



ISSN 1607–2855

Том 4 · № 2 · 2003 С. 17–22

УДК 524.7

## Змінність блиску гравітаційно-лінзованих зображень, спричинена змінністю гравітаційного поля лінз: подвійні зорі та петлі космічних струн

І.С. Масняк, Б.І. Гнатик, В.І. Жданов

Астрономічна обсерваторія Київського національного університету імені Тараса Шевченка

*Гравітаційні лінзи зі змінним в часі розподілом маси спричинюватимуть характерні зміни яскравості зображень. Виявлення та аналіз таких змін дозволяє прояснити природу лінзи. Зокрема, таке явище надає можливість виявити такі динамічні об'єкти як петлі космічних струн за особливостями їх лінзування. В статті порівнюється лінзування петлями космічних струн та традиційними осциляторами — подвійними зорями. Показано, що, в цілому, подвійні системи та петлі космічних струн породжують подібні зміни яскравості джерела. Розраховано відмінності змін в залежності від параметрів гравітаційних лінз. Розглянуто також особливості лінзування петлями, які не притаманні лінзуванню подвійними зорями.*

*ПЕРЕМЕННОСТЬ БЛЕСКА ГРАВИТАЦИОННО-ЛИНЗОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ВЫЗВАННАЯ ИЗМЕНЕНИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛИНЗ: ДВОЙНЫЕ ЗВЁЗДЫ И ПЕТЛИ КОСМИЧЕСКИХ СТРУН, Масняк И.С., Гнатик Б.И., Жданов В.И. — Гравитационные линзы с переменным во времени распределением массы вызывают характерные изменения яркости изображения. Выявление и анализ таких изменений позволяет прояснить природу линзы. Это явление дает возможность обнаружить такие динамические объекты как петли космических струн по особенностям их линзирования. В статье сравнивается линзирование петлями космических струн и традиционными осцилляторами — двойными звёздами. Показано, что, в общем, двойные системы и петли космических струн порождают сходные изменения яркости источника. Рассчитано отличия кривых блеска в зависимости от параметров гравитационных линз. Также рассмотрено особенности линзирования петлями, не свойственные линзированию двойными звездами.*

*VARIABILITY OF GRAVITATIONAL LENS IMAGES, CAUSED BY VARIABILITY OF GRAVITATIONAL FIELD OF LENS: BINARY SYSTEMS AND LOOPS OF COSMIC STRINGS, by Masnyak I.S., Hnatyk B.I., Zhdanov V.I. — Gravitational lenses with changeable mass distribution cause characteristic changes of image brightness. Detection and analyze of such changes allow us to clarify the nature of the lens. This effect gives a possibility to obtain such dynamical objects as loops of cosmic string. In this article we compare lensing by loops of cosmic string with lensing by binary system. We found parameters and location of these systems, which supply similarity of brightness curves formed by them. We also estimate difference of brightness curves as a function of parameters of these systems. Features of lensing by such loops, which are not peculiar for lensing by binary system, are also discussed.*

### 1. ВСТУП

Зміна блиску зображень в гравітаційно-лінзованих системах може зумовлюватись не тільки традиційними змінами блиску самого джерела (змінність квазара) та змінами гравітаційного поля галактики-лінзи (мікролінзування на її зорях, тощо), але й додатковим транзйєнтним лінзуванням на об'єктах, що знаходяться між нами та галактикою-лінзою, зокрема, об'єктами гало нашої Галактики, Місцевої групи та Місцевого надскупчення. Таке додаткове лінзування, якщо воно стосується обох зображень квазара, характеризуватиметься незначним часом затримки внаслідок близької відстані до нової лінзи і, таким чином, проявлятиметься як транзйєнтні синхронні зміни блиску зображень. Про подібні спостереження синхронних осциляцій блиску зображень в лінзованій системі Q0957+561 А,В заявлено в [1]. Осциляторний характер зміни блиску вимагає осциляторної зміни

гравітаційного поля лінзи і, в принципі, може бути зумовлений лінзуванням на звичайній подвійній зорі Галактики, як це було в випадку об'єкта МАСНО LMC-1 [2]. Однак таке пояснення в випадку квазара вимагає нереально великої маси подвійної зорі, тому, можливо, тут ми маємо справу з лінзуванням петлею космічної струни [1]. Космічні струни — одновимірні топологічні дефекти із значною лінійною густиною — до  $10^{22}$  г/см (див. огляд в [3]) вже застосовувались до пояснення подібності зображень в гравітаційній лінзі CLS-1 [4]. В нашій роботі розглядається лінзування петлями космічних струн, характерною особливістю яких є строго періодичні релятивістські осциляторні зміни форми. Зокрема, ми розглянемо подібність та відмінність кривих блиску при лінзуваннях подвійними зорями та петлями космічних струн. Розділ 2 присвячений лінзуванню подвійною системою зір, в розділі 3 розглянуто лінзування петлею космічної струни. В розділі 4 приведено порівняння коливань блиску зображень точкових об'єктів, викликаних таким лінзуванням, а в розділі 5 — особливості близького проходження променів відносно систем. Висновки зроблено в розділі 6.

## 2. ЛІНЗУВАННЯ СИСТЕМОЮ ПОДВІЙНИХ ЗІР

При лінзуванні системою двох зір різної маси, коливання блиску зображень джерела світла буде періодичним, але кожний період складатиметься з двох коливань різної амплітуди. Якщо ж маси зір однакові, то ці підйоми в кожному періоді будуть однакові. Коливання, які виникають в першому випадку, не характерні для лінзування космічними струнами і їх легко ототожнити з лінзуванням подвійною зорею. Тому ми будемо розглядати другий випадок — випадок однакових мас, коли лінзування близьке до лінзування петлею.

У випадку подвійної зорі з однаковими масами компонентів рівняння лінзи будуть мати вигляд [5, 6]:

$$y_1 = x_1 - \frac{q_b}{2} \left[ \frac{x_1 - x_1^a(t)}{(x_1 - x_1^a(t))^2 + (x_2 - x_2^a(t))^2} + \frac{x_1 - x_1^b(t)}{(x_1 - x_1^b(t))^2 + (x_2 - x_2^b(t))^2} \right], \quad (1)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{q_b}{2} \left[ \frac{x_2 - x_2^a(t)}{(x_1 - x_1^a(t))^2 + (x_2 - x_2^a(t))^2} + \frac{x_2 - x_2^b(t)}{(x_1 - x_1^b(t))^2 + (x_2 - x_2^b(t))^2} \right], \quad (2)$$

де  $x_1$  і  $x_2$  — координати променів в площині лінзи, нормовані на радіус колової орбіти компонентів  $r$ ,  $y_1$  і  $y_2$  — координати джерела світла, нормовані на  $rD_l/D_s$ ,  $q_b = \frac{8Gm_c D_{ls} D_l}{c^2 D_s r^2}$ ,  $m_c$  — маса точкових компонентів,  $D_l, D_s, D_{ls}$  — відстань від нас до струни, до джерела променів та між струною і джерелом відповідно, і  $x_1^a(t) = \cos t + v_1 t$ ,  $x_2^a(t) = \sin t + v_2 t$ ,  $x_1^b(t) = -\cos t + v_1 t$ ,  $x_2^b(t) = -\sin t + v_2 t$  — координати компонентів ( $a$  і  $b$ ), нормовані на  $r$  (час вимірюється в одиницях  $1/w$ , а швидкість в одиницях  $wr$ , де  $w$  — частота обертання компонентів навколо центру мас).

З закону Ньютона можна знайти зв'язок між масою компонентів  $m_c$ , половиною відстані між компонентами  $r$  і періодом обертання системи  $T$ :

$$Gm_c = \frac{16\pi^2 r^3}{T^2}. \quad (3)$$

Підсилення зображення точкового об'єкта буде рівне:

$$m = \left( 1 - \frac{q_b^2}{4} \frac{[(x_1 - x_1^a(t))^2 + (x_2 - x_2^a(t))^2 + (x_1 - x_1^b(t))^2 + (x_2 - x_2^b(t))^2]^2}{[(x_1 - x_1^a(t))^2 + (x_2 - x_2^a(t))^2]^2 [(x_1 - x_1^b(t))^2 + (x_2 - x_2^b(t))^2]^2} + \right. \quad (4)$$

$$\left. + \frac{q_b^2 [(x_1 - x_1^a(t))(x_2 - x_2^b(t)) - (x_1 - x_1^b(t))(x_2 - x_2^a(t))]^2}{[(x_1 - x_1^a(t))^2 + (x_2 - x_2^a(t))^2]^2 [(x_1 - x_1^b(t))^2 + (x_2 - x_2^b(t))^2]^2} \right)^{-1}. \quad (5)$$

З останньої формули випливає, що величина підсилення буде коливатись з часом. Коливання відбуватимуться на фоні підйому блиску:

$$m_1 = 1 + \frac{q_b^2}{[(y_1 - v_1 t)^2 + (y_2 - v_2 t)^2]^2}. \quad (6)$$

Цей фон є першими двома ненульовими порядками розкладу підсилення по  $1/\sqrt{\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2}$  (де

$\tilde{y}_{1,2} = y_{1,2} - v_{1,2}t$ ), або нульовим порядком розкладу підсилення по  $r$ . При цьому, скориставшись означенням  $q_b$  і величиною радіуса Ейнштейна в площині лінзи ( $R_E = \sqrt{\frac{8Gm_c}{c^2} \frac{D_{ls}D_l}{r^2 D_s}}$ ), легко побачити, що  $q_b = R_E^2$  і остання формула співпадає з формулою для підсилення зображень при лінзуванні точковим об'єктом, як і повинно бути при нехтуванні відстанню між компонентами системи. Висота підйому рівна  $A = q_b^2/y_b^4$  ( $y_b \gg 1$  — прищільна відстань центру системи відносно джерела світла), а ширина на половині амплітуди:  $T_{A/2} = 2\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot y_b/v$  ( $v = |\vec{v}|$ ). Коливальна частина підсилення буде наближено визначатись наступною формулою:

$$m_{\sim} \approx \frac{6q_b^2}{(\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2)^4} ((\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2) \cos 2t + 2\tilde{y}_1\tilde{y}_2 \sin 2t). \quad (7)$$

Максимальна амплітуда цих коливань рівна  $A_1 \approx 6q_b^2/y_b^6$ , а їх період:  $T_1 = \pi$  ( $\pi/w$  в розмірних величинах). В коливаннях блиску також будуть присутні інші гармоніки. Наступна ненульова гармоніка буде мати вигляд:

$$m_{\approx} \approx \frac{6q_b^2}{(\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2)^4} \frac{(\tilde{y}_1^4 + 6\tilde{y}_1^2\tilde{y}_2^2 + \tilde{y}_2^4) \cos 4t + 4\tilde{y}_1\tilde{y}_2(\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2) \sin 4t}{(\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2)^2}. \quad (8)$$

В розділі 4 ми використаємо ці величини для порівняння кривих блиску для обох типів лінз.

### 3. ЛІНЗУВАННЯ КОСМІЧНОЮ СТРУНОЮ

Космічна струна в силу рівнянь руху періодично змінює свою конфігурацію відносно центра мас і має поступальну швидкість, яка може становити суттєву частину швидкості світла. Оскільки струна масивна, це буде приводити до перерозподілу маси в просторі і, відповідно, до зміни заломлення променів. Тому з часом будуть змінюватись зображення джерел світла. Якщо промені проходять далеко від струни, то коливання блиску джерела будуть виникати за рахунок асиметричності в розподілі маси системи. Очевидно, що максимальні коливання викликати максимально асиметрична петля, коли її форма вироджується в лінійну, а її осциляції — в обертання навколо центра мас. Положення такої петлі задається рівняннями:

$$x_1^{\text{str}} = \cos t \sin \sigma + v_1 t, \quad x_2^{\text{str}} = \sin t \sin \sigma + v_2 t, \quad x_3^{\text{str}} = 0, \quad (9)$$

де  $\sigma$  — афінний параметр вздовж струни. Нормування аналогічне попередньому випадку (роль  $r$  грає величина  $R$  — половина видимого розміру петлі). Швидкість, при цьому, буде нормована на  $c$  — швидкість світла (частота обертання рівна  $c/R$ ). Залежність рівнянь лінзи від часу є досить складною. Тому тут ми приведемо ці рівняння лише в момент  $t = 0$  (в інші моменти часу рівняння лінзи можна отримати повертаючи з плином часу систему координат відповідно до повороту струни [7]):

$$y_1 = x_1 - \frac{q_s x_1}{\sqrt{2} x_1^2} \sqrt{\frac{\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)^2 - 4x_1^2} - 1 - x_2^2 + x_1^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2 - 4x_1^2}}, \quad (10)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{q_s x_2}{\sqrt{2} x_2^2} \sqrt{\frac{\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)^2 - 4x_1^2} + 1 + x_2^2 - x_1^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2 - 4x_1^2}}. \quad (11)$$

Підсилення яскравості точкового джерела світла в цей момент рівне:

$$m = \left| 1 - \frac{q_s^2 (x_1^2 + x_2^2)}{((1+x_1^2+x_2^2)^2 - 4x_1^2)^{3/2}} \right|^{-1}. \quad (12)$$

В цих рівняннях

$$q_s = \frac{8\pi G \mu}{c^2} \frac{D_{ls} D_l}{R D_s}, \quad (13)$$

де  $\mu$  — маса одиниці довжини струни, а всі інші величини визначаються аналогічно до попереднього розділу. Така петля, в силу рівнянь (9), буде обертатись і одночасно рухатись поступально в кар-

тинній площині неба, викликаючи транзйентні осциляторні коливання блиску об'єктів, біля яких вона проходить. Як і в випадку подвійної системи, для даного лінзування при великій прицільній відстані можна виділити підйом блиску

$$m_1 = 1 + \frac{q_s^2}{(\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2)^2}, \quad (14)$$

на фоні якого відбуваються коливання. Аналогічно попередньому розділу цей фон є нульовим порядком розкладу підсилення по  $R$  в розмірних величинах. Скориставшись означенням  $q_s$  і радіуса Ейнштейна  $(R_E = \sqrt{\frac{8G\mu\pi R}{c^2} \frac{D_l^s D_l^b}{R^2 D_s}})$  можна побачити що зв'язок між цими величинами буде аналогічний попередньому:  $q_s = R_E^2$ , тобто остання формула буде співпадати з формулою підсилення зображень при лінзуванні точковим об'єктом з масою рівною повній масі петлі. Згідно цієї формули, висота підйому підсилення рівна  $A = q_s^2/y_s^4$  ( $y_s \gg 1$  — прицільна відстань центру петлі відносно джерела світла), і ширина на половині амплітуди:  $T_{A/2} = 2\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot y_s/v$  ( $v = |\vec{v}|$ ). Перша ненульова гармоніка коливань рівна

$$m_{\sim} \approx \frac{3q_s^2}{(\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2)^4} ((\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2) \cos 2t + 2\tilde{y}_1\tilde{y}_2 \sin 2t). \quad (15)$$

Їх амплітуда рівна  $A_1 \approx 3q_s^2/y_s^6$ , період  $T_1 = \pi$  ( $\pi R/c$  в розмірних величинах). Наступна ненульова гармоніка буде рівна:

$$m_{\sim} \approx \frac{15q_s^2}{4(\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2)^4} \frac{(\tilde{y}_1^4 + 6\tilde{y}_1^2\tilde{y}_2^2 + \tilde{y}_2^4) \cos 4t + 4\tilde{y}_1\tilde{y}_2(\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2) \sin 4t}{(\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2)^2}. \quad (16)$$

#### 4. ПОРІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ БЛИСКУ, ВИКЛИКАНИХ СТРУНОЮ І ПОДВІЙНОЮ СИСТЕМОЮ

З попередніх двох розділів випливає, що лінзування петлями космічних струн і подвійними системами визначається, відповідно, параметрами  $q_b$  і  $q_s$ , тобто, прицільною відстанню систем відносно джерела світла і їх періодом обертання. Якщо ми прирівняємо періоди обертання, то побачимо, що в нас залишаються вільні два параметри, достатні для узгодження фонових підйомів блиску зображень і перших ненульових гармонік коливань.

Прирівнявши висоти підйомів блиску та амплітуди коливань, отримаємо:

$$\frac{q_b^2}{y_b^4} = \frac{q_s^2}{y_s^4}, \quad \text{і} \quad \frac{2q_b^2}{y_b^6} = \frac{q_s^2}{y_s^6}. \quad (17)$$

З цих рівнянь знаходимо, що  $y_b = y_s\sqrt{2}$  і  $q_b = 2q_s$ , тобто

$$\frac{8Gm_c}{c^2} \frac{D_l^b}{r^2} = 16\pi \frac{G\mu}{c^2} \frac{D_l^s}{R}. \quad (18)$$

Прирівнявши період обертання подвійної системи та період обертання струни  $2\pi R/c$ , отримаємо

$$\frac{4r^3}{Gm_c} = \frac{R^2}{c^2}. \quad (19)$$

Тоді з останніх двох рівнянь буде випливати, що

$$\frac{16c^2 r^2}{GR^2} \frac{D_l^b}{r} = 8\pi\mu \frac{D_l^s}{R} \iff \left(\frac{D_l^b}{D_l^s}\right)^2 = \frac{\pi\mu G}{2c^2} \frac{\theta_s}{\theta_b}, \quad (20)$$

де  $\theta_b = r/D_l^b$  і  $\theta_s = R/D_l^s$  (величини з індексами  $b$  і  $s$  відносяться до подвійної системи і струни відповідно). Прирівнявши кутові розміри цих об'єктів і взявши  $\mu = 10^{22}$  г/см, отримаємо відношення відстаней до розглянутих систем, параметри яких забезпечують подібність кривих блиску:

$$\frac{D_l^b}{D_l^s} = 10^{-3}. \quad (21)$$

При цьому, маса компонентів подвійної системи, згідно формули (19), буде рівна:

$$m_c \approx 20 T_{\text{дiб}} M_{\odot} \quad (22)$$

( $T_{\text{дiб}}$  — період коливань в добах).

Прирівнявши ширину підйомів на половині амплітуди, знайдемо зв'язок між швидкостями центрів мас систем  $v_b = \sqrt{2}v_s$ , або в розмірних величинах  $v_b \approx 10^{-3}v_s$ .

Таким чином, ми отримали параметри обох лінз, при яких вони дають подібні коливання блиску. Для прикладу візьмемо петлю з  $q_s = 1.3$ , яка рухається зі швидкістю  $v_s = 0.36$  і лінзує джерело, розміщене на прицільній кутовій відстані  $y_s = 2$  та подвійну систему з  $q_b = 0.65$ , яка рухається зі швидкістю  $v_b = 0.51$  ( $v = 11$  км/с) і лінзує джерело на прицільній відстані  $y_b = 2.8$ . При цьому отримуємо зміни блиску, зображені на рис. 1.

З цього графіку видно, що такі коливання буде важко неможливо розрізнити. Різниця кривих блиску, як помітно з графіку, буде приблизно рівна різниці других гармонік. Скориставшись формулами (8) і (16), отримуємо амплітуду коливань цієї різниці

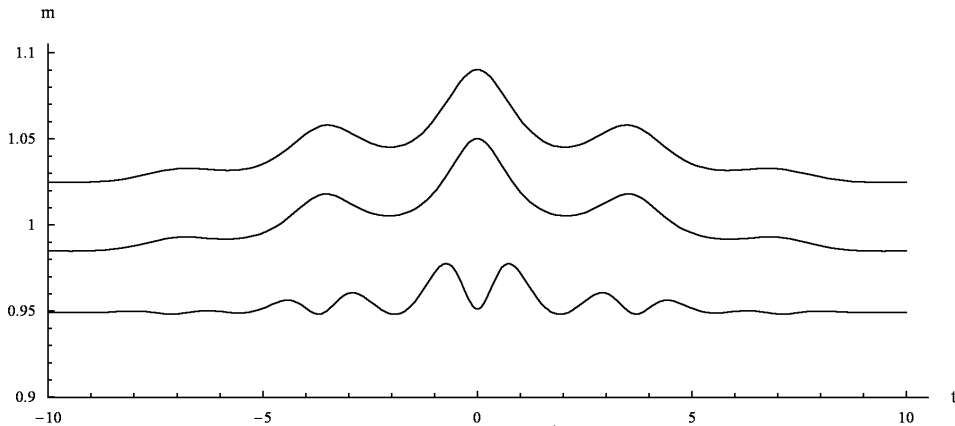
$$\frac{15q_s^2}{4y_s^8} - \frac{6q_b^2}{y_b^8} = \frac{9q_s^2}{4y_s^8}. \quad (23)$$

Відношення цієї величини до амплітуди коливань блиску буде рівне  $3/(4y_s^2)$ , що в даному випадку порядку  $10^{-1}$ .

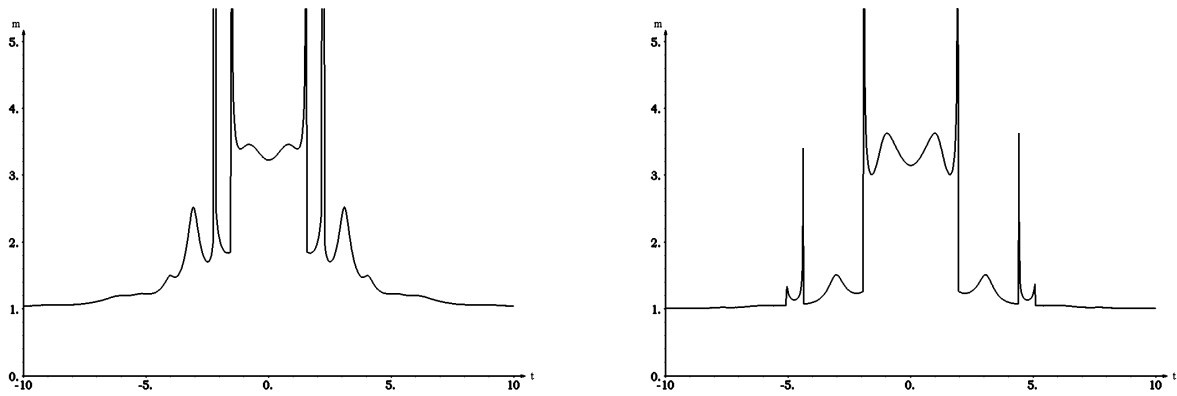
## 5. ВІДМІННОСТІ ЛІНЗУВАНЬ ПРИ БЛИЗЬКОМУ ПРОХОДЖЕННІ ПРОМЕНІВ

Вище розглядався випадок, коли прицільна відстань значно більша розмірів лінз. Якщо ж промені світла проходять в області систем, тобто відстань до них порядку розмірів системи, то підсилення точкових об'єктів в деякі моменти буде виростати до нескінченності. Це зв'язано з тим, що в даному випадку джерело перетинатиме каустику — уявну криву, підсилення точкових джерел на якій буде нескінченним. Таке явище притаманне як подвійним системам [6], так і космічним струнам [8]. Однак при лінзуванні петлями космічних струн, як і прямими струнами, крім каустик, існують ще такі уявні криві, при перетині яких відбувається подвоєння зображення точкового об'єкта без нескінченного піднесення.

Рис. 2, на якому приведені криві блиску для часткового випадку проходження центру систем через точкове джерело світла, демонструє вказані вище особливості таких лінзувань. На цьому рисунку можна помітити спалахи зі скінченням максимумом в випадку лінзування петлею, що викликано не перетином каустики, а збільшенням кількості зображень. Така особливість лінзування петлями виділяє їх з класу лінзуючих об'єктів.



**Рис. 1.** Коливання блиску, викликані подвійною системою (верхній графік, зміщений вгору на 0.02), космічною струною (середній графік, зміщений вниз на 0.02) і їх різниця (нижній графік, збільшений в 10 разів і піднятий вгору на 0.95).



**Рис. 2.** Коливання блиску, викликані подвійною системою (зліва) і петлею (справа). В момент  $t=0$  джерело світла проєктується в центр системи

## 6. ВИСНОВОК

З приведених вище формул випливає, що космічні струни і подвійні системи можуть давати подібні криві блиску джерел при спостереженні гравітаційного лінзування, якщо кутова відстань між центром цих систем і джерелом більша розмірів каустики. Однак, при цьому, подвійні системи будуть розміщені на три порядки ближче до нас і будуть мати досить велику масу, тому вони можуть бути помічені іншими методами. В даному випадку різниця між кривими блиску буде коливатись з подвійною частотою, як показано вище.

При близькому проходженні розглянуті системи будуть викликати спалахи, по формі яких можна визначити, який об'єкт виступає в ролі лінзи. В цьому випадку можуть спостерігатись характерні особливості лінзування петлями космічних струн: майже миттєва поява додаткових зображень, викликана різкою зміною кута заломлення при перетині струною променя світла.

При проходженні петлі, в проекції, по протяжному об'єкту, який має неоднорідний розподіл поверхневої яскравості, буде проявляти себе лінійність (одномірність) космічних струн, тобто буде помітна лінія різкої зміни яскравості. Це зв'язано з тим, що промені, які проходять близько до струни, але по різні сторони від неї, суттєво заломлюються в протилежних напрямках, і тому приходять з різних областей джерела. Така лінія розриву яскравості буде відповідати положенню петлі. Явище такого типу не притаманне лінзуванню подвійною системою.

В зв'язку з повідомленням про відкриття першого гравітаційного лінзування на космічній струні [4], відновила цікавість до гравітаційного лінзування такими об'єктами і до перспектив майбутніх оглядів неба для пошуку гравітаційних лінз [9]. Приведені вище особливості лінзування космічними струнами і описані в цій статті осциляції блиску джерел можуть допомогти в пошуку космічних струн при спостереженні гравітаційного лінзування.

1. Colley W.N., Schild R.E., Abajas C. // *Astrophys. J.* — 2003. — **587**. — P. 71.
2. Dominik M., Hirshfeld A.C. // *Astron. and Astrophys.* — 1996. — **313**. — P. 841.
3. Vilenkin A., Shellard E.P.S. *Cosmic Strings and other Topological Defects* — Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
4. Sazhin M., Longo G., Capaccioli M. et al. // *Monthly Notices Royal Astron. Society* — 2003. — **343**. — P. 353.
5. Schneider P., Ehlers J., Falco E.E. *Gravitational Lenses* — Berlin: Springer-Verlag, 1992.
6. Schneider P., Weiß A. // *Astron. and Astrophys.* — 1986. — **164**. — P. 237.
7. de Laix A., Vachaspati T. // *Phys. Rev. D* — 1996. — **54**. — P. 4780.
8. Hogan C., Narayan R. // *Monthly Notices Royal Astron. Society* — 1984. — **211**. — P. 575.
9. Huterer D., Vachaspati T. // *Phys. Rev. D* — 2003. — **68**. — P. 041301.

Надійшла до редакції 13.06.2003