



УДК 524.7+523.4-8

Устойчивость газопылевого диска при перегибах угловой скорости*

В.А. Антонов, А.С. Баранов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

Рассматривается неустойчивость вращающихся сплюснутых квазигомогенных систем, состоящих из смеси пыли и газа. Изучаются возмущения, затрагивающие ограниченную зону и подверженные самогравитации. Выделяются только те случаи, когда неустойчивость обусловлена дифференциальностью вращения. Используется приближение толстого слоя (цилиндрическая геометрия). Установлено разделение таких неустойчивостей на два типа. Для возмущения первого типа характерны перераспределение вещества по азимуту и инкремент порядка $\sqrt{G\rho}$ (G – гравитационная константа, ρ – плотность). Возмущения второго типа обладают существенно меньшим инкрементом, но имеют место при более широких условиях, а перераспределение плотности происходит в основном по радиусу. Построены конкретные примеры возмущений этого второго типа.

СТІЙКІСТЬ ГАЗОПИЛОВОГО ДИСКА ПРИ ПЕРЕГИНАХ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ, Антонов В.А., Баранов А.С. – Розглядається нестійкість стиснутих квазіоднорідних систем, що обертаються і складаються із суміші пилу і газу. Вивчаються збурення, які торкаються обмеженої зони і підлягають самогравітації. Виділяються тільки ті випадки, коли нестійкість обумовлена диференціальністю обертання. Використовується наближення товстого шару (циліндрична геометрія). Встановлено поділ таких нестійкостей на два типи. Для збурення першого типу характерний перерозподіл речовини по азимуту та інкремент порядку $\sqrt{G\rho}$ (G – гравітаційна константа, ρ – густина). Збурення іншого типу мають істотно менший інкремент, але мають місце при більш широким умовам, а перерозподіл густини відбувається в основному по радіусу. Побудовано конкретні приклади збурень цього другого типу.

STABILITY OF A GAS-DUST DISK AT INFLECTIONS OF THE ANGULAR VELOCITY, by Antonov V.A., Baranov A.S. – The instability of a rotating, oblate, quasi-homogeneous system consisting of a gas-dust mixture is analyzed. Disturbances affecting a limited zone and subject to self-gravitation are studied. Cases in which the instability is the result of differential rotation are considered. A thick-disk approximation (in a cylindrical geometry) is used. The division of such instabilities into two types is established. The first type of disturbance is characterized by an azimuthal redistribution of material and an increment of the order of $\sqrt{G\rho}$ (G is the gravitational constant and ρ is the density). Disturbances of the second type have substantially smaller increments, but occur under more general conditions, and have primarily radial density redistributions. Specific examples of disturbances of the second type are constructed.

1. Введение

В имеющейся литературе рассматривались различные виды неустойчивостей газопылевых дисков [1–11]. Известная неустойчивость Джинса мало зависит от всяких градиентов основных термодинамических величин [12–14] и проявляется в основном в виде кольцеобразных возмущений. Даже если она выражается в несимметричных возмущениях, дифференциальное вращение мало меняет общую картину, поскольку инкременты неустойчивости Джинса, как правило, достаточно велики: время развития неустойчивости меньше времени закручивания дифференциальным вращением. Иначе обстоит дело с медленно развивающимися неустойчивостями. Тогда дифференциальность вращения надо принимать во внимание как один из основных факторов. Аналитические

* Впервые опубликована в Астрон. ж. – 1998. – 75, № 3. – С. 467–475.

методы исследования роли такой дифференциальности для проблемы устойчивости почти не отражены в известной литературе, и мы хотим заполнить этот пробел. Между тем правильная оценка роли дифференциальности вращения очень нужна для изучения эволюции планетных колец или галактических дисков.

2. Модель

Рассмотрим упрощенную модель, в которой резкие перегибы угловой скорости связаны с соответствующей неоднородностью внешнего гравитационного поля, тогда как сам диск сохраняет постоянные плотность ρ и давление p . Линеаризация двумерных уравнений гидродинамики в предположении, что начальное поле скоростей по отношению к твердотельно вращающейся со скоростью Ω_0 системе координат (x, y) приводит к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial v'_r}{\partial t} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v'_r}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial R} + \frac{\partial \Phi'}{\partial R} + 2 \left(\Omega_0 + \frac{v_\theta}{R} \right) v'_\theta, \\ \frac{\partial v'_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} v'_r &= -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} - \left(2\Omega_0 + \frac{v_\theta}{R} \right) v'_r, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\rho}{R} (R v'_r) + \frac{\rho}{R} \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \theta^2} &= -4\pi G \rho'.\end{aligned}\tag{1}$$

В (1) приняты следующие обозначения: R, θ – полярные координаты, v_r, v_θ – соответствующие компоненты скорости по отношению к подвижной системе координат, G – гравитационная постоянная, t – время.

Мы ограничиваемся локальной задачей, то есть рассматриваем возмущения, характерные длины которых много меньше расстояния R_0 от центра системы. Тогда можно пренебречь эффектами кривизны линии тока и перейти к локальной декартовой системе координат. Ось x направим по трансверсали навстречу вращению, ось y – по радиусу. Таким образом, $R = R_0 + y$, $R_0 = -x$. Невозмущенная линейная скорость вращения также выражается через декартову координату: $v_\theta = \phi(y)$. В этом локальном приближении система (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}i(\omega - k\phi(y))v_x - \phi'(y)v_y &= -\frac{ik}{\rho}p' + ik\Phi' + 2\Omega_0 v_y, \\ i(\omega - k\phi(y))v_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dy} + \frac{d\Phi'}{dy} - 2\Omega_0 v_x, \\ i(\omega - k\phi(y))\rho' &= -\rho \left(ikv_x + \frac{dv_y}{dy} \right), \\ -k^2\Phi' + \frac{d^2\Phi'}{dy^2} &= -4\pi G \rho'.\end{aligned}\tag{2}$$

В (2) мы сразу отделили переменные t и x , заменив дифференцирование по ним умножением на ik и $i\omega$.

Конкретные примеры функциональной зависимости $\phi(y)$ будут рассмотрены ниже.

В общем виде исследование системы (2) представляет значительные трудности. В данной статье мы ограничиваемся возмущениями со слабой спиральностью, то есть считаем параметр k малым.

3. Неустойчивость Джинса

Начинаем, однако, со случая точной ротационной симметрии, то есть полагаем $k = 0$. Легко видеть, что при этом сохраняется полная масса, то есть $\int \rho' dy$. Тогда третье уравнение (2) после

интегрирования по y превращается в соотношение для возмущения напряженности поля

$$F = -4\pi G \int_{-\infty}^y \rho' dy, \quad (3)$$

а именно: $i\omega F = 4\pi G \rho v_y$. Подстановка сюда выражения v_y , полученного из двух первых уравнений системы (2), дает

$$c^2 \frac{d^2 F}{dy^2} + [4\pi G \rho + \omega^2 - 4\Omega_0^2 - 2\Omega_0 \phi'(y)] F = 0. \quad (4)$$

Возмущение давления мы принимаем по закону идеального газа $p' = c^2 \rho'$, где c – скорость звука.

В принципе мы пока имеем дело с достаточно хорошо изученной неустойчивостью Джинса в неоднородной среде. В простейшем случае линейного хода функции $\phi(y)$ система неустойчива по Джинсу, если уравнение (4) допускает периодические решения при некотором отрицательном ω^2 , то есть при выполнении неравенства

$$4(\pi G \rho - \Omega_0^2) - 2\Omega_0 \phi'(y) > 0. \quad (5)$$

В более общем случае, когда перегиб угловой скорости охватывает только узкую зону, для определения собственных значений ω^2 можно пользоваться вариационным принципом. В частности, наименьшее значение ω^2 определяется как минимум функционала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[c^2 \left(\frac{dF}{dy} \right)^2 - [4(\pi G \rho - \Omega_0^2) + 2\Omega_0 \phi'(y)] F^2 \right] dy \quad (6)$$

при нормировке

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2 dy = 1. \quad (7)$$

4. Спиралевидные возмущения

При малых k мы имеем дело со слегка косыми возмущениями, образующими картину типа туго закрученной спирали. Могло бы показаться, что для таких возмущений критерий Джинса действует с малой поправкой, пропорциональной k . Однако это оказывается совсем не так. Причина заключается в несохранении полной массы на каждом радиусе, когда возмущения перестают быть симметричными. Действительно, рассмотрим несколько подробнее поведение гравитационного поля при малых k . Последнее уравнение системы (2) еще не определяет однозначно величину Φ' , и необходимо более подробное рассмотрение гравитационного поля при малых k . Согласно известному интегральному соотношению для двумерных потенциалов [15]

$$\Phi'(y) e^{ikx} = -G \iint e^{ikx_1} \rho'(y_1) \ln [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] dx_1 dy_1 \quad (8)$$

с интегрированием по достаточно широкому интервалу изменения x (порядка R_0).

Для предупреждения формально возникающих расходимостей мы сначала дифференцируем (8) по x и y , а затем уже устремляем пределы интегрирования по x к бесконечности. Получаем после дифференцирования по x и подстановки $x=0$:

$$ik\Phi'(y) = 2G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 e^{ikx_1}}{x_1^2 + (y-y_1)^2} \rho'(y_1) dx_1 dy_1. \quad (9)$$

При этом вспомогательный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ikx}}{x^2 + h^2} dx = \pi i e^{-kh}$$

и, следовательно,

$$k\Phi'(y) = 2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} \rho'(y_1) e^{-k|y-y_1|} dy_1. \quad (10)$$

Таким образом, величина $k\Phi'(y)$ в первом уравнении (2) на самом деле является величиной нулевого порядка малости по k . Имеем

$$\lim_{k \rightarrow 0} k\Phi'(y) = 2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} \rho' dy. \quad (11)$$

Аналогичное дифференцирование (8) по y дает

$$\frac{d\Phi'}{dy} = -2G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-y_1)e^{ikx_1}}{x_1^2 + (y-y_1)^2} \rho'(y) dx_1 dy_1 = -2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} \rho'(y_1) \text{sign}(y-y_1) e^{-k|y-y_1|} dy_1, \quad (12)$$

а после подстановки $k=0$ непосредственно получается

$$\frac{d\Phi'}{dy} = -2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} \rho'(y_1) \text{sign}(y-y_1) dy_1 \quad (13)$$

Легко проверить, что соотношение (10) и (12) согласуются, как между собой, так и с уравнением Пуассона в форме последнего уравнения (2). С остальными членами порядка k в системе (2) никакого парадокса не возникает, и при предельном переходе $k \rightarrow 0$ мы их вычеркиваем.

Для выявления асимптотического поведения основных переменных примем простейшее предположение, что, начиная с некоторого $|y| = A$, дифференциальность вращения исчезает, так что $\phi(y)$ выходит на линейный закон:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \mu y + \nu, & y &\geq A; \\ \phi(y) &= \mu_1 y + \nu_1, & y &\leq A \end{aligned} \quad (14)$$

Введем вспомогательную величину

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \rho' dy.$$

Тогда в силу формул (10) и (13) получаем предельное значение $k\Phi' = 4\pi GH$, $\frac{d\Phi'}{dy} = -2\pi GH \text{sign } y$, ($|y| \gg A$), в то время как плотность убывает при $k=0$ по экспоненте. Из первых двух уравнений (2) с $k=0$, следовательно, получается предельное значение возмущений скорости

$$v_x = -\frac{2\pi GH(\omega + 2\Omega_0 + \mu)}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \mu) - \omega^2}, \quad v_y = -\frac{2\pi GiH(\omega + 2\Omega_0)}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \mu) - \omega^2}, \quad \text{если } y = +\infty$$

и

$$v_x = -\frac{2\pi GH(\mu_1 - \omega + 2\Omega_0)}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \mu) - \omega^2}, \quad v_y = -\frac{2\pi GiH(2\Omega_0 - \omega)}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \mu) - \omega^2}, \quad \text{если } y = -\infty.$$

Интегрирование третьего уравнения (2) по всем значениям y с учетом только что найденных асимптотических значений v_y приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega = 2\pi G\rho \left[\frac{2\Omega_0 + \omega}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \mu) - \omega^2} - \frac{2\Omega_0 - \omega}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \mu_1) - \omega^2} \right]. \quad (15)$$

Уравнение (15) после освобождения от знаменателей имеет пятую степень:

$$\omega^5 - 4\pi G\rho\omega^3 - 2(\varepsilon + \varepsilon_1)\omega^3 + 4[\pi G\rho(\varepsilon + \varepsilon_1) + \varepsilon\varepsilon_1]\omega + 8(\varepsilon - \varepsilon_1)\Omega_0\pi G\rho = 0, \quad (16)$$

где $\varepsilon = \Omega_0(2\Omega_0 + \mu) - 2\pi G\rho$, $\varepsilon_1 = \Omega_0(2\Omega_0 + \mu_1) - 2\pi G\rho$. При исследовании уравнения (16) мы ограничимся областью $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, поскольку в противном случае работает обычная неустойчивость Джинса. Также и в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon > 0$ имеются только вещественные корни, притом различные.

Исследуем еще частный случай $\varepsilon_1 = 0$. Уравнение (16) тогда приводится к виду

$$L_1(\omega) = -8\pi G\rho\Omega_0\varepsilon, \quad (17)$$

где $L_1(\omega) = \omega [\omega^4 - (2\varepsilon + 4\pi G\rho)\omega^2 + 4\pi G\rho\varepsilon]$. График функции $L_1(\omega)$ представлен на рис.1. Важно отметить наличие пяти точек пересечения с осью абсцисс. Из двух пар экстремумов большую высоту имеют более удаленные от начала координат: это легко проверяется на частных примерах и переносится на общий случай по непрерывности, поскольку иначе отношение $\frac{L_1(\omega) - l}{\omega - \gamma}$ при каких-то значениях параметров l, γ, ε представляло бы полный квадрат, чего на самом деле нет. Комплексные корни ω проявляются, когда правая часть (17) превышает, следовательно, высоту внутреннего экстремума. Наличие или отсутствие комплексных корней зависит от величины ε . Представив себе остальные параметры ρ и Ω_0 фиксированными, докажем, что смена устойчивости неустойчивостью или наоборот на оси ε может встретиться только раз. Действительно, отметим значение ω , дающее двойной корень (17). Для него

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(L_1 + 8\pi G\rho\Omega_0\varepsilon) = -2\omega^3 + 4\pi G\rho\omega + 8\pi G\rho\Omega_0 = -\omega^3(\omega^2 - 4\pi G\rho)/\varepsilon \quad (18)$$

Но легко проверяется, что значение $\omega = \pm\sqrt{4\pi G\rho}$ попадают на более отдаленные от начала координат волны на рис.1. Двойной же корень (17), как сидящей на вершине ближней волны, должен удовлетворять неравенству $-\sqrt{4\pi G\rho} < \omega < 0$ и, значит, величина (18) здесь отрицательна. Это показывает, что при бесконечно малом увеличении ε график $L_1(\omega)$ уже начнет пересекать уровень, указанный в правой части (17), и совпадающие корни превратятся в вещественные различные. Итак, с увеличением ε неустойчивость сменяется устойчивостью, но не наоборот. В предельном случае большого ε , если отбросить два корня, имеющие пределами $\pm\sqrt{4\pi G\rho}$, уравнение (17) сводится к кубическому $\omega^3 - 2\pi G\rho\omega - 4\pi G\rho\Omega_0 = 0$, и условием вещественности корней, по обычному правилу, является

$$|\Omega_0| \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi G\rho}{3}} \quad (19)$$

Другой важный случай – одновременная малость ε и ε_1 . Тогда уравнение (16) имеет, в частности, корни $\omega \approx |2(\varepsilon - \varepsilon_1)\Omega_0|^{1/3}$, причем два из значений кубического корня всегда комплексны.

Итак, если ε и ε_1 уменьшаются пропорционально друг другу, не совпадая, наступает неустойчивость (при этом допускаются крайние случаи $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon_1 = 0$).

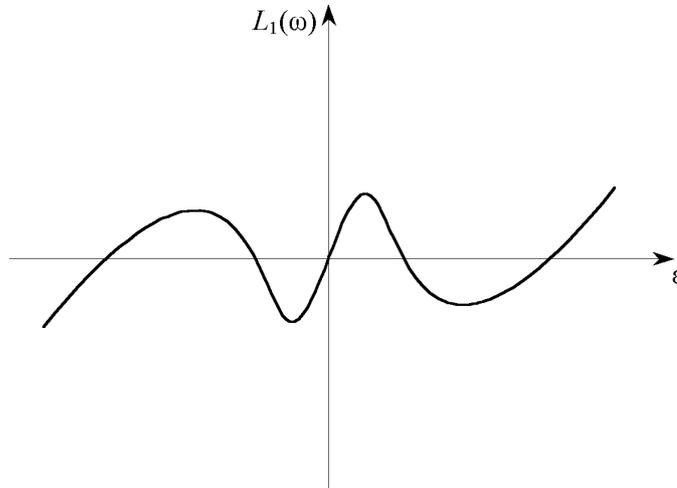


Рис. 1. График изменения функции $L_1(\omega)$. Он симметричен относительно начала координат

Собрав установленные сведения, можно уже наметить разграничение областей устойчивости и неустойчивости на диаграмме $\varepsilon - \varepsilon_1$ (рис.2). Как ясно из предыдущего, рис.2а отвечает выполнению неравенства (19), а рис.2б – его невыполнению. Из (16) очевидно, что величины ε и ε_1 играют совершенно равноправную роль. На рис.2б правая кривая выходит на асимптоту $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}$, где величина $\bar{\varepsilon}$ определяется тем же приемом предельного перехода к кубическому уравнению $\bar{\varepsilon} = (3/2)(2\pi G\rho\Omega_0)^{3/2} - \pi G\rho$.

На рис.2 местоположение точки M и симметричной ей точки M_1 , где касательная к линии раздела соответственно горизонтальна или вертикальна, определяется из следующих простых соображений. Фиксируем положение двойного корня ω для точки M . При бесконечно малом изменении ε двойственность корня должна сохраняться в первом приближении, то есть справедливость (15) останется после дифференцирования по ε или μ . В результате местоположением корня должно быть $\omega = -2\Omega_0$. Остается при указанном ω приравнять нулю левую часть (16) вместе с ее производной, и мы получаем координаты точки M : $\varepsilon = 2\Omega_0^2 \frac{4\Omega_0^2 - 5\pi G\rho}{4\Omega_0^2 - \pi G\rho}$. Правда, точка M может и не существовать.

Точнее, вершина M остается в интересующей нас области $\varepsilon > 0$ при $\Omega_0^2 < \pi G\rho/4$. При всех больших $|\Omega_0|$ кривая раздела на рис.2б загибается кверху, что подтверждается и непосредственной проверкой асимптотики корней при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Правда, значение ε формально снова становится положительным при $\Omega_0^2 > \frac{5}{4}\pi G\rho$. Но тогда соответствующая вершина, во-первых, лежит выше биссектрисы координатного угла, во-вторых, связана с разделом области существования одной и двух пар комплексных корней, не имея, таким образом, отношения к границе устойчивость–неустойчивость. Других кривых раздела, кроме изображенных на рис.2, быть не может. Действительно, вершины с теми же свойствами, что у M и M_1 , отсутствуют, а при монотонном ходе снизу вверх или наоборот соответствующая дополнительная ветвь уперлась бы в координатную ось или биссектрису, где для лишних переходов от устойчивости к неустойчивости вышеприведенные рассуждения не оставляют места.

5. Медленная неустойчивость

Обратимся теперь к возмущениям, частота или инкремент которых пропорциональны малому k . При этом $H = 0$. Ясно, что v_y/v_x должно быть порядка k , иначе радиальные движения вообще выпадают из системы (2) и число уравнений не соответствует числу неизвестных. Положим $v_y = ikw_y$, $\omega = k\nu$. После отбрасывания членов высшего порядка малости система (2) приводится к

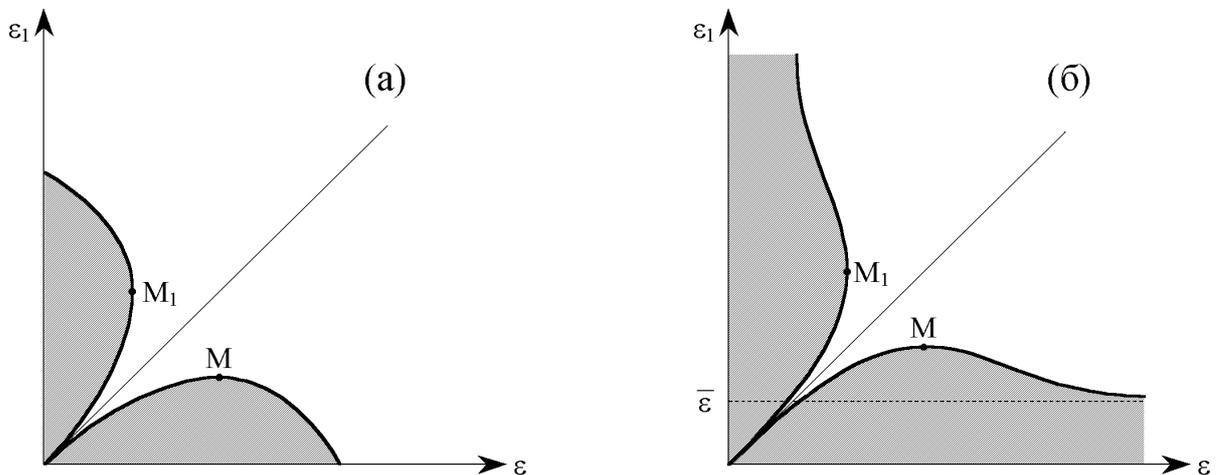


Рис. 2. Расположение областей устойчивости и неустойчивости (заштриховано) на диаграмме $\varepsilon - \varepsilon_1$

виду

$$\begin{aligned}
(\nu - \phi(y))v_x - \phi'(y)w_y &= -\frac{c^2}{\rho}\rho' + \Phi' + 2\Omega_0 w_y + h, \\
0 &= -\frac{c^2}{\rho}\frac{d\rho'}{dy} + \frac{d\Phi'}{dy} - 2\Omega_0 v_x, \\
(\nu - \phi(y))\rho' &= -\rho\left(v_x + \frac{dw_y}{dy}\right), \\
\frac{d^2\Phi'}{dy^2} &= -4\pi G\rho',
\end{aligned} \tag{20}$$

где h – постоянный вклад в потенциал, проистекающий от членов более высокого порядка малости, чем учитываемое ρ' . В настоящей статье ограничиваемся пылевой средой ($c = 0$). Приведем систему (20) к более симметричному виду. Обозначим для сокращения $\phi(y) - \nu$ через $\phi_1(y)$. Из второго уравнения (20) следует: $v_x = \frac{1}{2\Omega_0}\frac{d\Phi'}{dy}$. Первое уравнение (20) позволяет выразить w_y через остальные неизвестные, и подстановка в третье уравнение дает

$$-\frac{\phi_1(y)\rho'}{\rho} - \frac{\phi_1(y)}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \phi_1(y))}\frac{d^2\Phi'}{dy^2} + \frac{\phi''(y)}{(2\Omega_0 + \phi'(y))^2}\left[\Phi' + h + \frac{\phi'(y)}{2\Omega_0}\frac{d\Phi'}{dy}\right] = 0. \tag{21}$$

При полной твердотельности вращения ($\phi_1(y) \equiv 0$) процессы становятся чисто локальными: взаимодействие между слоями исчезает. Этот случай достаточно хорошо известен [16]. Мы интересуемся системами со сравнительно слабой дифференциальностью. Тогда в (21) можно оставить только члены, линейные по отношению к функции $\phi_1(y)$ и ее производной. С учетом последнего уравнения (20) находим

$$\frac{\phi_1(y)}{\pi G\rho}\frac{d^2\Phi'}{dy^2} - \frac{\phi_1(y)}{\Omega_0^2}\frac{d^2\Phi'}{dy^2} + \frac{\phi''(y)(\Phi' + h)}{\Omega_0^2} = 0$$

или, если ввести параметр $q = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \pi G\rho}$, то получается

$$\frac{\phi_1(y)}{q-1}\frac{d^2\Phi'}{dy^2} + \phi''(y)(\Phi' + h) = 0.$$

Обозначим величину $\Phi' + h$ через η . Для нее получается дифференциальное уравнение

$$\eta'' + (q-1)\frac{\phi''(y)}{\phi_1(y)}\eta = 0. \tag{22}$$

Имеет смысл рассматривать только достаточно большие угловые скорости ($\Omega_0 > \sqrt{\pi G\rho}$), так как в противном случае действует более быстрая неустойчивость, приводящая к расслоению среды на отдельные кольца ([5], см. также формулу (5) настоящей статьи). Таким образом, можно считать $q > 1$.

Для правильного вывода условий на бесконечности вернемся к точному, без линеаризации, уравнению (21), но подставим асимптотическое выражение $\phi(y) = \mu y$. Тогда

$$(\mu y - \nu)\left[\frac{1}{4\pi G\rho} - \frac{1}{2\Omega_0(2\Omega_0 + \mu)}\right]\frac{d^2\Phi'}{dy^2} = 0, \quad \Phi' = \text{const} (= -h).$$

Итак, предельное условие на бесконечности состоит в выходе η на постоянный уровень. Для анализа перехода от устойчивости к неустойчивости следует еще обратить внимание на поведение $\eta(y)$ вблизи точки с $\phi_1(y) = 0$. Они вещественны, поскольку в данном переходном случае вещественен параметр ν . Мы рассматриваем только модели с монотонной функцией $\phi(y)$ и, следовательно, единственной критической точкой. Достаточно считать, что эта точка $y = 0$. Согласно общей теории дифференциальных уравнений [17], одно из частных решений регулярно в особой точке, разложение по другой, вообще говоря, начинается с члена $y(\ln y + C)$, $C = \text{const}$. При переходе к неустойчивости, то есть при подстановке $\nu = i\epsilon$, ϵ – малые вещественные числа, этот первый член заменяется

на $(y - ia\epsilon) [\ln(y - ia\epsilon) + C]$, где, вообще говоря, $a \neq 0$. За счет обхода y вокруг особой точки между решениями в области $y < 0$ и $y > 0$ появляется разница $\sim \pi iy/2$, нарушающая непрерывность перехода от чисто вещественного случая $\epsilon = 0$ к случаю неустойчивости $\epsilon \neq 0$. Итак, для нахождения критического случая начала неустойчивости надо выделять решения $\eta(y)$, регулярные в особой точке. Таким образом, решение уравнения (22) должно подчиняться трем условиям: требованиям постоянства на обоих концах (вообще же наудачу выбранное решение растет, как y) и регулярности при $y = 0$. Трех условий слишком мало для фиксации собственного значения q и поэтому надо варьировать, вообще говоря, само начало отсчета y . Однако, если функция $\phi(y)$ – нечетная, причем $\phi(y) \neq 0$ при $y \neq 0$, то регулярность обоих решений для $\eta(y)$ автоматически обеспечивается сокращением $\frac{\phi''}{\phi}$ и при задании определенной четности $\eta(y)$ достаточно одного условия на бесконечности.

Тогда получается обычная постановка задачи о собственном значении.

Примеры нечетных $\phi(y)$ интересны для нас в первую очередь и потому, что на бесконечности получается одно и то же значение $\mu = \frac{d\phi}{dy}$, иначе говоря, кривая вращения не изламывается, а только как бы перегибается. Такие перегибы, как показано в предыдущем пункте, не приводят к «быстрой» неустойчивости и, значит, с ними более отчетливо должна проявляться «медленная».

Основной конкретный пример мы получаем следующим образом. Как бы обратив задачу, зададимся сначала решением

$$\eta(y) = \frac{y}{\sqrt{h^2 + y^2}}, \quad (23)$$

которое, очевидно, удовлетворяет нужному условию при $y \rightarrow \infty$. Затем уже подбираем саму функцию $\phi(y)$ как удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \frac{3h^2 \phi}{(q-1)(h^2 + y^2)^2} = 0, \quad (24)$$

которое формально является просто другой записью (22). Как объяснено выше, нас интересуют нечетные функции $\phi(y)$. Легко проверяется, что решением (24) требуемого вида является,

с точностью до постоянного коэффициента $\phi = \sqrt{h^2 + y^2} \sin(s \operatorname{arctg}(y/h))$ при $q > 4$ ($s = \sqrt{\frac{q-4}{q-1}}$),

$\phi = \sqrt{h^2 + y^2} \operatorname{arctg}(y/h)$ при $q = 4$, $\phi = \sqrt{h^2 + y^2} \operatorname{sh}(\sigma \operatorname{arctg}(y/h))$ при $1 < q < 4$ ($\sigma = \sqrt{\frac{q-4}{q-1}}$). Нетрудно убедиться, что каждая такая функция меняет знак только раз, при $y = 0$, а на бесконечности асимптотически ведет себя как линейная.

Следует, однако, решать задачу на собственные значения с данными конкретными $\phi(y)$ и в обычном прямом смысле, так как, помимо исходного q , которое далее будем обозначать через q_0 , уравнение (22) имеет и другие собственные значения. С вышеуказанным изменением обозначений уравнение (22) переписывается в виде

$$\frac{d^2 \eta}{dy^2} + \frac{3(q-1)h^2}{q_0-1} \frac{\eta}{(h^2 + y^2)^2} = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) сводится к известному уравнению Лежандра. Сначала делаем подстановку

$$\eta = \sqrt{h^2 + y^2} S(y) \quad (26)$$

Тогда

$$\frac{d}{dy} \left[(h^2 + y^2) \frac{dS}{dy} \right] + h^2 \left[\frac{3(q-1)}{q_0-1} + 1 \right] \frac{S}{h^2 + y^2} = 0$$

и для преобразования к стандартной форме надлежит еще заменить аргумент $y = ih\tau$, после чего имеем

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 - \tau^2) \frac{dS}{d\tau} \right] - \frac{\bar{m}^2 S}{1 - \tau^2} = 0, \quad (27)$$

где $\bar{m}^2 = \frac{3(q-1)}{q_0-1} + 1$. Ввиду (26), нам нужны решения (27), стремящиеся к нулю на бесконечно-

сти как $\frac{1}{\tau}$. Их выделение осуществляем, опираясь на свойства функций Лежандра [18, 19]. Такое решение может быть только либо четным, либо нечетным. Соответственно, значение $S(\tau)$ как комплексной величины в противоположных точках мнимой оси отличаются множителем ± 1 . При обходе же по правой полуокружности большего радиуса с центром в начале координат $S(\tau)$ приобретает множитель -1 . Итак, при обходе вокруг особой точки $\tau = 1$ функция $S(\tau)$ получает множитель ∓ 1 , что возможно только при целочисленном \bar{m} . Из-за условий $q > 0$, $q_0 > 1$ наименьшим подходящим значением является $\bar{m} = 2$. Ему соответствует как раз $q = q_0$. Общей же формулой является

$$q = 1 + \frac{(q_0 - 1)(\bar{m}^2 - 1)}{3}, \quad \bar{m} = 2, 3, 4, \dots \quad (28)$$

Собственные функции $S(\tau)$ при этом получаются в элементарном виде. Основная функция соответствует, очевидно, (23) и дается формулой $S(y) = \frac{y}{h^2 + y^2}$, при $\bar{m} > 2$ имеем, как легко проверить,

$$S(y) = \begin{cases} \operatorname{Im} \left(\frac{h + iy}{h - iy} \right)^{\bar{m}/2} = \sin(\bar{m} \operatorname{arctg}(y/h)), & \text{если } \bar{m} \text{ четное,} \\ \operatorname{Re} \left(\frac{h + iy}{h - iy} \right)^{\bar{m}/2} = \cos(\bar{m} \operatorname{arctg}(y/h)), & \text{если } \bar{m} \text{ нечетное} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь сам переход от устойчивости к неустойчивости. При наличии малого инкремента и близости параметра q к критическому q_0 уравнение (22) принимает вид

$$\eta'' + \frac{(q_0 + \gamma\epsilon^2 - 1)\phi''}{\phi - i\epsilon} \eta = 0 \quad (\gamma = \text{const}) \quad (29)$$

($-k\epsilon$ имеет смысл инкремента).

Заметим, что поправка к q нами взята в виде члена второй степени, поскольку она обязана быть вещественной. Разложение же самой функции η включает в себя как вещественные, так и мнимые члены:

$$\eta = \eta_0 + i\epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + \dots \quad (30)$$

Подставляем (30) в (29) и выделяем члены разных порядков по ϵ . Функция $\eta_0(y)$, очевидно, совпадает с уже известной (23), и далее

$$\eta_1'' + \frac{(q_0 - 1)\phi''}{\phi} \eta_1 + \frac{(q_0 - 1)\phi''}{\phi^2} \eta_0 = 0, \quad (31)$$

$$\eta_2'' + \frac{(q_0 - 1)\phi''}{\phi} \eta_2 + \frac{\eta_1''}{\phi} + \frac{\gamma\phi''}{\phi} \eta_0 = 0 \dots \quad (32)$$

Структура уравнения (31) показывает, что функция $\eta_1(y)$ четная. Точнее, у данного неоднородного уравнения из-за нечетности ϕ и η_0 должно быть хотя бы одно четное решение, а выполнения граничного условия $\eta_1(\infty) = 0$ всегда можно добиться добавлением с подходящим коэффициентом четного решения соответствующего однородного уравнения, в данном случае $\frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2}$. Иначе обстоит дело с уравнением (32). Функция η_2 опять должна быть нечетной. Добавление нечетного решения однородного уравнения $\frac{y}{h^2 + y^2}$ ничего не меняет в смысле выполнения граничного условия, и соблюдения последнего можно добиться только подбором параметра γ . Для облегчения такого подбора умножаем (32) на η_0 , а (22) с $\eta = \eta_0$ и $q = q_0$ на η_2 , результаты вычитаем друг из друга и интегрируем по y от $-\infty$ до ∞ . После несложного интегрирования по частям получаем требуемое значение параметра:

$$\gamma = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1'' \eta_0}{\phi} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'' \eta_0^2}{\phi} dy}. \quad (33)$$

Для нахождения γ требуется знать решение неоднородного уравнения (31) при конкретной функции $\phi(y)$, то есть решаем

$$\eta_1'' + \frac{3h^2}{(h^2 + y^2)^2} \eta_1 = H(y) \quad (34)$$

с

$$H(y) = -\frac{(q_0 - 1)\phi''}{\phi^2} \eta_0. \quad (35)$$

Ответ, как известно, можно выразить через функцию Грина [20]. В данном случае получается

$$\begin{aligned} \eta_1(y) = & -\frac{y}{2\sqrt{h^2 + y^2}} \left[\int_y^\infty \frac{h^2 - z^2}{\sqrt{h^2 + z^2}} H(z) dz - \int_{-\infty}^y \frac{h^2 - z^2}{\sqrt{h^2 + z^2}} H(z) dz \right] + \\ & + \frac{h^2 - y^2}{2\sqrt{h^2 + y^2}} \left[\int_y^\infty \frac{zH(z)}{\sqrt{h^2 + z^2}} dz - \int_{-\infty}^y \frac{zH(z)}{\sqrt{h^2 + z^2}} dz \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Легко проверяется, что выражение (36) удовлетворяет уравнению (34) и что в связи с четностью $H(y)$ на бесконечности $\eta_1(y)$ стремится к нулю. Числитель (33) после подстановки $y = h \operatorname{tg} \theta$ преобразуется к виду

$$-3h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (K(\theta))^2 d\theta + \frac{9h}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\psi - \theta) |\sin(\psi - \theta)| K(\theta) K(\psi) d\theta d\psi, \quad (37)$$

$$\text{где } K(\theta) = -\frac{hH \operatorname{tg} \theta}{3 \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{h^2 \sin s\theta}.$$

Вычисление по формуле (37) все-таки несколько громоздко, но мы ограничиваемся определением знака этого выражения, что позволит уже сделать качественный вывод о порядке смены устойчивости неустойчивостью. Исходим из известного тождества

$$\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \theta = \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

Умножим его на $\frac{2}{\pi} \sin 2\theta$ и перегруппировав члены ряда, получаем:

$$\cos \theta |\sin \theta| = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\theta}{(2m-3)(2m+1)}, \quad (-\pi < \theta < \pi). \quad (38)$$

С другой стороны, функция $K(\theta) \sec \theta$ четна и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому разлагается в ряд по косинусам:

$$K(\theta) \sec \theta = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos 2m\theta.$$

А если умножить это равенство на $\cos \theta$, то получается после такой же перегруппировки членов

$$K(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos(2m-1)\theta, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \quad (39)$$

(точные значения коэффициентов b_m для нашей задачи определения знака γ не потребуются).

Заменив в (38) аргумент θ на $\psi - \theta$ и вместе с (39) подставим в (37). После естественных сокращений выражение (37) приводится к виду

$$-6\pi h \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m+1)} b_m^2 < 0.$$

Итак, в (33) имеем две точки $\gamma > 0$ (поскольку $\frac{\phi''}{\phi} > 0$). Это означает, что слабая неустойчивость появляется при малом положительном приращении q или, что то же самое, при увеличении ρ с

сохранением остальных параметров системы.

Рассмотрим еще другой пример, в некотором отношении более простой. Именно, возьмем

$$\phi(y) = \begin{cases} y(h^2 + y^2), & \text{если } |y| < c, \\ c(c^2 + h^2) + (3c^2 + h^2)(y - c), & \text{если } y > c, \\ -c(c^2 + h^2) + (3c^2 + h^2)(y + c), & \text{если } y < -c \end{cases} \quad (40)$$

Таким образом, мы берем кривую третьей степени для $\phi(y)$, но при $y = \pm c$ обрезаем ее и заменяем далее на соответствующие касательные для большей естественности поведения при больших y . В этом случае уравнение (22) при $|y| > c$ сводится к $\eta'' = 0$ и, следовательно, для обеспечения асимптотического постоянства $\eta(y)$ надо, чтобы было точное равенство

$$\eta'(c) = 0 \quad (41)$$

Во внутренней области $|y| \leq c$ уравнение (22) принимает вид: $\eta'' + \frac{6(q-1)}{h^2 + y^2} \eta = 0$. Удобнее написать уравнение для производной:

$$\eta' = u, \quad \frac{d}{dy} \left[(h^2 + y^2) \frac{du}{dy} \right] + 6(q-1)u = 0. \quad (42)$$

Той же подстановкой $y = ih\tau$, как и раньше, уравнение (42) сводится к уравнению Лежандра:

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 - \tau^2) \frac{du}{d\tau} \right] + n(n+1)u = 0, \quad (43)$$

где n определяется из условия

$$n(n+1) + 6(q-1) = 0. \quad (44)$$

Условие (41) эквивалентно $u = 0$ при $y = c$. Если $1 < q < \frac{25}{24}$, то (44) дает вещественные значения n в интервале $(0, -\frac{1}{2})$. Легко устанавливается, что даже в крайнем случае $n = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{25}{24}$ функция u не обращается в ноль при конечных y ни для четного, ни для нечетного решения уравнения (42). Для проверки можно, например, воспользоваться представлением [19]

$$u(y) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\text{ch } t + iy}} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{\text{ch}^2 t + y^2} + \text{ch } t}}{2(\text{ch}^2 t + y^2)} dt - iy \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2(\text{ch}^2 t + y^2)(\sqrt{\text{ch}^2 t + y^2} + \text{ch } t)}}. \quad (45)$$

В правой части (45) вещественная и мнимая части интеграла как раз и представляют собой соответственно четное и нечетное решения (42) с $q = \frac{25}{24}$, а подынтегральные выражения тут и там положительные, из чего и следует вышеупомянутое необращение обоих решений в ноль (кроме, разумеется, точки $y = 0$ для нечетного решения). При $q < \frac{25}{24}$ тот же самый факт сразу следует из теоремы сравнения [21]. Остается возможность $q > \frac{25}{24}$, когда n имеет вид $n = -\frac{1}{2} + ip$ и получаются так называемые тороидальные функции Лежандра. Их асимптотика на бесконечности имеет вид $y^{-1/2} \cos(p \ln y + \phi_0)$, $\phi_0 = \text{const}$ и ясно, что обращение в ноль происходит бесконечное число раз.

В предельном случае, когда «обрезание» функции $\phi(y)$ отодвигается на бесконечность, одновременно отодвигаются и нули $u(y)$, так что при $c \rightarrow \infty$ мы приходим к равенству $q = \frac{25}{24}$ или

$$\Omega_0^2 = 25\pi G\rho \quad (46)$$

для критических значений равным образом при четных и нечетных $\eta(y)$. По-видимому, и в данном случае неустойчивость начинается при падении значения Ω_0 ниже предела, указанного в (46), хотя точный расчет нами пока не проведен из-за технических сложностей.

6. Обсуждение и выводы

В данной статье не дается анализ медленной неустойчивости при конечной скорости звука c . Качественные соображения показывают, что упругость газа должна действовать как стабилизирующий фактор: выигрыш гравитационной энергии при сжатии среды, происходящей в слое ограниченной толщины, отчасти компенсируется противоположным эффектом затраты энергии на сжатие

газа [22]. Следует отметить, что при большой величине c «медленная» неустойчивость вообще исчезает.

Показательно, что «медленная» неустойчивость существенно расширяет многообразие неустойчивых систем. В частности, критическое значение Ω_0 , согласно (46), хотя и относящееся к конкретной модели, оказывается в пять раз больше обычно принимаемого по Джинсу значения $\sqrt{\pi G \rho}$. Это создает дополнительные возможности для генерирования неустойчивостей и соответствующего структурообразования в дифференциально вращающихся галактиках [23]. Правда, следует еще раз указать, что оценка (46) получена без учета упругости среды и что с такой упругостью вышеупомянутое различие наверняка сгладится.

Напротив, для газопылевых дисков, вращение которых управляется гравитацией почти исключительно одного массивного центрального тела, как кольца больших планет или аккреционные диски, V-образные или S-образные изгибы кривой угловой скорости нехарактерны, поэтому, вообще говоря, нет и оснований существенно менять для них привычные критерии Джинса. Такие перегибы, однако, можно себе представить на каких-то ранних стадиях развития околопланетных дисков или протопланетной туманности [24]. Если, например, в некоторой кольцевой зоне присутствует одновременно много мелких спутников с заметным общим полем тяготения.

В используемом приближении «цилиндрической» геометрии обнаруживается резкое различие инкремента «быстрой» неустойчивости, связанной с V-образными изгибами кривой вращения, и «медленной» неустойчивости, которая, насколько нам известно из примеров, развивается за счет S-образных перегибов. Интересно было бы рассмотреть противоположный случай «плоской» геометрии, где, надо полагать, данное различие более или менее сглаживается.

1. Сыровой В.В., Чумак О.В. // Уч. зап. УрГУ. – 1970. – № 111., сер. астрономическая, вып.7. – С. 62.
2. Trulsen J. // Astrophys. and Space Sci. – 1971. – 12. – P. 329.
3. Trulsen J. // Astrophys. and Space Sci. – 1972. – 18. – P. 3.
4. Максумов М.Н. // Бюлл. Ин-та астрофизики АН Таджикской ССР. – 1974. – № 64. – С. 3.
5. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М.: Наука, 1976. – 447 с.
6. Морозов А.Г. // Астрон. ж. – 1979. – 56. – С. 498.
7. Goldreich P., Narayan R. // MN RAS, Short Communication. – 1985. – 213. – P. 7.
8. Tomley L., Cassen P., Steiman-Cameron T. // Astrophys. J. – 1991. – 382, Pt.1. – P. 530.
9. Dabille B., Knobloch E. // Astron. and Astrophys. – 1992. – 256. – P. 673.
10. Ляхович В.В., Фридман А.М., Хоружий О.В. // Неустойчивые процессы во Вселенной / Ред. Масевич А.Г. – М.: Космосинформ, 1994. – С. 191.
11. Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. – М.: Наука, 1994. – 349 с.
12. Toomre A. // Astrophys. J. – 1964. – 139. – P. 1217.
13. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. – М.: Наука, 1969. – 245 с.
14. Саслау У. Гравитационная физика звездных и галактических систем. – М.: Мир, 1989. – 542 с.
15. Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М.: Наука, 1988. – 269 с.
16. Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б., Сагдеев Р.З., Фридман А.М. // Журн. прикл. мех. и тех. физики. – 1969. – № 3 – С. 3.
17. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 351 с.
18. Гобсон Е.И. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952. – 452 с.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

20. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 299 с.
21. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 749 с.
22. Морозов А.Г. // Астрон. ж. – 1985. – **61**. – С. 209.
23. Засов А.В., Морозов А.Г. // Астрон.циркуляр. – 1985. – № 1356. – С. 1.
24. Borderies N., Goldreich P., Tremaine S. // Icarus. – 1985. – **63**. – P. 40.

Комментарий. Рассмотренная здесь неустойчивость достаточно холодной среды в зонах тех или иных аномалий кривой вращения галактики играет несколько особую роль из-за своей «перманентности». Действительно, поведение кривой вращения в основном определяется наиболее массивными составляющими всей системы, а перераспределение газопылевого вещества менее существенно. Поэтому вновь попадающие в соответствующую зону порции вещества должны раз за разом испытывать все те же виды неустойчивости. Поэтому с сингулярностями кривых вращения должны быть связаны кольцевые зоны со специфическими морфологическими и физическими свойствами межзвездной среды, что, по-видимому, подтверждается наблюдениями.

Поступила в редакцию 16.12.2002