9\omega_1^2-C^2)\omega_1\Omega\cos\alpha-(27\omega_1^2+B^2-\Omega^2)K_{12}\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\Big],\\ s_{26}=&\frac{1}{d_1}\Big[\big[(A^2-C^2)\Omega^2\cos^2\alpha+(C^2-\Omega^2-9\omega_1^2)(A^2-9\omega_1^2)\big]K_{11}-\\ &-6\omega_1\Omega\cos\alpha(C^2-9\omega_1^2)K_{10}+6(A^2-9\omega_1^2)K_{12}\omega_1\Omega\sin\alpha\Big],\\ u_{25}=&\frac{1}{d_1}\Big[\big[-(27\omega_1^2+B^2-\Omega^2)\Omega^2\cos^2\alpha+(B^2-\Omega^2-9\omega_1^2)(A^2-9\omega_1^2)\big]K_{12}-\\ &-(27\omega_1^2+B^2-\Omega^2)K_{10}\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha+6(A^2-9\omega_1^2)K_{11}\omega_1\Omega\sin\alpha\Big]\end{aligned}\qquad(43)$$

где K_{10}, K_{11}, K_{12} — компоненты вектора в правой части (39).

Коэффициенты q_{29}, u_{29}, s_{210} ищутся из системы

$$\mathsf{M}(5\omega_1)\cdot\begin{bmatrix}q_{29}\\ u_{29}\\ s_{210}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac14\xi^2\big[(p_4^2B_2^2-A_2^2+3A_4^2p_1^2)q_{15}+2p_1(B_2^2p_4u_{15}-A_2^2s_{16})\big]\\ \frac14\xi^2\big[(p_4^2C_2^2+p_1^2A_2^2-3B_4^2)s_{16}+2A_2^2p_1q_{15}+2u_{15}C_2^2p_4\big]\\ \frac14\xi^2\big[(p_1^2B_2^2-C_2^2+3p_4^2C_4^2)u_{15}+2p_4(B_2^2p_1q_{15}-s_{16}C_2^2)\big]\end{bmatrix}\qquad(44)$$

откуда находим

$$\begin{aligned}q_{29}=&\frac{1}{d_2}\Big[\big[\left(25\omega_1^2(3\cos^2\alpha-2)-(B^2+\Omega^2)\sin^2\alpha-C^2\right)\Omega^2+(C^2-25\omega_1^2)(B^2-25\omega_1^2)\big]K_{13}+\\ &+10(25\omega_1^2-C^2)K_{14}\omega_1\Omega\cos\alpha-(75\omega_1^2+B^2-\Omega^2)K_{15}\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\Big],\\ u_{29}=&\frac{1}{d_2}\Big[\big[(A^2-C^2)\Omega^2\cos^2\alpha+(C^2-25\omega_1^2-\Omega^2)(A^2-25\omega_1)\big]K_{14}-\\ &-10(C^2-25\omega_1^2)K_{13}\omega_1\Omega\cos\alpha+10(A^2-25\omega_1^2)K_{15}\omega_1\Omega\sin\alpha\Big],\\ s_{210}=&\frac{1}{d_2}\Big[\big[(\Omega^2-75\omega_1^2-B^2)\Omega^2\cos^2\alpha+(B^2-25\omega_1^2-\Omega^2)(A^2-25\omega_1^2)\big]K_{15}-\\ &-(75\omega_1^2+B^2-\Omega^2)K_{13}\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha+10(A^2-25\omega_1^2)K_{14}\omega_1\Omega\sin\alpha\Big]\end{aligned}\qquad(45)$$

где $d_2=|\mathsf{M}(5\omega_1)|$, а K_{13}, K_{14}, K_{15} — компоненты вектора в правой части (44).

Решения, описывающие форму траектории движения с учетом найденных первого и второго приближения, принимают вид

$$\begin{cases}x=(p_1\xi+\varepsilon q_{11}+\varepsilon^2q_{21})\sin\varphi+(\varepsilon q_{15}+\varepsilon^2q_{25})\sin3\varphi+\varepsilon^2q_{29}\sin5\varphi,\\ y=\quad(\xi+\varepsilon s_{12}+\varepsilon^2s_{22})\cos\varphi+(\varepsilon s_{16}+\varepsilon^2s_{26})\cos3\varphi+\varepsilon^2s_{210}\cos5\varphi,\\ z=(p_4\xi+\varepsilon u_{11}+\varepsilon^2u_{21})\sin\varphi+(\varepsilon u_{15}+\varepsilon^2u_{25})\sin3\varphi+\varepsilon^2u_{29}\sin5\varphi,\end{cases}\qquad(46)$$

Среди коэффициентов в (46) неизвестным остается лишь s_{22}. Чтобы найти его, потребуем, что при $\varphi=0$ орбита должна пересекать ось y в точке $y=\xi$. Тогда с учетом (36) находим

$$s_{22}=-s_{26}-s_{210}.\qquad(47)$$

Функции $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$, фигурирующие в (18) (явные выражения для них даются формулами (29) и (40)) дают поправки к частоте колебаний ω_1, которые зависят от амплитуды колебаний ξ по y-координате.

Периодические решения вида (46), описывающие возмущенное движение вблизи второй и третьей плоскостей, т.е. построенные на основе порождающих решений (15) и (16), можно получить, произведя в формулах (17)–(45) замены $\omega_1 \to \omega_2,\ p_1 \to p_2,\ p_4 \to p_5$ и $\omega_1 \to \omega_3,\ p_1 \to p_3,\ p_4 \to p_6$ соответственно.

5. ВЫВОДЫ

В результате исследований получены приближенные решения уравнений динамики газопылевых частиц в гравитационном поле неоднородного прецессирующего эллипсоида. Получено 3 семейства орбит, которые не лежат в одной плоскости.

Для медленно вращающейся галактики газопылевые образования могут возникать в результате трехосности и прецессии. Поле скоростей зависит от величины трехосности, угловой скорости вращения и угла прецессии. Возмущенные орбиты вследствие неоднородности распределения плотности эллипсоида имеют сложную овалоподобную форму.

Поступила в редакцию 27.07.2009