



УДК 524.7

## Колімація релятивістських та нерелятивістських ударних хвиль в середовищі з великомасштабним градієнтом густини

В. Марченко, Б. Гнатик

Астрономічна обсерваторія Київського національного університету імені Тараса Шевченка

*В роботі розглянуто подібні та відмінні риси виникнення анізотропії початково сферично-симетричних ударних хвиль в середовищах з великомасштабним градієнтом густини. Дослідження проведено на прикладі експоненційного середовища. Показано, що для нерелятивістських ударних хвиль існує анізотропія профілю ударної хвилі та параметрів течії. В ультрарелятивістському випадку профіль ударної хвилі залишається сферично-симетричним, але профіль кутового розподілу Лоренц-фактора стає різко анізотропним.*

**КОЛЛИМАЦИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМ ГРАДИЕНТОМ ПЛОТНОСТИ**, Марченко В.В., Гнатик Б.И. — В работе рассмотрены подобные и различные черты возникновения анизотропии первоначально сферически-симметричных ударных волн в средах с крупномасштабным градиентом плотности. Исследование проведено на примере экспоненциальной среды. Показано, что для нерелятивистских ударных волн существует анизотропия профиля ударной волны и параметров течения. В ультрарелятивистском случае профиль ударной волны остается приблизительно сферически-симметричным, но профиль углового распределения Лоренц-фактора становится резко анизотропным.

**COLLIMATION OF RELATIVISTIC AND NONRELATIVISTIC SHOCK WAVES IN MEDIUM WITH LARGE-SCALE DENSITY GRADIENT**, by Marchenko V.V., Hnatyk B.I. — The similarity and difference in evolution of relativistic and nonrelativistic shock waves in medium with large-scale density gradient and initiation of profile anisotropy are investigated. The exponential density distribution is considered. The presence of shock wave profile and operation factors of flow anisotropy in nonrelativistic case are shown. The Lorentz-factor profile anisotropy in the relativistic case is emphasized but the shock wave profile in this case is approximately spherically symmetric.

### 1. ВСТУП

Вибухоподібні процеси в астрофізичних умовах — дуже поширене явище. Це і спалахи Наднових [1, 2] та Гіпернових зір [3], спалахи на Сонці [4], вибухоподібні явища в активних ядрах галактик [5] тощо. При сильному вибуху утворюється потужна ударна хвиля, подальший рух якої визначається густиною оточуючого середовища та енергією вибуху. Під час руху ударної хвилі її швидкість може бути значно меншою швидкості світла  $c$  (говорять про нерелятивістські ударні хвилі), або близькою до швидкості світла (релятивістські ударні хвилі). Для прикладу, нерелятивістські ударні хвилі визначають характеристики залишків Наднових, обмежують бульбашки, видуті зоряними вітрами від гарячих зір тощо [6]. З релятивістськими та ультрарелятивістськими ударними хвилями пов'язані, зокрема, процеси, які відбуваються у Гіперновій зорі при колапсі ядра і поширенні релятивістських джетів в оболонці зорі. Дана модель зараз широко використовується при поясненні гамма-спалахів [7–12].

В нашій роботі розглядаються спільні та відмінні риси поведінки сильної ударної хвилі в середовищі з великомасштабним градієнтом густини у випадках доволіно релятивістського (від нерелятивістського до ультрарелятивістського) руху плазми, а також перехід між цими граничними випадками. Зокрема, досліджено виникнення анізотропії в початково сферичному потоці плазми

внаслідок впливу великомасштабної неоднорідності (градієнта) розподілу густини. Розгляд проведено на прикладі руху ударної хвилі в середовищі з експоненційним розподілом густини. Модель для нерелятивістського руху відповідає, зокрема, еволюції спалаху Наднової зорі в галактичному диску (Розділ 2) тощо. Релятивістському ж випадку відповідає рух ударної хвилі в оболонці самої Гіпернової зорі (Розділ 3). Основні висновки роботи приведені в Розділі 4.

## 2. ГІДРОДИНАМІЧНА КОЛІМАЦІЯ НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ТЕЧІЇ ПЛАЗМИ

Розглянемо миттєве виділення енергії  $E$  в середовищі з експоненційним розподілом густини та з ненульовою асимптотикою:

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot \exp \left[ -\frac{r}{H} \cdot \cos(\theta) \right] + \rho_{\text{plato}}, \quad (1)$$

де  $\rho_0$  — густина в точці виділення енергії,  $\rho_{\text{plato}}$  — постійна густина на великих відстанях,  $H$  — масштаб висот,  $\theta$  — кут між вибраним напрямком руху ударної хвилі і напрямком, протилежним до градієнта густини. Візьмемо наступні числові значення для цих параметрів:  $E = 10^{52}$  ерг,  $H \approx 100$  пс,  $\rho_0 = 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>. Будемо розглядати два випадки:

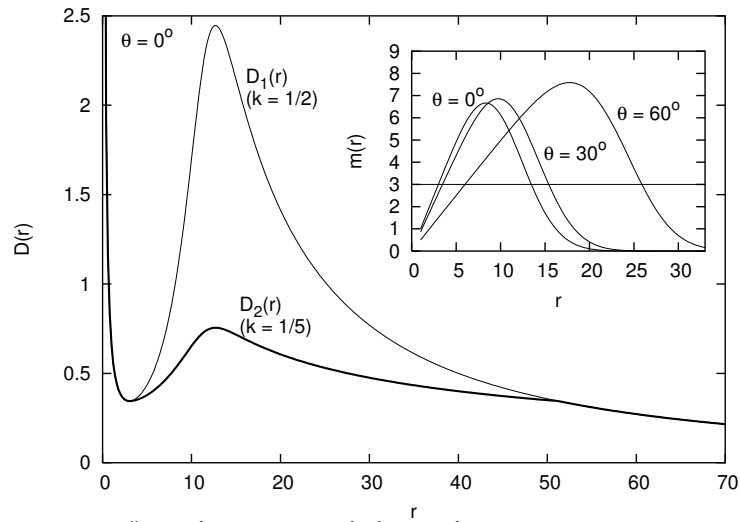
1)  $\rho_{\text{plato}} = 0$  — ідеалізований випадок нульової асимптотики, коли з відстанню густина прямує до нуля;

2)  $\rho_{\text{plato}} \neq 0$  — випадок ненульової асимптотики, коли з відстанню густина зменшується лише до певного значення, а далі залишається постійною. Утворюється так зване плато. За числове значення плато візьмемо  $\rho_{\text{plato}} = 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>.

Математичною моделлю розглядуваного випадку є задача про сильний точковий вибух в неоднорідному середовищі, в результаті якого утворюється сильна ударна хвиля. Нерелятивістський випадок течії з нульовою асимптотикою розглядався в [13, 14]. Запропоновану там методику застосуємо для розгляду особливостей ненульової асимптотики. Для опису руху нерелятивістської ударної хвилі використаємо формулу

$$D(r) = \text{const} \cdot (\rho(r) \cdot r^3)^{-k}, \quad (2)$$

де  $D(r)$  — швидкість фронту ударної хвилі,  $\rho(r)$  — довільний розподіл густини зовнішнього середо-



**Рис. 1.** Поведінка руху ударної хвилі при переході від сповільнення до прискорення і навпаки. На вставці показано інтервали прискорення ( $m > 3$ ) і сповільнення ударної хвилі для різних секторів

вища, показник степеня  $k$  рівний

$$k = \begin{cases} 1/2, & m(r) \leq 3, \\ 1/5, & m(r) > 3. \end{cases} \quad (2a)$$

де

$$m(r) = -\frac{d \ln(\rho(r))}{d \ln r} \quad (2b)$$

— параметр, який характеризує ступінь неоднорідності (градієнт густини) середовища. Випадок  $k = 1/2$  відповідає сповільненню ударної хвилі, а  $k = 1/5$  — її прискоренню. Врахувавши те, що на малих відстанях від точки вибуху густину можна вважати постійною ( $m = 0$ ), та, використавши автомобельний розв'язок Л.І.Седова для однорідного середовища [15], можна записати рівняння (2) окремо для випадку сповільнення і прискорення

$$D_1(r) = \frac{2}{5} \left( \frac{E}{\alpha_{nr} \cdot \rho(r)} \right)^{1/2} \cdot r^{-3/2}, \quad (3)$$

$$D_2(r) = D_1(r_1) \cdot \left( \frac{\rho(r_1) \cdot r_1^3}{\rho(r) \cdot r^3} \right)^{1/5}, \quad (4)$$

де  $r_1$  — точка переходу з режиму сповільнення на режим прискорення, тобто відстань, яка задовольняє рівнянню  $m(r) - 3 = 0$  (див. вставку на рис. 1),  $\alpha_{nr} = 0.4936$  — автомобельна постійна (чисельне значення наведено для нерелятивістського випадку. У випадку релятивістської ударної хвилі ця автомобельна постійна буде дещо інша).

Якщо розподіл густини такий, що на деякій відстані існує перехід з області прискорення  $m(r) > 3$  до області сповільнення, де  $m(r) \leq 3$ , то виявляється третя особливість руху ударної хвилі. Сповільнення починається не з  $k = 1/2$ , а за законом (4), тобто з  $k = 1/5$ , і тільки коли величина  $D_2(r)$  зрівняється з  $D_1(r)$ , сповільнення переходить на  $k = 1/2$ . Це показано на рис. 1.

В даній задачі зручно перейти до безрозмірних змінних, в яких розрахунок точкового вибуху в середовищі з розподілом густини, що містить тільки один параметр віддалі (в даному випадку це шкала висот  $H$ ) має універсальний характер:  $r^* = r/R_M$ ,  $D^* = D/D_M$ ,  $t^* = t/t_M$ ,  $\rho^* = \rho/\rho_M$ . Тут  $r_M = H$ ,  $D_M = \sqrt{\frac{E}{\alpha_{nr} \cdot \rho_0 \cdot H^3}}$ ,  $t_M = \sqrt{\frac{\alpha_{nr} \cdot \rho_0 \cdot H^5}{E}}$ ,  $\rho_M = \rho_0$ . Далі для зручності зірочки опускатимемо.

Щоб знайти залежність відстані і швидкості фронту ударної хвилі від часу, перепишемо рівняння (2) у вигляді двох рівнянь, розв'язки яких будемо знаходити чисельно методом Рунге-Кутта

$$\frac{dr(t)}{dt} = D(t), \quad \frac{dD(t)}{dt} = k \cdot \frac{D(t)^2}{r(t)} \cdot (m(r) - 3).$$

В розглядуваному тут випадку плоскої експоненційної атмосфери густина змінюється по-різному в залежності від вибраного напрямку (див. (1)). Для дослідження руху ударної хвилі в такому середовищі будемо використовувати секторне наближення. Розіб'ємо середовище на необхідну нам кількість секторів (сектор визначається кутом  $\theta$ ), і будемо розв'язувати рівняння окремо для кожного сектора, вважаючи, що розподіл густини для цього сектора справедливий для всіх напрямків. Ідея секторного наближення базується на припущенні про збереження енергії в межах кожного сектора, тобто про відсутність перетікання енергії між секторами. Профіль фронту ударної хвилі буде суттєво залежати від поведінки густини на далеких відстанях (рис. 2).

У випадку нульової асимптотики (рис. 2, зліва) в момент часу  $t \approx 30.7$  відбувається так званий прорив атмосфери, коли за скінчений проміжок часу ударна хвиля поширюється на нескінченність, в той час як у випадку ненульової асимптотики прориву не буде, і ударна хвиля в плато з часом виходить на седовську асимптотику. Залежність відстані і швидкості ударної хвилі від часу для деяких секторів представлена на рис. 3. Видно, що навіть у випадку нульової асимптотики для секторів з  $\theta > \pi/2$  прориву взагалі не буде, тому що в цих секторах густина з відстанню зростає (граничний випадок  $\theta = \pi/2$  відповідає постійній густині) і ударна хвиля завжди сповільнюється.

З аналізу отриманих результатів можна зробити наступні висновки: профіль фронту ударної хвилі у випадку нерелятивістської течії плазми сильно спотворюється внаслідок градієнта густини.

У випадку нульової асимптотики має місце прорив атмосфери. Колімація потоку в момент прориву (відношення максимальної ширини профілю до  $z$ -координати максимуму ширини) рівна 1.2. Параметри течії також мають суттєво анізотропний характер.

### 3. ГІДРОДИНАМІЧНА КОЛІМАЦІЯ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ТЕЧІЇ ПЛАЗМИ

Розглянемо тепер випадок релятивістської течії плазми в експоненційній атмосфері (1), в якій миттєво та локалізовано виділяється енергія  $E$ . Для даної задачі візьмемо наступні числові параметри, типові для Гіпернових:  $E = 10^{52}$  ерг,  $H = 10^9$  см,  $\rho_0 = 10^3$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{plato}} = 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>.

Як і в попередній задачі будемо розглядати два випадки: з нульовою та ненульовою асимптотикою. Випадок ненульової асимптотики відповідає, наприклад, виходу ударної хвилі з зорі в навколосоряне середовище постійної густини  $\rho_{\text{plato}}$ . Для опису руху фронту релятивістської ударної хвилі будемо використовувати узагальнення аналітичної апроксимаційної формули (2) на випадок довільного релятивізму [16, 17]

$$\Gamma\beta = \text{const} \cdot (\rho(r) \cdot r^3)^{-k}, \quad (5)$$

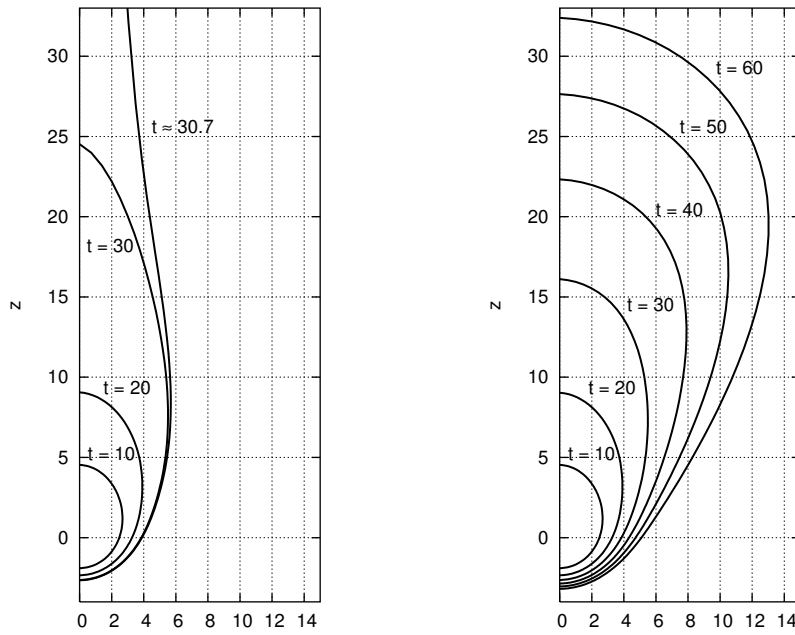
де  $\Gamma$  — Лоренц-фактор фронту ударної хвилі,  $\beta = D/c$  — безрозмірна швидкість фронту ударної хвилі,  $c$  — швидкість світла, параметри  $k$  та  $m$  так само визначаються формулами (2a, 2b).

Аналогічно до нерелятивістського випадку, запишемо це рівняння окремо для випадку сповільнення та прискорення ударної хвилі. Початкові умови знайдемо, використавши автономельні релятивістські розв'язки Бландфорда та МакКі [18]

$$(\Gamma\beta)_1 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{E}{\alpha_r \cdot \rho(r) \cdot c^2} \cdot r^{-3/2}}, \quad (6)$$

$$(\Gamma\beta)_2 = \Gamma(r_1) \cdot \beta(r_1) \left( \frac{\rho(r_1) \cdot r_1^3}{\rho(r) \cdot r^3} \right)^{1/5}, \quad (7)$$

де  $\alpha_r = 0.237$  — автономельна постійна у релятивістському випадку.

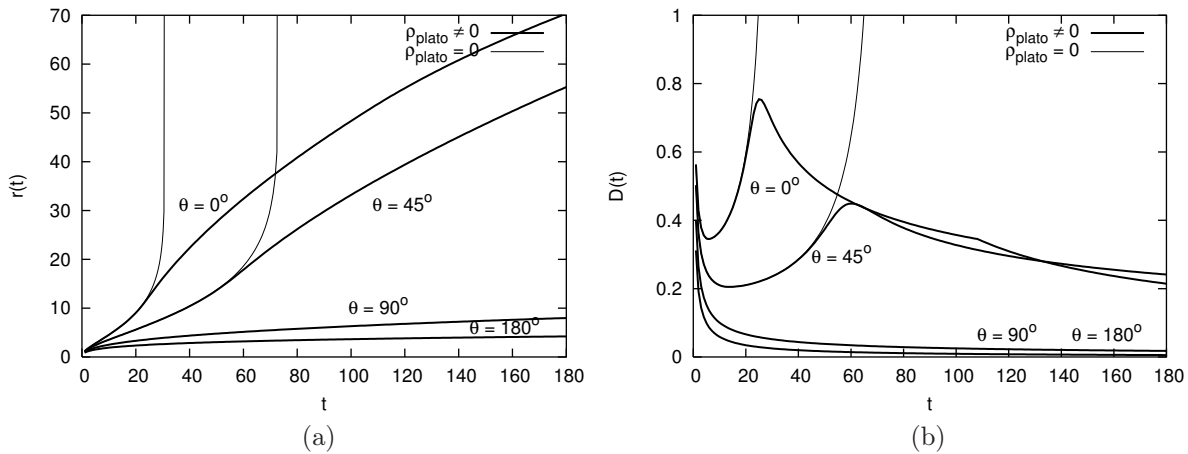


**Рис. 2.** Профілі фронту ударної хвилі у випадку нульової (зліва), та ненульової асимптотики (справа) в різні моменти часу.

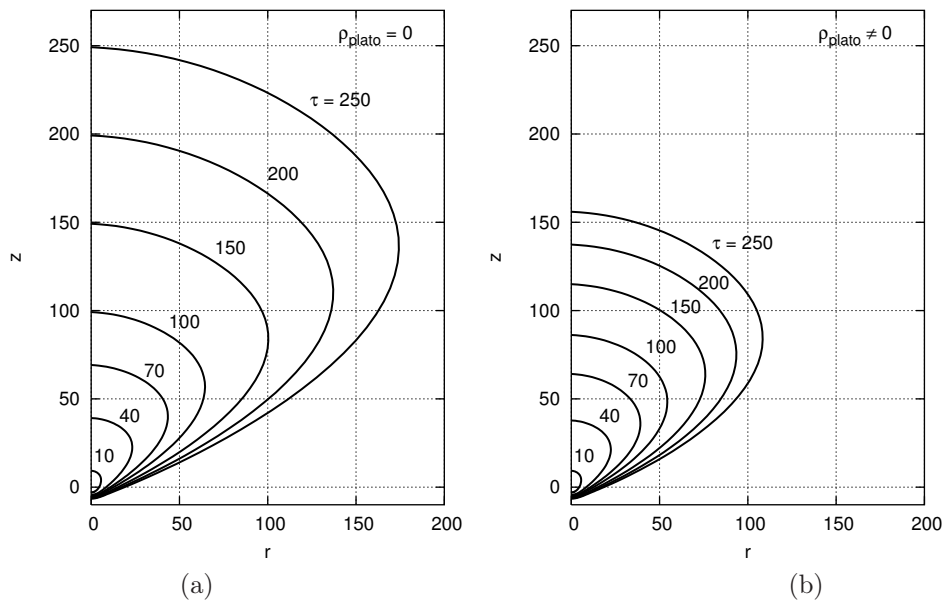
Дані формули справедливі як для ультрарелятивістського, так і для нерелятивістського випадку. Якщо рух ударної хвилі нерелятивістський, то  $\Gamma \approx 1$  і цей закон визначає зміну швидкості з відстанню. Якщо ж рух ультрарелятивістський, то  $\beta \approx 1$  і цей закон визначає зміну Лоренц-фактора з відстанню. У випадку релятивістського руху як нормуючу величину для швидкості природньо взяти  $c$ , для відстані —  $H$  і для часу відповідно комбінацію  $H/c$ . Отже  $r^* = r/R_M$ ,  $\beta = D/c$ ,  $\tau = t/(H/c)$ ,  $\rho^* = \rho/\rho_0$ . Надалі зірочку опускатимемо.

Для чисельного розрахунку з рівняння (5) отримаємо систему з трьох диференціальних рівнянь, яку будемо розв'язувати методом Рунге-Кутта

$$\frac{dr(\tau)}{d\tau} = \beta(\tau),$$



**Рис. 3.** Залежність відстані (а) та швидкості ударної хвилі (б) від часу для різних секторів у випадку нульової та ненульової асимптотики.



**Рис. 4.** Профіль ударної хвилі у випадку нульової (а), та ненульової (б) асимптотики для однакових моментів часу

$$\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = \frac{k \cdot \beta(\tau)^2}{r(\tau)} \cdot (m-3) \cdot (1-\beta(\tau)^2),$$

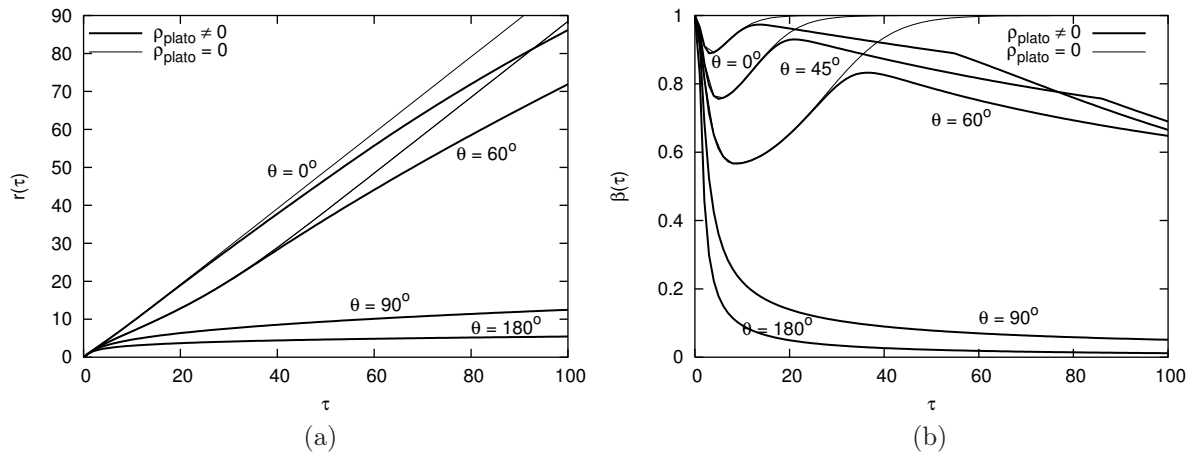
$$\frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = \frac{k \cdot (\Gamma(\tau) \cdot \beta(\tau))^3}{r(\tau)} \cdot (m-3) \cdot (1-\beta(\tau)^2).$$

Перша суттєва відмінність релятивістського руху від нерелятивістського - відсутність прориву (рис. 4). Пояснюється це тим, що швидкість  $\beta$  не може бути більшою одиниці. У випадку нульової асимптотики швидкість асимптотично наближається до одиниці.

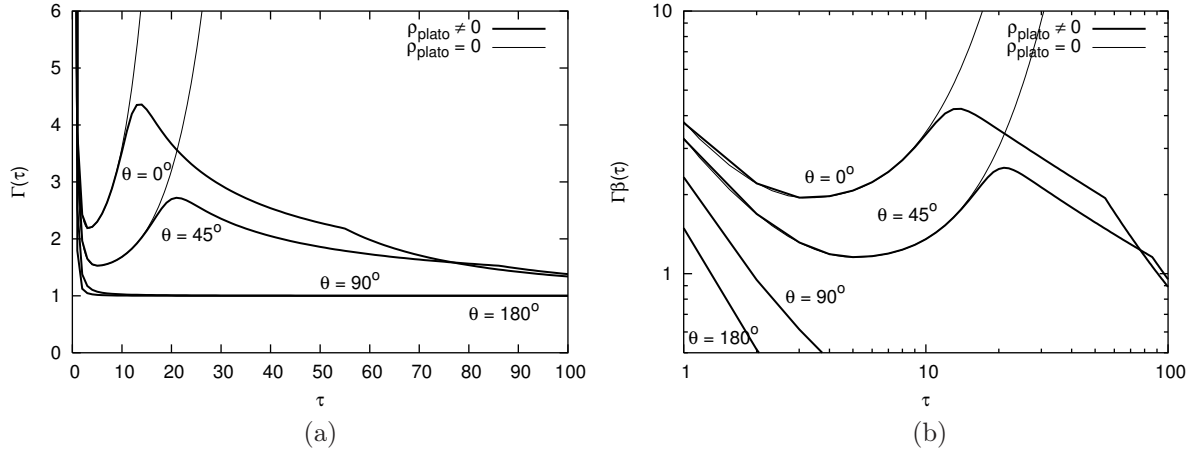
На рис. 5 видно, що при  $\rho_{\text{plato}} = 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$  і графік  $r(\tau)$  асимптотично наближається до прямої.

Лоренц-фактор у випадку нульової асимптотики постійно збільшується і в асимптотичі прямує до нескінченності.

З розгляду релятивістських течій в експоненційній атмосфері бачимо, що профіль фронту ударної хвилі на релятивістській стадії суттєво не спотворюється і, на відміну від нерелятивістського випадку, має форму, близьку до сфери. Однак, з переходом частини фронту (якій відповідає рух вниз) на нерелятивістський рух, форма профілю деформується і виникає колімація потоку в напрямку падіння густини. При цьому розподіл Лоренц-фактора по напрямках також має суттєво



**Рис. 5.** Залежність відстані (а) та швидкості ударної хвилі (b) від часу для різних секторів у випадку нульової та ненульової асимптотики.



**Рис. 6.** Залежність Лоренц-фактора (а) та добутку Лоренц-фактора на швидкість ударної хвилі (b) від часу для різних секторів у випадках нульової та ненульової асимптотики.

анізотропний характер.

#### 4. ВИСНОВКИ

Ми розглянули особливості поширення ударних хвиль в релятивістському та нерелятивістському випадках. Початкові стадії точкового вибуху є релятивістськими і описуються автотельними розв'язками Бландфорда та МакКі [18]. На подальший рух ударної хвилі суттєво впливають параметри середовища, зокрема, характер розподілу густини. В однорідному та слабо неоднорідному середовищі ударна хвиля сповільнюється і стає нерелятивістською (в класичних задачах про залишки Наднових тощо ударна хвиля виникає на таких відстанях від центру, яким одразу відповідає нерелятивістський етап). В середовищі із значним падінням густини ударна хвиля спочатку сповільнюється, а потім починає прискорюватися і може досягати швидкостей близьких до швидкості світла. В реалістичних моделях густина середовища не може спадати до нуля і на деякій відстані виходить на ділянку постійної густини (випадок ненульової асимптотики). Тому в такому випадку прискорення ударної хвилі на деякій відстані зміниться сповільненням і навіть початково ультрарелятивістська ударна хвиля в подальшому може стати нерелятивістською.

В нерелятивістському випадку з нульовою асимптотикою має місце так званий прорив атмосфери. При цьому ударна хвиля за скінчений проміжок часу поширюється на нескінченність. У випадку ж ненульової асимптотики прориву не буде, так як при виході ударної хвилі на постійну густину на зміну прискоренню прийде сповільнення. Для релятивістського випадку прориву не буде при будь-якому розподілі густини, тому що швидкість ударної хвилі обмежена швидкістю світла.

Важливим з астрофізичної точки зору є питання про колімацію потоку плазми. Колімація ультрарелятивістського потоку плазми якісно відрізняється від нерелятивістського. Особливостями нерелятивістської течії є анізотропія форми фронту і параметрів всередині ударної хвилі. Внаслідок градієнта густини профіль ударної хвилі буде витягуватися в напрямку, протилежному до градієнта густини. В ультрарелятивістському ж випадку профіль фронту суттєво спотворюватись не буде, так як швидкість фронту ударної хвилі в усіх напрямках  $\beta \approx 1$ , але колімація по Лоренц-фактору може бути суттєва і параметри всередині ударної хвилі будуть різко анізотропні. Така особливість релятивістської течії важлива з огляду на гамма-спалахи, де очікується значна колімація ультрарелятивістського потоку.

1. *Frail B.A.* Gamma-ray bursts and Supernovae // American Astronomical Society Meeting 202. — 2003. — **36**.
2. *Weaver T.A.* The structure of supernova shock waves // Astrophys. J. Suppl. Ser. — 1976. — **32**. — P. 233–282.
3. *Hansen, Brad M.S.* On the Frequency and Remnants of Hypernovae // The Astrophysical Journal. — 1999. — **512**. — P. L117–L120.
4. *Vrsnak, Bojan* Solar flares and coronal shock waves // Journal of Geophysical Research. — 2001. — **106**. — P. 25291–25300.
5. *Contini M.* Composite Models (Shock and Photoionisation) for the Interpretation of AGN Spectra // Astrophysics and Space Science. — 1995. — **233**. — P. 261–266.
6. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Silich S.A* Shock-wave propagation in the nonuniform interstellar medium // Reviews of Modern Physics. — 1995. — **67**. — P. 661–712.
7. *Zhang W., Woosley S.E.* Relativistic Jets from Collapsars: Gamma-Ray Bursts // astro-ph/0209482.
8. *Zhang W., Woosley S.E., McFadyen A.I.* Relativistic Jets in Collapsars // Astrophys. J. — 2003. — **586**. — P. 356–371.
9. *Piran T.* Gamma-ray bursts and the fireball model // Phys. Rept. — 1999. — **314**. — P. 575–667.
10. *Woosley S.E., Eastman R.G., Schmidt B.P.* Gamma-Ray Bursts and Type Ic Supernova: SN 1998bw // Astrophys. J. — 1999. — **516**. — P. 788–796.
11. *Matheson T.* The First Direct Supernova/GRB Connection: GRB 030329/SN 2003dh // astro-ph/0309793

12. *Tan J.C., Matzner C.D., McKee C.F.* Trans-Relativistic Blast Waves in Supernovae as Gamma-Ray Burst Progenitors // *Astrophys. J.* — 2001. — **551**. — P. 946–972.
13. *Гнатик Б.И.* Сильные адиабатические ударные волны в произвольно неоднородных средах. Аналитический подход // *Астрофизика*. — 1987. — **26**. — С. 113–128.
14. *Гнатик Б.И., Петрук О.Л.* Новий наближений аналітичний метод розрахунку точкового вибуху в неоднорідному середовищі та його застосування до моделювання ренгенівського випромінювання тривимірних залишків Наднових зір // *Кинематика и физика небесных тел*. — 1996. — **12**. — P. 44–64.
15. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.
16. *Гнатик Б.И.* Закономерности движения релятивистских ударных волн в неоднородных средах // *Письма в АЖ*. — 1985. — **11**. — P. 785–788.
17. *Berezinsky V.S., Blasi P., Hnatyk B.I.* A new mechanism for gamma-ray bursts in SN type I explosions. 1. Weak magnetic field // *Astrophys. J.* — 1996. — **469**. — P. 311–319.
18. *Blandford R.D., McKee C.F.* Fluid dynamics of relativistic blast waves // *Phys. Fluids*. — 1976. — **19**. — P. 1130–1138.

Надійшла до редакції 3.05.2003