



ISSN 1607–2855

Том 5 · № 1–2 · 2004 С. 229–235

УДК 524.8

Модели источника в гравитационно-линзовой системе Q2237+0305 и события с высоким усилением

Е.В. Федорова, А.Н. Александров, В.И. Жданов

Астрономическая обсерватория Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

Проанализирована достоверность определения характеристик распределения яркости (РЯ) квазара в системе Q2237+0305 по кривым блеска разных изображений, полученным группами OGLE и GLITP при наблюдениях событий с высоким усилением (СВУ). Получены оценки параметров источника при минимально возможном интервале данных в окрестности СВУ в предположении о степенном и гауссовском распределении яркости (РЯ) источника, а также для аккреционного диска Шакуры–Сюняева. В рамках указанных моделей имеющиеся наблюдательные данные согласуются с гипотезой о пересечении регулярной точки каустики (складки), но не позволяют сделать выбор между разными моделями РЯ, что влияет на оценку радиуса источника.

МОДЕЛІ ДЖЕРЕЛА В ГРАВІТАЦІЙНО-ЛІНЗОВІЙ СИСТЕМІ Q2237+0305 ТА ПОДІЇ З ВЕЛИКИМ ПІДСИЛЕННЯМ, Федорова О.В., Александров О.М., Жданов В.І. — Проаналізовано достовірність визначення характеристик розподілу яскравості джерела випромінювання у гравітаційно-лінзовій системі Q2237+030 по кривим блиску зображень, отриманих групами OGLE і GLITP при спостереженнях подій із значним підсиленням. Отримано оцінки параметрів джерела при мінімально можливому інтервалі даних в околі подій для гаусівської та степеневі моделі джерела, а також для акреційного диску Шакури–Сюняєва. В рамках цих моделей спостережені дані узгоджуються із гіпотезою про перетин регулярної точки каустики, але не дозволяють зробити вибір між різними моделями, що впливає на оцінку радіуса джерела.

SOURCE MODELS IN GRAVITATIONAL LENS SYSTEM Q2237+0305 AND HIGH AMPLIFICATION EVENTS, by Fedorova E.V., Alexandrov A.N., Zhdanov V.I. — We analyze a reliability of quasar brightness distribution (BD) parameter estimation on the light curves of different images in the system Q2237+0305 observed by OGLE and GLITP groups during High Amplification Events (HAE). We evaluated the source parameters for as small as possible data interval in the neighborhood of HAE under supposition of power-law and gaussian BD as well as for Shakura–Sunyaev accretion disk. For these models the observational data do agree with the hypothesis of regular caustic point (fold) crossing, but they do not allow to make a choice between different BD models; this affects estimation of the source radius.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во внегалактических гравитационно-линзовых системах (ГЛС) наблюдаются несколько изображений одного и того же квазара. При отсутствии гравитационного микролинзирования кривые блеска разных изображений, отражающие собственные колебания яркости квазара, должны были бы повторять друг друга с разными коэффициентами усиления и со сдвигами на время относительной задержки. Поэтому, сравнивая кривые блеска разных изображений, можно выделить вариации интенсивности, возникающие вследствие микролинзирования, что можно использовать, например, для исследования структуры источника излучения [9,12].

В этом плане четырехкратно линзированный квазар Q2237+0305 («Крест Эйнштейна») является одним из наиболее удобных объектов; в этой ГЛС красное смещение галактики-линзы $z_L = 0.0394$, а квазара $z_Q = 1.695$, а времена задержки между изображениями меньше дня. Особый интерес имеет информация об отдельных событиях с высоким усилением (СВУ), которые интерпретируются как результат пересечения каустик гравитационной линзы источником; такие события

наблюдались в Q2237+0305 наблюдательными группами OGLE [16] и GLITP [6].

Определение размера источника в ГЛС Q2237+0305 на основе данных по микролинзированию производилось ранее [2,5,15,18–20] в оптическом диапазоне. Результаты, касающиеся размеров источника, в целом согласуются друг с другом у всех авторов, но есть значительные отличия относительно точности определения размеров источника. Высказываются также различные мнения относительно возможности определения других параметров, которые, например, позволили бы отличить разные модели распределения яркости (РЯ) по диску источника. Наиболее часто обсуждаются гауссовское и степенное распределения, а также модель аккреционного диска. Например, авторы работы [17] отмечают, что с наблюдательными данными GLITP совместны лишь модели «ньютоновского стандартного аккреционного диска и его упрощенные версии».

Основная цель настоящей работы — оценить достоверность определения параметров, характеризующих РЯ источника в Q2237+0305 на основе данных OGLE и GLITP за период с 1999 по 2000 годы. Один из вопросов состоит в том, выделяют ли существующие данные по фотометрии СВУ ту или иную модель источника? Мы предполагаем, что в этих данных СВУ связаны с прохождением источника через регулярную точку каустики, а размер источника достаточно мал по сравнению с радиусом кривизны каустики. Здесь возникает вопрос о применимости асимптотических формул для коэффициента усиления, которые связывают наблюдаемую интенсивность изображения с параметрами линзы и источника. Соотношения, содержащие неизвестные положения значительного числа микролинз, здесь неприменимы, а точность приближенных соотношений с небольшим числом подгоночных параметров не всегда оказывается достаточной. Поэтому ниже обсуждается вопрос об эффективности подгоночной стратегии с учетом указанных обстоятельств. Рассмотрены модели источника с центрально-симметричным РЯ; оценивается точность и достоверность определяемых параметров.

2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Усиление протяжённого источника определяется формулой:

$$K = \frac{\iint_{\Omega} P(\mathbf{r}(\zeta)) d^2\zeta}{\iint_{\Omega} P(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}} \quad (1)$$

где интегрирование производится по всей плоскости изображений $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$; $\mathbf{r}(\zeta)$ — линзовое отображение [4,13], $P(\mathbf{r})$ — распределение яркости по диску источника, $\mathbf{r} = (x, y)$. Для центрально-симметричного источника положим $P(x, y) = F_R(r)$, где R характеризует размер источника, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для анализа наблюдательных данных необходимо иметь определение размера источника, не зависящее от выбора априори неизвестного РЯ. В качестве такой величины можно взять среднеквадратичный радиус

$$R_{rms} = \sqrt{\frac{\iint r^2 P(x, y) dx dy}{\iint P(x, y) dx dy}}$$

или, для центрально-симметричного источника, радиус половинной яркости $R_{1/2} = R_*/\sqrt{\ln 2}$, где R_* определяется условием

$$\int_0^{R_*} F_R(r) r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F_R(r) r dr$$

(множитель в выражении для $R_{1/2}$ определен так, чтобы для гауссовского источника было $R_{1/2} = R_{rms}$). Далее рассматривается степенное РЯ, для которого

$$F_R(r) = \frac{(p-1)}{\pi R^2 (1 + (r/R)^2)^p}, \quad p > 1, \quad (2)$$

и гауссовское РЯ

$$F_R(r) = \frac{1}{\pi R^2} \exp [-(r/R)^2].$$

Интегральная яркость нормирована на единицу. В случае степенного РЯ радиус половинной яркости равен

$$R_{1/2} = R \sqrt{\frac{2^{\frac{1}{p-1}} - 1}{\ln 2}},$$

а среднеквадратичный радиус

$$R_{rms} = \frac{R}{\sqrt{p-2}}, \quad (p > 2).$$

Гауссовское РЯ, для которого $R = R_{rms} = R_{1/2}$, является предельным для степенных РЯ (2) при фиксированном R_{rms} и $p \rightarrow \infty$.

Мы рассматриваем также модель аккреционного диска Шакуры–Сюняева [14], характеризуемую распределением

$$F_R(r) = \frac{3R\theta(r-R)}{2\pi r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R}{r}}\right). \quad (3)$$

Здесь и далее $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Для этого РЯ среднеквадратичный радиус расходится, а $R_{1/2} = \frac{4R}{\sqrt{\ln 2}}$.

Это распределение соответствует положению диска перпендикулярно лучу зрения; распределения с наклоном можно получить, рассматривая модель эллиптического источника. Известны модели, которые более точно учитывают структуру аккреционного диска в окрестности вращающейся черной дыры. Однако центральная область, где это существенно, вносит небольшой вклад в общее излучение диска в оптике (см., напр., [2]). С другой стороны, как будет видно ниже, все рассматриваемые типы РЯ (2), (3) удовлетворительно аппроксимируют имеющиеся данные наблюдений, которые не позволяют апостериори обосновать выбор между этими моделями.

Мы исходим из наиболее вероятного предположения, что СВУ возникло в результате пересечения регулярной точки каустики. Наиболее простым является приближение линейной каустики, когда каустика приближенно рассматривается как прямая $y = 0$ и полное усиление точечного источника на расстоянии y от каустики аппроксимируется формулой [4,13]

$$K(y) = K_0 + k\theta(y)y^{-1/2}. \quad (4)$$

Эта формула учитывает в явном виде два изображения, ближайšie к каустике; она была использована для подгонки кривых яркости в большом числе работ. Здесь K_0 — усиление на значительном удалении от критической кривой, эту величину можно считать постоянной в ходе СВУ, параметр k иногда называют силой каустики.

Если центр источника с РЯ $F_R(r)$ находится на расстоянии y_c от линейной каустики $y = 0$, формула (4) дает следующее значение коэффициента усиления этого источника [5]

$$K(y_c) = K_0 + \frac{k}{\sqrt{R}} J\left(\frac{y_c}{R}\right), \quad (5)$$

где

$$J(z) = \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} \int_{-\infty}^\infty dx F_R\left(\sqrt{x^2 + (y-z)^2}\right) \left[\int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dx F_R\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \right]^{-1}$$

В случае степенного РЯ (2) для функции $J(z)$ имеется явное выражение через гипергеометрическую функцию [5].

3. ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ И ВЫБОР ПОДГОНОЧНОГО ИНТЕРВАЛА

Реальные линзовые каустики всегда искривлены. Формула (4) неприменима для точек, которые находятся между каустикой и ее касательной. Детальное обсуждение этих вопросов и более точные асимптотические формулы даны в работе авторов [1]. Чтобы проверить точность приближенных формул, мы использовали модель гравитационной линзы Чанга–Рефсдала [7] с линейным размером каустики порядка радиуса кольца Эйнштейна одиночной линзы R_E . Формула (4) сравнивалась с коэффициентом усиления точечного источника, найденным путем вычисления якобиана линзового отображения в окрестности регулярных точек каустики.

Результаты сравнения показали, что

(i) приближение линейной каустики (4) корректно с точностью $\sim 20 \div 30\%$ только в малой области с размерами порядка $0.1R_E$ вблизи каустики;

(ii) учет кривизны каустики в так называемом параболическом приближении, предлагаемый рядом авторов [9,10], не спасает положение и, как правило, не позволяет существенно повысить точность или увеличить область применимости приближенных формул.

Нами проведено тестирование алгоритмов определения параметров источника с использованием приближения линейной каустики (5). Для этого проведены численные расчеты по точным формулам (2), (3) кривых суммарного блеска всех изображений протяженного источника малого радиуса, который движется равномерно и прямолинейно относительно линзы Чанга–Рефсдала. Эти кривые рассматривались как «экспериментальные»; далее по этим данным определялись параметры источника по м.н.к. с использованием приближенной формулы (5). Эти расчеты показали:

(iii) результаты подгонки при правильном предположении о РЯ получаются наиболее достоверными, если подгоночный интервал мал ($\sim 0.1R_E$); при этом размер источника оценивается с точностью 10 – 15%; подгонка при неверном предположении дает оценку размеров с большим в $1.5 \div 2$ раза разбросом значений;

(iv) кривые блеска для степенного РЯ (2) с фиксированным R_{rms} или $R_{1/2}$, но с различными $p > 5$ практически не отличаются от кривой для гауссовского источника;

(v) как и следовало ожидать, подгонка при помощи (5) кривой блеска СВУ, возникшего в результате прохождения источника около каспа или через касп приводит к совершенно некорректным и нестабильным результатам.

Подчеркнем, что исследование каустик на примере модели Чанга–Рефсдала наиболее адекватно случаю небольших оптических плотностей микролинзирования (до $\sigma \sim 0.3 \div 0.4$). При значительных σ возрастает вероятность попасть на участок с малым радиусом кривизны каустики или в окрестность касповой точки. В этом смысле проведенное исследование указывает необходимые (но не всегда достаточные) ограничения на применимость приближенных формул.

Учет вышеуказанных обстоятельств, в частности, (i) и (iii), ниже при интерпретации результатов OGLE и GLITP приводит к следующему выводу. В обработку следует включать лишь те данные, которые соответствуют прохождению источника через каустику (когда каустика проектируется непосредственно на диск источника). Другие участки кривой блеска нельзя аппроксимировать при помощи формулы (5). Использовать же другие, более точные формулы нереально ввиду чрезмерно большого числа подгоночных параметров.

4. ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ ИСТОЧНИКА ПО НАБЛЮДАТЕЛЬНЫМ ДАННЫМ

Ниже даны оценки размеров источника в ГЛС Q2237+0305, найденные в результате проведенной нами обработки результатов, полученных группами OGLE [16] и GLITP [6]. Среди данных GLITP имеется две серии (PSF I и PSF II); ниже мы приводим конечные результаты расчетов для тех данных, которые имеют меньшую погрешность измерений. Для подгонки использовалось приближение линейной каустики (4), (5) в степенной модели РЯ по диску источника, включая предельный случай гауссовского распределения, а также в модели аккреционного диска (3).

Параметры СВУ определялись путём минимизации невязки

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N [I_i - \mu(t_i)]^2 / \sigma_i^2, \quad (6)$$

где I_i — поток излучения и σ_i^2 — его дисперсия в i -м наблюдении, t_i — соответствующий момент времени; $\mu(t) = AJ[(t - T_c)/T_R] + B$; функция J дается формулой (5) для различных моделей источника. Определяемыми параметрами в нашей обработке были постоянные A , B , $T_R = R/V$ — интервал времени, соответствующий прохождению половины диска источника через каустику (V — нормальная скорость источника относительно каустики), а также T_c — момент пересечения каустики центром источника. После определения значений этих параметров вычислялось значения невязки χ_{\min}^2 в минимуме.

Зависимость $\chi_{\min}^2(p)$ в случае степенного распределения (2) оказывается весьма пологой, и имеющиеся данные не позволяют сделать статистически обоснованный выбор параметра p . Поэтому мы не включали его в число определяемых параметров, а рассматривали набор моделей с разными p .

Основной целью было определение величины T_R , характеризующей размер источника; результаты даны в таблице 1 для моделей гауссовского источника, аккреционного диска и для степенного источника с показателем $p = 3/2$, когда яркость (2) имеет сходную асимптотику с (3). Помимо параметра T_R , определялось значение $T_{1/2}$, соответствующее размеру по половинной яркости, а также для степенных моделей с показателями $p > 2$ определялось значение $T_{rms} = T_R / \sqrt{p-2}$, связанное со среднеквадратичным радиусом. Соответствующие зависимости от показателя p показаны на рис. 1.

Существенным моментом в нашей обработке был выбор интервала времени для оптимальной подгонки. Следуя результатам предыдущих разделов, мы выбирали этот интервал — с учетом размеров источника — по возможности меньшим, чтобы ошибка используемых подгоночных зависимостей не превышала погрешность экспериментальных данных. В случае данных OGLE интервал подгонки составил 91 день для изображения А и 146 дней для изображения С, что, к примеру, значительно меньше, чем в работе [5]. Ясно, что за пределами этого интервала подгоночные зависимости значительно отличаются от экспериментальных данных. В случае данных GLITP оказалось возможным использовать период от 90 до 95 дней с привлечением практически всех экспериментальных точек.

Как показали наши расчеты, подгоночные зависимости практически сливаются друг с другом на фоне ошибок, поэтому произвести выбор модели по наблюдательным данным невозможно. Чтобы можно было бы отличить эти модели в подобных СВУ, необходимо на порядок повысить точность фотометрических наблюдений. Об этом свидетельствуют и полученные нами численные значения невязки в минимуме χ_{\min}^2 для разных моделей РЯ. В случае данных GLITP величина χ_{\min}^2 минимальна в модели (2) при $p = 3/2$ и слабо растет с увеличением $p > 1.5$, оставаясь в рамках $\chi_{\min}^2 = 1.3 \div 1.4$ для каждой группы наблюдений в полосах R и V для изображения А. Отличие не-

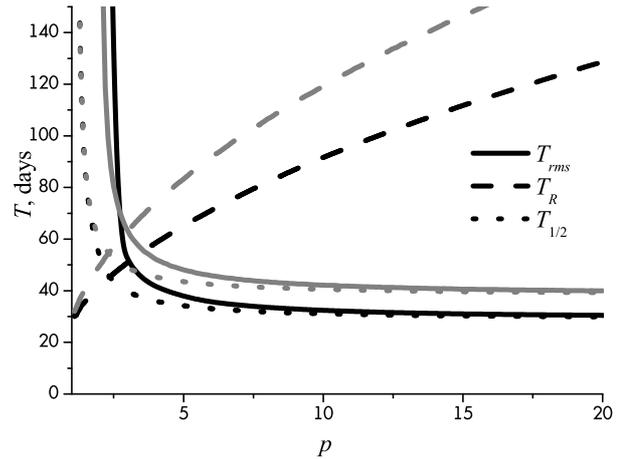


Рис. 1. Размеры источника T_R , T_{rms} и $T_{1/2}$ (в днях) в зависимости от показателя степени p в модели распределения яркости (2). Размеры определены по данным GLITP в V фильтре (чёрные линии) и в R фильтре (серые линии)

Таблица 1. Результаты определения размеров источника для трех моделей: ГС — гауссовская, СТ — степенная, АД — аккреционный диск

Исходные данные, модель источника	Изображение и полоса (R или V)	$T_{1/2}$, дней	T_c , дней	L_{upper} , 10^{-3} пс $\cdot v / (300 \text{ км/с})$
GLITP, ГС	A(R)	38^{+44}_{-17}	1474^{+15}_{-10}	$0.34^{+0.4}_{-0.15}$
GLITP, СТ, $p = 3/2$	A(R)	80^{+36}_{-22}	1482^{+5}_{-12}	$0.71^{+0.34}_{-0.19}$
GLITP, АД	A(R)	58^{+6}_{-17}	1489^{+26}_{-12}	$0.52^{+0.05}_{-0.16}$
GLITP, ГС	A(V)	29^{+25}_{-10}	1479^{+10}_{-9}	$0.26^{+0.23}_{-0.09}$
GLITP, СТ, $p = 3/2$	A(V)	70^{+17}_{-39}	1481^{+8}_{-6}	$0.63^{+0.16}_{-0.34}$
GLITP, АД	A(V)	52 ± 12	1485^{+15}_{-12}	0.46 ± 0.11
OGLE, ГС	A(V)	40^{+17}_{-15}	1487^{+9}_{-7}	$0.37^{+0.16}_{-0.14}$
OGLE, СТ, $p = 3/2$	A(V)	75 ± 51	1486^{+8}_{-9}	0.67 ± 0.39
OGLE, АД	A(V)	58^{+12}_{-17}	1488^{+9}_{-11}	$0.52^{+0.11}_{-0.16}$
OGLE, ГС	C(V)	42^{+21}_{-20}	1383^{+8}_{-5}	$0.38^{+0.19}_{-0.18}$
OGLE, СТ, $p = 3/2$	C(V)	81^{+34}_{-24}	1384^{+10}_{-7}	$0.73^{+0.30}_{-0.22}$
OGLE, АД	C(V)	70^{+17}_{-29}	1382 ± 5	$0.64^{+0.16}_{-0.26}$

вязки $\chi^2_{\min} = 1.33$, вычисленной в модели аккреционного диска (3), также статистически незначимо. Не должно ввести в заблуждение и наличие весьма слабого минимума $\chi^2_{\min}(p)$ примерно при $p = 3$ и в случае данных OGLE; здесь невязка находится в пределах $1.8 \div 2$ (полоса V, изображения A и C), причем точность экспериментальных данных, очевидно, завышена.

Погрешности определяемых величин для доверительной вероятности 90% оценивались путем статистического моделирования. С этой целью генерировались случайные реализации «экспериментальных» данных, которые обрабатывались по той же методике (в приближении линейной каустики). Для каждого момента измерения принималось гауссовское распределение величины потока со средним значением на подгоночной кривой и дисперсией, указанной наблюдателями, но умноженной на χ^2_{\min} . В результате получены распределения и пределы ошибок каждого из определяемых параметров.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, надежные результаты анализа данных СВУ при помощи асимптотической формулы (4) возможны при условии, если эта формула используется вблизи каустики, т.е. в области, размеры которой малы в сравнении с радиусом кривизны каустики. В качестве характерной величины последнего обычно принимают радиус кольца Эйнштейна одиночной линзы R_E , который в ГЛС Q2237+0305 равен $5.7 \cdot 10^{-3} (h_{65})^{-1/2} (M/M_{\odot})$ пк, где M — типичная масса поля микролинз. Наши результаты моделирования кривых блеска в линзе Чанга–Рефсдала показывают, что, как правило, приближение (4) корректно с точностью $\sim 20\%$ только в малой области с размерами порядка $0.1R_E$ вблизи каустики. Ясно, что в присутствии большого количества микролинз ситуация может лишь усугубиться. Поэтому при обработке данных наблюдений СВУ в Q2237+0305 нами выбирался минимально возможный интервал времени, соответствующий прохождению диска источника через каустику. Предполагалось, что источник проходит через регулярную точку каустики, радиус кривизны которой значительно больше размеров источника. Как вытекает из проведенного нами анализа, это предположение, по крайней мере, не противоречит экспериментальным данным.

Как видно из полученных оценок, условие малости размеров источника здесь выполняется «на пределе», если масса микролинз $M \sim (0.1 \div 1)M_{\odot}$ и скорость источника относительно каустики $V < 500 \text{ км/с}$. Здесь необходимо иметь в виду, что оценка V складывается из скорости галактики V_G

как целого и собственной скорости каустики, которая определяется среднеквадратичной скоростью V_s звезд-микролинз в окрестности изображений. Вайз и др. для линзовой галактики Q2237+0305 дают оценку $V_G < 500$ км/с [17].

Мы рассматривали степенные (2) и гауссовское РЯ, а также модель аккреционного диска (3). Наши оценки размеров источника согласуются с оценками, сделанными в работах [18,19] (в R-фильтре: $1.94 \cdot 10^{-3}$ пс $> L > 0.007 \cdot 10^{-3}$ пс) и [15] (данные GLITP, V фильтр, изображение A: $39.6_{-9.5}^{+10.4}$ дней; данные GLITP, R фильтр, изображение A: $41.3_{-10.9}^{+18.8}$ дней; данные OGLE, V фильтр, изображение A: $-29.5_{-3.1}^{+3.2}$ дней). Для данных OGLE (V фильтр, изображение A) наша оценка несколько меньше и мы получили более значительные погрешности, чем в работе [5] (91 ± 4 дней); в указанной работе заниженные оценки погрешности, вероятно, являются результатом использования данных из слишком широкого интервала. Таким образом, полученные нами оценки размеров источника (табл. 1) находятся, в основном, в удовлетворительном соответствии с результатами других авторов, однако в некоторых случаях имеют более широкие пределы погрешностей на 90% доверительном уровне. Последнее обстоятельство обусловлено более жесткими требованиями к выбору подгоночного интервала. Вместе с тем имеется практически полная неопределенность выбора РЯ $P(x, y)$. РЯ не фиксируется даже в случае центрально-симметричного распределения $P(x, y) = F_R(r)$: минимальное значение χ^2 значимо не отличается для разных значений параметра $p > 1.5$ степенного РЯ (2), включая в пределе и гауссовское распределение, а также для модели аккреционного диска (3). В целом можно сделать вывод, что для корректного выбора модели источника в событиях пересечения каустики необходимы на порядок более точные фотометрические наблюдения. Недостаток информации о РЯ приводит к дополнительной неопределенности при оценке радиуса источника, которая затрудняет сравнение параметров различных моделей. Поэтому на данном этапе, с учетом имеющегося уровня точности фотометрии, когда речь идет о параметрах источника в ГЛС, необходимо приводить результаты к некоторому стандартному распределению, например, гауссовскому.

Работа поддержана Научно-Технологическим Центром в Украине (проект NN 43 от 2003 г.).

1. Александров О.М., Жданов В.И., Федорова О.В. // Вісник Київ. ун-ту. Астрономія. — 2003. — **39–40**. — С. 58–66.
2. Богданов М.Б., Черпацук А.М. // Астрон. журн. — 2002. — **79**. — С. 693–701.
3. Жданов В.И., Салата С.А., Федорова Е.В. // Письма в Астрон. журн. — 2001. — **27**. — С. 659–666.
4. Захаров А.Ф., Гравитационные линзы и микролинзы. — М.: Янус-К, 1997.
5. Шалляпин В.Н. // Письма в Астрон. журн. — 2001. — **27**. — С. 180–186.
6. Alcalde D., Mediavilla E., Moreau O. et al. // Astrophys. J. — 2002. — **572**. — P. 729–744.
7. Chang K., Refsdal S. // Astron. Astrophys. — 1984. — **132**. — P.168.
8. Fedorova E.V., Zhdanov V.I., Alexandrov A.N. // J. Phys. Studies. — 2002. — **6**. — P. 465–468.
9. Fluke C.J., Webster R.L. // MNRAS. — 1999. — **302**. — P. 68–74.
10. Gaudi B.S., Petters A.O. // Astrophys. J. — 2002. — **574**. — P. 970–984.
11. Goicoechea L.J., Alcalde D., Mediavilla E., Munoz J.A. // Astron. Astrophys. — 2003. — **397**. — P. 517–525.
12. Grieger B., Kayser R., Refsdal S. // Astron. Astrophys. — 1988. — **194**. — P. 54–64.
13. Schneider P., Ehlers J., Falco E.E. Gravitational Lenses. — New York: Springer, 1992.
14. Shakura N.I., Sunyaev R.A. // Astron. Astrophys. — 1973. — **24**. — P.337.
15. Shalyapin V.N., Goicoechea L.J., Alcalde D., et al. // Astrophys. J. — 2002. — **579**. — P.127 – 135.
16. Wozniak P.R., Udalski A., Szimansky M., et al., Astrophys. J. — 2000. — **540**. — P. 65–67.
17. Wyithe J.S., Webster R.L., Turner E.L. // MNRAS. — 1999. — **309**. — P. 261–271.
18. Wyithe J.S., Webster R.L., Turner E.L., Mortlock D.J. // MNRAS. — 2000. — **315**. — P. 62–68.
19. Wyithe J.S., Webster R.L., Turner E.L. // MNRAS. — 2000. — **318**. — P. 762–768.
20. Yonehara A. // Astron. J. — 2001. — **548**. — L127–L130.

Поступила в редакцию 26.10.2004