



УДК 524.7

Нелинейные волны в гравитирующем газе*

В.А. Антонов¹, А.Д. Чернин²¹ Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково² Государственный астрономический институт им. Штернберга, Москва

Самогравитация газа делает возможным распространение в нем нелинейных адиабатических волн. Уравнения гидродинамики вместе с уравнением Пуассона допускают соответствующие стационарные решения для существенно неоднородной задачи.

НЕЛІНІЙНІ ХВИЛІ В ГРАВІТУЮЧОМУ ГАЗІ, Антонов В.А., Чернин А.Д. — Самогравітація газу робить можливим поширення у ньому нелінійних адиабатических хвиль. Рівняння гідродинаміки разом з рівнянням Пуассона мають відповідні стаціонарні розв'язки для суттєво неоднорідної задачі.

NON-LINEAR WAVES IN A GRAVITATING GAS, by Antonov V.A., Chernin A.D. — Propagation of non-linear adiabatic waves in a gas is shown to be possible due to self-gravitating of the gas. Hydrodynamic equations together with the Poisson' equation lead to stationary solutions if the problem considered is not one-dimensional.

1. Введение

При адиабатических колебаниях газа плоские звуковые стационарные волны конечной амплитуды невозможны. Это утверждение, называемое парадоксом Эрншоу, относится к газу, собственная гравитация которого не принимается во внимание. Ниже мы покажем, что нелинейные волны могут при определенных условиях распространяться в самогравитирующем невязком газе без искажения и затухания. Найденное нами стационарное решение уравнений газовой динамики описывает адиабатические волны конечной амплитуды в бесконечном по образующей цилиндре и в диске бесконечного радиуса.

2. Усредненное описание цилиндра и диска

В цилиндре, бесконечном по образующей, но конечном по радиусу, интеграл, выражающий силу притяжения, действующую на любую частицу, не расходится. Конечность радиальной составляющей силы очевидна, а составляющая вдоль оси цилиндра, которая далее будет осью z цилиндрической системы координат, есть

$$F_z = G \int \rho(\mathbf{r}') \frac{z' - z}{(r' - \mathbf{r})^3} d^3 \mathbf{r}' = G \iiint \rho(\mathbf{r}') \frac{(z' - z)r' dr' dz' d\vartheta'}{[(z' - z)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\vartheta - \vartheta')]^{3/2}}. \quad (1)$$

Если плотность ограничена, $\rho < \rho_1$, то интеграл (1) конечен, а при плотности, зависящей только от r , он обращается в нуль. Действительно, интеграл (1), взятый по области $z' > z$, мажорируется интегралом

$$F_1 = 2\pi G \rho_1 \int_0^{2a} \int_0^\infty \frac{zr dr dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 4\pi G \rho_1 a, \quad (2)$$

* Впервые опубликована в Астрон. ж. – 1977. – 54, № 2. – С. 315–322.

выражающим силу, действующую на частицу с координатами $r = 0, z = 0$ со стороны полуцилиндра ($z' > 0$) удвоенного радиуса $2a$. По симметрии ограничен и интеграл по другому полуцилиндру ($z' < 0$). При $\rho = \rho(r)$ оба интеграла равны по модулю и противоположны по знаку. Это означает, в частности, что однородный по z цилиндр может быть стационарным, если градиент давления или (и) вращение вокруг оси компенсируют радиальную составляющую гравитационной силы.

Зависимость плотности и силы от радиуса в стационарном состоянии определяется (в отсутствие вращения) балансом давления и гравитации:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (3)$$

Если цилиндр испытывает деформацию, причем достаточно медленную, т.е. такую, что в каждый момент времени соотношение (3) можно считать выполненным, то легко найти связь между изменениями радиуса цилиндра R и его линейной плотности σ . Умножим левую и правую части (3) на r^2 и проинтегрируем по поперечнику цилиндра

$$2\pi \int_0^R \frac{\partial p}{\partial r} r^2 dr = -2\pi \int_0^R \rho \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 dr. \quad (4)$$

Как известно, при цилиндрической симметрии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 2G \frac{\sigma(r)}{r}, \quad (5)$$

где $\sigma(r)$ – линейная плотность внутри радиуса r , связанная с плотностью ρ соотношением:

$$\sigma(r) = 2\pi \int_0^r \rho r' dr', \quad (6)$$

причем $\sigma(R) = \sigma$. Тогда интеграл в правой части (4) можно преобразовать следующим образом:

$$-2\pi \int_0^R \rho \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 dr = -2G \int_0^R \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr = -G\sigma^2. \quad (7)$$

В левой части (4), интегрируя по частям, находим

$$2\pi \int_0^R \frac{\partial p}{\partial r} r^2 dr = 2\pi \left[pr^2 \Big|_0^R - 2 \int_0^R pr dr \right] = -4\pi \int_0^R pr dr = -\frac{4}{3} E_T, \quad (8)$$

где мы воспользовались тем, что в идеальном газе с показателем адиабаты $\gamma = \frac{5}{3}$ давление p составляет $\frac{2}{3}$ от плотности тепловой энергии; E_T – тепловая энергия на единицу длины цилиндра. Пренебрегая численными коэффициентами, зависящими от конкретного закона плотности, напишем без ограничения на γ :

$$E_T \sim \bar{p} R^2 \sim \bar{\rho}^\gamma R^2 \sim \left(\frac{\sigma}{R^2} \right)^\gamma R^2 = \sigma^\gamma R^{2(1-\gamma)}. \quad (9)$$

Здесь \bar{p} и $\bar{\rho}$ – некоторые средние значения давления и плотности. С учетом соотношения (7) теперь находим

$$R \sim \sigma^n, \quad n = \frac{2-\gamma}{2(1-\gamma)}. \quad (10)$$

При $\gamma = \frac{5}{3}$

$$R \sim \sigma^{-1/4}. \quad (11)$$

Если участок цилиндра, имеющий длину l , характеризуется массой M , то $\sigma \sim M/l$ и при изменении длины l радиальный размер R изменяется по закону

$$R \sim l^{1/4}, \quad \gamma = \frac{5}{3} \quad (12)$$

Это означает, что продольные сжатия и растяжения цилиндра, при которых успевает устанавлива-

ться равновесие по поперечнику, сопровождаются сравнительно слабым изменением радиуса данного участка цилиндра. Если, скажем, l изменяется на порядок, то R изменяется менее, чем в два раза. Если деформация происходит быстро и равновесие по поперечнику не успевает устанавливаться, то изменение радиуса еще слабее.

Имея это в виду, в дальнейшем при рассмотрении различных деформаций цилиндра будем пренебрегать в первом приближении изменением его поперечных размеров и радиальной компонентой скорости. В таком приближении разумно ограничиться средними по поперечнику значениями плотности и давления (как и в соотношении (9)), не интересуясь точными зависимостями этих величин от радиуса.

Усреднение такого рода* должно относиться также и к потенциалу φ . В уравнении Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 4\pi G \bar{\rho} \quad (13)$$

остаётся после усреднения лишь зависимость от продольной координаты z .

Второй член слева можно приближенно представить в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \approx \frac{\varphi(b, z) - \bar{\varphi}(z)}{b^2},$$

где b – величина, сравнимая с радиусом цилиндра или бóльшая его (для простоты считаем ее постоянной), $\bar{\varphi}$ – значение потенциала в некоторой промежуточной точке внутри цилиндра. На расстоянии $r = b$ от оси воздействие неоднородностей по z сглаживается и потому можно считать, что $\varphi(b, z)$ есть лишь слабая функция z (и t) и в дальнейшем будем пренебрегать ее изменением. Перенормируем теперь потенциал, приняв $\bar{\varphi}(z) - \varphi(b, z) \rightarrow \bar{\varphi}(z)$. Тогда для $\bar{\varphi}(z)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} - \varepsilon \bar{\varphi} = 4\pi G \rho, \quad \varepsilon \approx b^{-2}. \quad (14)$$

Здесь и далее знак усреднения по поперечнику цилиндра опускается. Ограниченное решение этого уравнения при $\varepsilon > 0$ единственно и имеет вид

$$\bar{\varphi}(z) = - \frac{2\pi G}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z') e^{-\sqrt{\varepsilon}|z-z'|} dz'. \quad (15)$$

Отсюда ясно, что при нашей нормировке $\bar{\varphi} < 0$.

Из (15) следует также, что для всякого ограниченного распределения $\rho(z)$ потенциал и его производная всюду ограничены.

Если $\rho(z)$ – быстропеременная функция, то в левой части (14) существует только первый член и мы приходим к обычному одномерному уравнению Пуассона, имеющему смысл тогда, когда изменение всех величин вдоль z происходит на длинах l , много меньших характерного поперечного размера $R \lesssim b$. В случае же $l \gtrsim b$ роль дополнительного слагаемого $-\varepsilon \bar{\varphi}$ оказывается, как увидим ниже, весьма существенной.

Соображения такого рода целиком переносятся и на гравитирующий диск, бесконечный по радиусу. В однородном в плоскости Ozy диске гравитация действует только в поперечном x -направлении и в стационарном состоянии уравновешена градиентом давления. При деформациях, затрагивающих только одно направление в плоскости диска (скажем, направление z), его толщина в данном участке изменяется – при полном равновесии – по закону

$$h \sim l^m, \quad m = \frac{2-\gamma}{\gamma}, \quad (16)$$

что для $\gamma = \frac{5}{3}$ дает

$$h \sim l^{1/5}, \quad (17)$$

т.е. изменение h происходит весьма медленно, как и выше в случае поперечного размера цилиндра. Если деформации не нарушают однородности по y , то усреднение уравнения Пуассона по толщине

* Подобный метод осреднения развит в [4–6]

диска приводит к уравнению вида (14). Дальнейшее рассмотрение будет относиться в равной мере как к цилиндру, так и к диску, хотя для определенности будем говорить только о цилиндре.

3. Волна малой амплитуды

Рассмотрим поведение малых возмущений в однородном цилиндре. Пусть эти возмущения имеют вид плоской волны, бегущей вдоль z . Выберем систему координат, движущуюся вместе с волной. Тогда все производные по t исчезают и уравнения гидродинамики принимают вид

$$V \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(V\rho) = 0. \quad (19)$$

Проинтегрировав, из (18), (19) получаем

$$\frac{V^2}{2} = -\int \frac{dp}{\rho} - \varphi + E, \quad (20)$$

$$V\rho = C, \quad E = \text{const}, \quad C = \text{const}. \quad (21)$$

К этим соотношениям добавляется (14) и уравнение состояния среды. В линейном приближении по возмущениям находим

$$V\delta V = -u^2 \frac{\delta\rho}{\rho} - \delta\varphi, \quad (22)$$

$$\delta V = V \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (23)$$

где величины без значка δ относятся к невозмущенному состоянию, в котором

$$\rho = \text{const}, \quad V = \text{const}, \quad \varphi = -\frac{4\pi G\rho}{\varepsilon}. \quad (24)$$

Величина $u = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ есть скорость звука.

Уравнение (22) предполагает, что возмущение не затрагивает полной энергии среды E в данном ее участке. Уравнение (14) с учетом (2), (23) дает

$$\frac{d^2}{dz^2} \delta\varphi = \left(\varepsilon + \frac{4\pi G\rho}{V^2 - u^2} \right) \delta\varphi. \quad (25)$$

Отсюда

$$\delta\varphi \sim \cos kz. \quad (26)$$

Для данного волнового числа k находим

$$V^2 = u^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2 + \varepsilon}. \quad (27)$$

Скорость распространения «тяжелого звука» зависит от волнового числа k , причем V^2 положительно при

$$k^2 > \frac{4\pi G\rho}{u^2} - \varepsilon. \quad (28)$$

Мнимым V отвечает неустойчивость джинсова типа, которая имеет место при достаточно длинных волнах. При $\varepsilon \geq 4\pi G\rho/u^2$ неустойчивость вообще невозможна. Но по смыслу величины $\varepsilon \approx b^{-2}$ такое условие почти в точности совпадает с условием гидростатического равновесия по радиусу в газе с паскалевским давлением. При точном совпадении неустойчивость в однородном цилиндре была бы запрещена, но, как показывают точные расчеты (правда, для других условий – несжимаемости в [1] и изотермичности в [2]), неустойчивость все же имеет место, хотя и для длин волн, заметно больших джинсовой. В цилиндре с анизотропным давлением, когда дисперсия по z больше, чем дисперсия по r , эффект стабилизации особенно заметен [3]. В работах [1–3] неустойчивость исследовалась в линейном приближении; далее мы рассмотрим ситуацию, когда существенна нелинейность.

4. Нелинейная стационарная волна

Попытаемся проанализировать систему нелинейных уравнений (20), (21), (14) при произвольной амплитуде возмущений. Будем интересоваться возможностью существования адиабатических стационарных волн конечной амплитуды. Как и при рассмотрении волн малой амплитуды, пренебрегая кинематической неоднородностью (т.е. поперечным движением), мы косвенно учитываем неоднородность гравитационного поля при помощи осредненного уравнения Пуассона (14).

Согласно (10), поперечное движение вообще отсутствует при показателе адиабаты $\gamma = 2$. В других отношениях это значение γ в нашей задаче никак не выделено. Поэтому мы рассмотрим сначала самый простой случай $\gamma = 2$, а затем обсудим влияние малых отличий γ от этого значения, соответствующих реальному показателю $\gamma = \frac{5}{3}$.

Выразим давление в адиабатической волне через плотность

$$p = A\rho^\gamma \quad (29)$$

и проинтегрируем (20) по продольной координате z :

$$\frac{V^2}{2} = -\frac{A\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \varphi + E, \quad (30)$$

где E – константа интегрирования. Далее выражаем скорость V через плотность ρ по формуле (21) и находим потенциал φ как функцию ρ :

$$\varphi = E - \left[\frac{C^2}{2\rho^2} + \frac{A\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} \right]. \quad (31)$$

Эта функция имеет единственный максимум при

$$\rho = \rho_* = \left(\frac{C^2}{A\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (32)$$

Критическая плотность ρ_* не зависит от E , ей отвечает скорость, равная скорости звука u . Так как $V \sim \rho^{-1}$, $u \sim \rho^{(\gamma-1)/2}$, то при малых плотностях ($\rho < \rho_*$) движение является сверхзвуковым, а при больших ($\rho > \rho_*$) – дозвуковым. Качественный ход функции $\varphi(\rho)$ при интересующем нас значении $\gamma = 2$ показан на рис.1. Обратная функция $\rho(\varphi)$ является двузначной. На сверхзвуковой ветви имеем

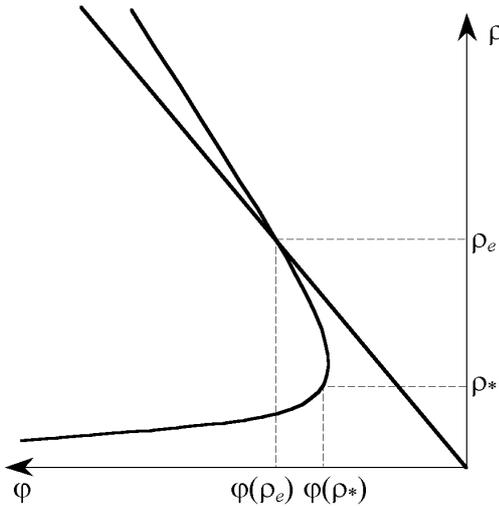


Рис. 1. Качественный ход функции $\rho(\varphi)$ дается кривой, прямая есть $\frac{\varepsilon}{4\pi G}\varphi$. Показано пересечение в области дозвуковых движений, $\rho > \rho_*$

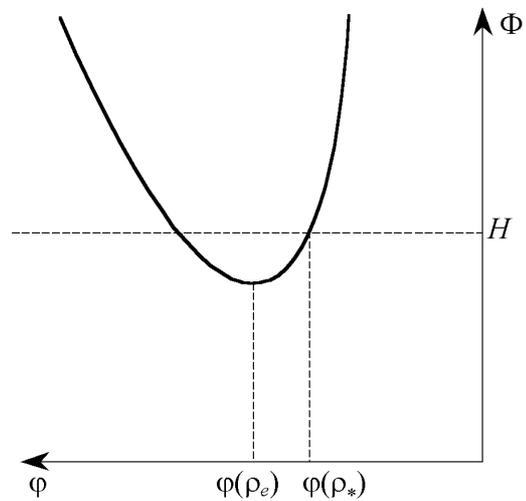


Рис. 2. Пересечению в дозвуковой области отвечает эффективный потенциал $\Phi(\varphi)$ с минимумом при $\varphi = \varphi_e$

асимптотику при $\rho \rightarrow 0$:

$$\rho \sim \left(-\frac{C^2}{2\varphi}\right)^{1/2} \quad (33)$$

На дозвуковой ветви при $\rho \rightarrow \infty$

$$\rho \sim -\frac{\varphi}{2A} \quad (34)$$

В обоих случаях $\varphi \rightarrow -\infty$. Кривая $\rho(\varphi)$ всюду обращена выпуклостью к оси ρ , так как $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} < 0$.

Обратимся к уравнению (14), в которое теперь входит только одна неизвестная функция φ . Покажем, что это уравнение допускает всюду ограниченные решения.

Укажем прежде всего на связь между константой ε в уравнении (14) и величиной A , фигурирующей в соотношении (29). Из условия гидростатического равновесия по поперечнику (5) следует

$$p \approx 2\rho^2 GR^2.$$

Но тогда с помощью (29) находим приближенно $R^2 \approx \frac{A}{2G}$. Так как $\varepsilon \approx b^{-2}$, $b > R$, то

$$\varepsilon < \frac{2G}{A} \quad (35)$$

Заметим далее, что (14) имеет вид уравнения движения точки, если считать φ ее координатой, а z – временем. Финитные движения точки возможны тогда, когда эффективный потенциал $\Phi(\varphi)$, градиент которого по φ со знаком минус составляет правую часть уравнения (14), имеет хотя бы один минимум.

Экстремуму $\Phi(\varphi)$ отвечает обращение в нуль правой части (14), и, следовательно, точка пересечения кривой $\rho(\varphi)$ на рис.1 с прямой $(\varepsilon/4\pi G)\varphi$. Пересечение происходит при $\rho = \rho_e$, причем для интересующего нас значения $\gamma = 2$ плотность ρ_e определяется из уравнения

$$E = \frac{C^2}{2\rho_e} - \left(\frac{4\pi G}{\varepsilon} - 2A\right)\rho_e. \quad (36)$$

Это уравнение имеет только одно положительное решение, так как справа стоит монотонно убывающая функция ρ_e (мы учли здесь неравенство (35)). Точка пересечения может находиться либо на дозвуковой, либо на сверхзвуковой ветви в зависимости от соотношения между ρ_e и ρ_* . Пересечению со сверхзвуковой ветвью соответствует эффективный потенциал $\Phi(\varphi)$, имеющий максимум при $\varphi = \varphi(\rho_e)$, ибо с изменением φ от больших отрицательных значений к меньшим производная $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ меняет знак плюс на минус. Значит, финитных движений в этом случае не существует, и сверхзвуковые стационарные решения невозможны.

Пересечение с дозвуковой ветвью обеспечивает минимум на потенциальной кривой $\Phi(\varphi)$, и, следовательно, дозвуковые стационарные решения действительно допускаются уравнениями (20), (21), (14), (29).

5. Обсуждение

Итак, для дозвуковых движений система уравнений (20), (21), (14), (29) допускает решения с изменением ρ и φ в конечных пределах на бесконечном интервале z . Это и есть стационарные нелинейные периодические волны, обязанные самогравитации среды. Формально они получаются в нашем решении только благодаря тому, что уравнение Пуассона модифицировано введением ε . Так как смысл модификации состоял в учете неоднородности реального распределения вещества, то стационарность оказывается прямым следствием неоднородности. Очевидно, что последняя проявляется лишь в тех продольных масштабах движения, которые сравнимы с поперечным размером распределения вещества.

Стационарные нелинейные адиабатические волны существуют при не слишком больших зна-

чениях величины

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - 4\pi \int \rho(\varphi) d\varphi - \frac{\varepsilon\varphi^2}{2},$$

представляющей собой первый интеграл уравнения (14) относительно φ . В использованной выше динамической аналогии эта величина играет роль полной механической энергии частицы с координатой φ , движущейся в потенциале $\Phi(\varphi)$. Периодическим решениям отвечают, как всегда, значения H , не выходящие за критическую точку $\varphi = \varphi(\rho_*)$ на потенциальном рельефе $\Phi(\varphi)$ (рис.2).

Рассмотрим теперь видоизменения, возникающие при $\gamma < 2$ (но все же при $\gamma > 1$). Если γ отличается от 2 не слишком сильно, скажем, $\gamma = \frac{5}{3}$, то поперечные движения (которые при $\gamma = 2$ отсутствуют, см. (10)) могут быть лишь слабыми, так что движение остается в основном одномерным. Вводя вместо ρ линейную плотность σ в уравнение неразрывности, получим вместо (21)

$$\sigma V = C. \quad (37)$$

С помощью (10) находим

$$\rho = \alpha \sigma^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (38)$$

(α – константа). Подставим это в уравнение (30) и добавим слева энергию поперечных движений:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\beta}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = - \frac{A\gamma}{\gamma-1} \alpha^{\gamma-1} \sigma - \varphi + E, \quad (39)$$

причем в системе отсчета, движущейся вместе с волной,

$$\frac{dR}{dt} = V \frac{\partial R}{\partial z} \quad (40)$$

(β – некоторый структурный коэффициент).

С учетом (10) и (37) последнее соотношение принимает вид

$$\frac{dR}{dt} = \eta \sigma^{\frac{3\gamma-2}{2(\gamma-1)}} \frac{d\sigma}{dz} \quad (41)$$

(η – константа).

Теперь (39) можно записать так:

$$\frac{C^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \beta \eta^2 \sigma^{\frac{3\gamma-2}{\gamma-1}} \left(\frac{d\sigma}{dz} \right)^2 = -A \frac{\gamma}{\gamma-1} \sigma - \varphi + E. \quad (42)$$

Когда γ близко к 2, дополнительное слагаемое в (42), отличающее это уравнение от уравнения (31) с $\gamma = 2$, невелико, и потому по непрерывности можно ожидать, что характер решения качественно не изменится и стационарные волны будут существовать и в этом случае. Эффекты, связанные с этим дополнительным слагаемым, когда оно не считается пренебрежимо малым, не могут быть проанализированы в рамках использованной нами динамической аналогии с движением частицы в консервативном поле и требуют специального рассмотрения.

Итак, мы показали, что парадокс Эрншоу, вообще говоря, не имеет места в самогравитирующей среде. Этот вывод может иметь значение для космогонии звезд, их скоплений и самих галактик. Хотя мы не ставили своей целью дать в этой заметке приложения к конкретным астрофизическим задачам, укажем, что нелинейные проблемы возбуждения и распространения волн при наличии собственной гравитации среды возникают в теории образования галактик (см., например, книгу [6]). Вероятно, нелинейные адиабатические волны, распространяющиеся без «опрокидывания» и образования разрывов, способны существовать в метагалактической среде сразу после эпохи рекомбинации в горячей Вселенной, если их масштаб близок к джинсовой длине волны. Этому масштабу отвечают массы, характерные для шаровых скоплений. В теории [7] нелинейным возмущениям такого рода порождаются шаровые скопления как первичные объекты, которые, сгущаясь, образуют галактики различных типов. Если же считать [6], что первичными объектами являются скопления галактик, то соответствующие им нелинейные возмущения неизбежно приводят к разрывам и ударным волнам, так как их масштаб много больше джинсовского. Нелинейные проблемы возникают также в крупномасштабной динамике межзвездной среды [8], хотя там положение осложняется

необходимостью учета гравитации звезд.

Авторы благодарны А.С.Зильберштейну и Э.Троппу за полезные обсуждения.

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and Hydrodynamical Stability. – Oxford, Clarendon Press, 1961.
2. Пахольчик А.Ж. // Астрон. ж. – 1962. – **39**. – С. 953.
3. Антонов В.А., Нежинский Е.М. // Уч. зап. Ленингр. ун-та. – 1973. – № 363. – С. 122.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972.
5. Тропп Э.А. // Магнитная гидродинамика. – 1972. – № 3. – С. 111.
6. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975.
7. Peebles P.J.E., Dicke R. // Astrophys. J. – 1968. – **154**. – P. 861.
8. Каплан С.А., Пикельнер С.Б. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. – 1974. – **12**. – P. 113.

Комментарий. Фазовая скорость V волны возмущения обычно остается в тени при расчете на устойчивость – при принятом же здесь порядке вычислений она выдвигается на передний план. В данной модели фазовая скорость – только дозвуковая, но в работах различных авторов, относящихся к вращающемуся слою или диску, фигурируют и сверхзвуковая V , а также солитоны, отсутствующие в нашей модели без вращения.

Ударные волны должны у нас появляться при переходе через звуковой предел. Интересно при этом, что в самый момент перехода никакой потери гладкости функции $\varphi(z)$ не происходит. Теория функций комплексного переменного и не утверждает необходимости появления «предвестников» потери аналитичности в критический момент при продолжении по параметру.

Поступила в редакцию 16.12.2002