Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 66 – 82

УДК 542

Точное определение спектра собственных колебаний звездных систем на примере модели плоского однородного слоя*

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

Рассматривается одномерная конечная стационарная модель с однородной звездной плотностью и аномальным градиентом фазовой плотности. Коллективные явления не ведут к неустойчивым режимам.

ТОЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ СПЕКТРА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЗОРЯНИХ СИСТЕМ НА ПРИКЛАДІ МОДЕЛІ ПЛОСКОГО ОДНОРІДНОГО ШАРУ, Антонов В.А.— Розглядається одновимірна скінчена стаціонарна модель з однорідною зоряною густиною та аномальним градієнтом фазової густини. Колективні явища не призводять до нестійких режимів.

AN EXACT DETERMINATION OF THE NATURAL OSCILLATION SPECTRUM OF STELLAR SYSTEMS BY THE EXAMPLE OF THE MODEL OF A PLANE HOMOGENEOUS LAYER, by Antonov V.A.— One-dimensional finite stationary model with the uniform stellar density and the anomalous gradient of the phase density is considered. Nevertheless the co-operative phenomena do not lead to unstable modes.

1. Введение

Вопрос об устойчивости различных стационарных моделей представляет большой интерес для теории динамической эволюции звездных систем, поскольку те модели, для которых впервые теряется устойчивость, отмечают критические точки линии эволюционного развития, когда плавная эволюция сменяется сравнительно быстрой, скачкообразной перестройкой. В кинетических особенностях подсистем Галактики некоторые авторы действительно видят следы изменений, имевших место в прошлом [1].

Методы исследования устойчивости звездных систем можно разделить на две основные группы: численные и аналитические. Численные методы основаны либо на разложении возмущающего потенциала по некоторой ортогональной системе функций, либо на численном интегрировании уравнений движения в задаче многих тел, либо на комбинации этих приемов. К настоящему времени литература по численным методам уже довольно значительна. Упомянем для примера работы [2–6]. Численным методам присущи естественные ограничения, связанные с большим объемом вычислений и необходимостью пересчета для каждой новой конкретной модели.

Затраты труда на численное решение удалось бы во много раз сократить, если бы в нашем распоряжении были достаточно полные и совершенные аналитические методы исследования устойчивости звездных систем. Но в действительности дело обстоит не так. Рассмотрим вкратце принципиальные основы аналитических методов.

1) *Гидродинамическая аналогия* есть не что иное, как сведение задачи об устойчивости фазодинамической модели звездной системы к задаче об устойчивости некоторой эквивалентной гидродинамической конфигурации. Естественно, что переход от шестимерного фазового пространства к обычному трехмерному пространству существенно упрощает выкладки. Сама возможность такого

*Впервые опубликована в Трудах Астрон. обсерв. Ленингр. ун-та. – 1971. – **28**. – С. 64–85.

перехода нередко принимается как постулат, связанный с теми или иными статистическими соображениями [7]. Но иногда, особенно для сферических систем, она может быть доказана строго при помощи энергетических принципов [8]. Точнее, из вековой устойчивости неоднородной гидродинамической самогравитирующей среды следует устойчивость соответствующей звездной системы, если распределение скоростей в каждой точке сферически симметрично [9, 10]. Обратное утверждение неверно. При помощи дополнительных искусственных приемов нам удалось доказать [9], что для устойчивости звездной системы вышеуказанной структуры достаточно, если звездная плотность как функция потенциала $\nu(U)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d^3\nu}{dU^3} > 0. \tag{1}$$

Условию (1), в частности, удовлетворяют изотермическая модель, политропная модель с $n > 3$ и изохронная модель Hénon [11], для которой

$$\nu = \frac{(1+U)^4(3-U)}{(1-U)^3} \qquad (0 < U < 1)$$

при надлежащем выборе единиц. Не во всех перечисленных примерах существует устойчивость соответствующего газового шара [12]. Такое положение носит, по-видимому, общий характер: не всякое волновое или пульсационное движение, мыслимое для гидродинамических систем, осуществимо для звездных систем с теми же распределениями пространственной плотности. Основная причина здесь в том, что возмущение, вызванное в звездной системе, не обязано, вообще говоря, распространяться в виде единой волны, а может просто «рассыпаться», если участвующие в нем звезды разойдутся каждая по своей орбите. Данные наблюдений также показывают, что галактики, аналогичные по своей крупномасштабной структуре эллипсоидам Маклорена [7], проявляют неустойчивость в гораздо меньшей степени, чем того требует классическая теория фигур равновесия жидкой массы [13]. Таким образом, гидродинамическая аналогия по своей природе дает обычно только достаточные признаки устойчивости.

2) *Разложения по малому параметру*, которым фактически оказывается отношение длины возмущения к характерным размерам системы или величина, непосредственно связанная с этим отношением. Напротив, отношение дебаевской длины к размерам системы не является малым параметром, так как уже из соображений размерности и теоремы вириала следует, что обе длины одного порядка, в чем состоит радикальное отличие самогравитирующей системы от плазменной среды, размеры которой могут в принципе расти сколь угодно без изменения локальных параметров.

С другой стороны, если, сохраняя неизменным относительный прирост плотности за счет возмущения, устремить к нулю длину волны, то и собственное гравитационное поле такого коротковолнового возмущения также будет убывать до нуля. Практически это означает, что возмущения с бесконечно малой длиной волны не опасны для устойчивости звездной системы, если она сама и ее подсистемы обладают хотя бы малой, но отличной от нуля дисперсией скоростей. Только когда эта дисперсия строго равна нулю [14], получается математически точный вывод о неустойчивости системы по отношению к возмущениям с произвольно малой длиной волны. Но для поиска критерия, разделяющего устойчивые и неустойчивые модели звездных систем с конечной дисперсией, мы и длину возмущения обязаны с самого начала считать конечной величиной, а это несовместимо с самой идеей малого параметра без существенных натяжек, так как неизвестно, какими членами в разложениях можно пренебрегать.

Таким образом, ни гидродинамическая аналогия, ни метод малого параметра не покрывают всей области наиболее интересных звездно-динамических моделей; напротив, между этими методами остается существенный пробел. Чтобы частично заполнить его и вместе с тем дать как бы пробный камень для проверки различных приближенных приемов, полезно обратить внимание на те сравнительно редкие случаи, когда расчет собственных колебаний (в линейном приближении) для фазодинамической модели удается провести до конца в известных функциях.

Конкретно, упрощающим моментом в наших расчетах будет служить однородность звездной (а не фазовой, как в [15,16]) плотности, поскольку она обеспечивает удобную разрешимость уравнений невозмущенного движения частиц, которое в данном случае представляет собой просто гармонические колебания.

2. Основные уравнения

Мы будем рассматривать однородную модель в виде плоского слоя, хотя аналогичные идеи могут применяться и к пространственным моделям. Плоский слой представляем себе бесконечно простирающимся в направлениях x и y. Параметры возмущения также будем считать не зависящими от x и y, так что все движения можно формально считать одномерными. Фазовая плотность в невозмущенном стационарном состоянии должна соответственно зависеть от интеграла энергии движения в z-направлении, притом по закону

$$\begin{aligned} &f(E) \sim (E_0 - E)^{-1/2} \qquad && (E < E_0), \\ &f(E) = 0 && (E > E_0), \end{aligned}$$

в чем легко убедиться, решая уравнение Абеля. Потенциал внутри «одномерной» системы с постоянной звездной плотностью ν изменяется по закону

$$U = -2\pi m G \nu z^2 \tag{2}$$

(m – масса одной звезды, G – гравитационная постоянная).

Для дальнейших расчетов удобно стандартизировать масштаб измерения времени, приняв частоту обращения частицы $\omega_0 = \sqrt{4\pi m G\nu}$ за единицу. Итак, в наших выкладках

$$4\pi m G \nu = 1, \tag{3}$$

а для перехода к обычной системе единиц достаточно умножить полученные далее характеристические частоты колебаний системы на величину ω_0.

Пусть значение $z = 0$ соответствует срединной плоскости, а c – полутолщина системы. Учитывая конкретное выражение интеграла энергии и условие (3), получаем

$$f = \frac{\nu}{\pi\sqrt{c^2 - z^2 - w^2}}, \tag{4}$$

где через w обозначена скорость частицы. Фазовая плотность как функция $|w|$ возрастает до $|w| = \sqrt{c^2 - z^2}$, после чего резко обрывается. Это усечение связано с необходимостью получить резкую пространственную границу системы и не имеет отношения к скорости отрыва, которая в одномерном случае вообще бесконечна.

Для описания малых отклонений от стационарного состояния в терминах фазовой плотности пришлось бы вводить обобщенные функции, так как выражение (4) дает значение $f = +\infty$ на границе фазового объема, занимаемого системой.

Удобнее идти другим путем. Зафиксируем некоторое исходное положение всех частиц, статистически удовлетворяющее (4), и представим себе, что любое другое состояние с той же полной массой получается из исходного посредством непрерывной деформации фазового пространства с соответствующим смещением частиц. Отметим прежде всего частный случай, когда указанная деформация является просто результатом естественной эволюции за промежуток времени t. Тогда новые фазовые координаты согласно законам гармонического колебания выражаются через старые координаты z_0 и w_0 следующими функциями:

$$\begin{aligned} \overline{z}(z_0, w_0, t) &= z_0 \cos t + w_0 \sin t \\ \overline{w}(z_0, w_0, t) &= -z_0 \sin t + w_0 \cos t \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим теперь параллельно произвольные непрерывные деформации, мало отличающиеся от (5):

$$\begin{aligned} z &= z_0 \cos t + w_0 \sin t + \varepsilon\psi, \\ w &= -z_0 \sin t + w_0 \cos t + \varepsilon\varphi, \end{aligned} \tag{6}$$

где поправочные функции ψ и φ зависят от z_0 и w_0. Но поскольку нас интересует эволюция возмущенного состояния во времени, для его описания достаточно одной функции ψ. Действительно, сравнивая второе равенство (6) с результатом дифференцирования первого, получаем $\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial t}$. Аналогично напряженность гравитационного поля F, действующего на частицу с координатой z, связана с ψ соотношением

$$F = -z_0 \cos t - w_0 \sin t + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{7}$$

В самосогласованной модели

$$F(z) = 2\pi G(M_1(z) - M_2(z)),$$

где $M_1(z)$ и $M_2(z)$ – массы (на единичную площадку по осям x и y), расположенные соответственно выше и ниже данного уровня z. Или, если ввести полную массу системы $M = 2m\nu c$ и нейтральный аргумент h,

$$F(h) = 2\pi G(2M_1(h) - M). \tag{8}$$

Но M_1 легко представить в виде интеграла

$$M_1(h) = m \iint\limits_{z>h} f\, dz_0\, dw_0, \tag{9}$$

где f берется согласно (4), но с аргументами z_0 и w_0, а координата притягивающей точки z раскрывается как функция от z_0 и w_0 согласно (6). Кроме явно обозначенного условия $z > h$, область интегрирования ограничивается также окружностью

$$z_0^2 + w_0^2 = c^2. \tag{10}$$

Правые части (5) удобно принять в качестве новых аргументов, вместо z_0 и w_0. Эти новые аргументы, которые далее будем обозначать через X и Y, представляют собой как бы законные фазовые координаты частицы, которые она имела бы при отсутствии возмущений. Элемент площади и уравнение границы (10) инвариантны по отношению к данной замене координат:

$$X = z_0 \cos t + w_0 \sin t, \qquad Y = -z_0 \sin t + w_0 \cos t.$$

Условие же $z = h$ в новых переменных принимает вид $X + \varepsilon\psi = h$, где с точностью до членов высшего порядка значение ψ можно брать при $X = h$. Следовательно, область интегрирования в (10) можно разделить на основной массив $X > h$ и узкую полоску вдоль прямой $X = h$ шириной $\varepsilon\psi$. Проделав указанные выкладки и учтя (3), из (8) и (9) получаем

$$F(h) = -h + \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\sqrt{c^2-h^2}}^{\sqrt{c^2-h^2}} \frac{\psi}{\sqrt{c^2 - h^2 - Y^2}} dY. \tag{11}$$

Дифференцирование по t имеет различный смысл в зависимости от того, следим мы за одной и той же частицей ($z_0 = \mathrm{const}$, $w_0 = \mathrm{const}$) или за частицами с одинаковым номинальным положением ($X = \mathrm{const}$, $Y = \mathrm{const}$). Для отличия в первом случае дифференцирование по t будем обозначать символом D, сохранив обозначение $\frac{\partial}{\partial t}$ за частной производной в системе X, Y, t. По правилу полного дифференцирования,

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + Y \frac{\partial}{\partial X} - X \frac{\partial}{\partial Y}. \tag{12}$$

Различие между D и $\frac{\partial}{\partial t}$, кстати сказать, можно сравнить с различием между стоксовой и локальной производными, но для течения в фазовом пространстве. Уравнение движения (7) мы должны теперь записать в виде

$$F = -X + \varepsilon D^2 \psi. \tag{13}$$

Остается отнести (11) к аргументу $z = X + \varepsilon\psi$ вместо h. Так как перед интегралом в (11) уже стоит множитель ε, то в самом интеграле различие между z и X не учитываем:

$$F(z)=-X-\varepsilon\psi+\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{c^2-h^2}}^{\sqrt{c^2-h^2}}\frac{\psi(X,Y,t)}{\sqrt{c^2-X^2-Y^2}}dY,$$

что в результате сравнения с (13) дает нам основное интегро-дифференциальное уравнение

$$D^2\psi+\psi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{c^2-h^2}}^{\sqrt{c^2-h^2}}\frac{\psi(X,Y,t)}{\sqrt{c^2-X^2-Y^2}}dY \tag{14}$$

где оператор D раскрывается согласно (12). Введем сразу классификацию решений уравнения (14) на основании свойств симметрии. Представим себе, что движение каждой частицы зеркально отображено в плоскости $z=0$. Система, состоящая из таких отраженных частиц, также будет удовлетворять уравнениям движения. Но при указанном отражении z и w, а, стало быть, также X и Y меняют знак на противоположный. Кроме того, направление смещения частицы в возмущенном состоянии по отношению к невозмущенному меняется на противоположное. В итоге функция $\psi(X,Y,t)$ заменяется на $-\psi(-X,-Y,t)$, и по отношению к такой замене уравнение (14) должно быть инвариантным, что подтверждается и непосредственной проверкой. В силу линейности (14) можно составлять также полусумму и полуразность исходного и отраженного решений, удовлетворяющие условиям

$$\psi(-X,-Y,t)=-\psi(X,Y,t) \tag{15}$$

или

$$\psi(-X,-Y,t)=\psi(X,Y,t). \tag{16}$$

Решения, удовлетворяющие (15) или (16), будем называть соответственно симметричными и антисимметричными. Общее решение есть сумма симметричного и антисимметричного.

Иногда мы будем также пользоваться «полярными» координатами ρ и θ, вводимыми соотношениями

$$X=\rho\cos\theta,\qquad Y=\rho\sin\theta.$$

При этом

$$D=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta},$$

а условия (15) и (16) принимают соответственно вид

$$\psi(\rho,\theta+\pi,t)=-\psi(\rho,\theta,t) \tag{17}$$

или

$$\psi(\rho,\theta+\pi,t)=+\psi(\rho,\theta,t) \tag{18}$$

3. Апериодические решения

Найдем вначале общий вид решений (14), не зависящих от t. Обозначив правую часть уравнения (14) через $\sigma(x)$, записываем его применительно к данному случаю в форме

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\psi=\sigma(\rho\cos\theta) \tag{19}$$

с соответствующим общим решением

$$\psi=\int\limits_0^{\theta}\sigma(\rho\cos\theta_1)\sin(\theta-\theta_1)\,d\theta_1+a(\rho)\cos\theta+b(\rho)\sin\theta. \tag{20}$$

Дальнейший анализ разделяется на две ветви в зависимости от того, рассматриваем ли мы симметричное или антисимметричное решение. Если ψ – симметричное решение, то $\sigma(x)$ – нечетная функция. В качестве граничных условий для $\psi(\theta)$ как решения дифференциального уравнения (19) имеем вытекающие из (17)

$$\psi(\pi)=-\psi(0), \qquad \psi'(\pi)=-\psi'(0)$$

Оба условия приводят, впрочем, только к одному необходимому соотношению

$$\int\limits_0^\pi \sigma(\rho\cos\theta)\cos\theta\,d\theta=0,$$

или

$$\int\limits_0^{\rho^2}\frac{\sigma(\sqrt{u})}{\sqrt{\rho^2-u}}du=0$$

для любого ρ из интервала $(0,c)$. Ввиду однозначности решения уравнения Абеля заключаем, что $\sigma(x)=0$ $(|x|\leqslant c)$. Подставив оставшиеся члены (20) в правую часть (14), получаем уравнение

$$\int\limits_X^c \frac{a(\rho)\,d\rho}{\sqrt{(c^2-\rho^2)(\rho^2-X^2)}}=0 \qquad (0\leqslant X\leqslant c), \tag{21}$$

причем мы заменили интегрирование по Y интегрированием по ρ посредством соотношений

$$X^2+Y^2=\rho^2, \qquad dY=\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-X^2}}$$

Член с $\sin\theta$ выпал, так как соответствующая часть подынтегрального выражения оказывается нечетной относительно Y. Уравнение (21) также легко сводится к уравнению Абеля заменой $v=c^2-\rho^2$, $s=c^2-X^2$:

$$\int\limits_0^s \frac{f(u)}{\sqrt{s-u}}du=0, \qquad \text{где } f(u)=\frac{a\sqrt{c^2-u}}{\sqrt{u(c^2-u)}},$$

а отсюда следует $a(\rho)=0$. Полученное решение

$$\psi=b(\rho)\sin\theta \tag{22}$$

имеет достаточно ясный геометрический смысл. Поворот каждой орбиты в фазовой плоскости на малый угол $\dfrac{b(\rho)}{\rho}$ (разный у разных орбит) не меняет, очевидно, фазовой плотности, но придает отдельной частице смещение по координате z, как раз совпадающее с $b(\rho)\sin\theta$. Такие решения, для которых характерно изменение порядка расположения или нумерации частиц без реального изменения фазовой плотности, условимся называть «*перестановочными*». Их появление – неизбежный недостаток метода, основанного на рассмотрении функции ψ.

Обратимся теперь к антисимметричному решению. Для него $\sigma(x)$ – четная функция. Сама функция $\psi(\theta)$ как решение дифференциального уравнения (19) согласно (18) должна удовлетворять граничным условиям

$$\psi(\pi)=\psi(0) \quad \text{и} \quad \psi'(\pi)=\psi'(0),$$

что дает в итоге

$$a(\rho)=\int\limits_0^{\pi/2}\sigma(\rho\cos\theta_1)\sin\theta_1\,d\theta_1, \qquad b(\rho)=0.$$

Примем далее ρ и X в качестве аргументов ψ. Тогда $\theta=\arccos\frac{X}{\rho}$ (достаточно рассматривать область $0\leqslant\theta\leqslant\pi$) и аналогично заменим переменные интегрирования $\theta_1=\arccos\frac{X_1}{\rho}$. Получаем

$$\psi=\frac{\sqrt{\rho^2-X^2}}{\rho^2}\int\limits_X^\rho \frac{X_1\sigma(X_1)}{\sqrt{\rho^2-X^2}}dX_1+\frac{X}{\rho^2}\int\limits_0^X\sigma(X_1)\,dX_1.$$

Остается подставить вышенаписанное выражение в правую часть (14), где интегрирование по Y

должно быть заменено интегрированием по ρ, и отождествить ее с $\sigma(X)$. После некоторых сокращений остается

$$\frac{1}{c}\int\limits_0^c \sigma(X_1)\,dX_1 = \sigma(X).$$

т.е. $\sigma(X) = \mathrm{const}$ и соответственно

$$\psi = \mathrm{const}. \tag{23}$$

Это – просто смещение системы как целого.

Далее обратимся к решениями уравнения (14), линейно зависящим от времени

$$\psi = \psi_0 t + \psi_1.$$

Подставив в (14), убеждаемся, что ψ_0 само по себе удовлетворяет (14) и обязано иметь вид (22) или (23). Для ψ_1 получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2} + \psi_1 = 2\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} + \sigma_1(\rho\cos\theta), \tag{24}$$

где

$$\sigma_1(X) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{c^2-X^2}}^{\sqrt{c^2-X^2}} \frac{\psi_1(X,Y,t)}{\sqrt{c^2-X^2-Y^2}}dY.$$

Для антисимметричного решения, очевидно, $\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} = 0$ и (24) сводится к уже известному нам виду (19), так что

$$\psi = \sigma_0 t + \sigma_1, \tag{25}$$

где σ_0 и σ_1 – константы. Такое решение означает движение системы как целого. Несколько сложнее обстоит дело для симметричного решения. Подставив в (24) $\psi_0 = b(\rho)\sin\theta$, находим общее решение

$$\psi_1 = \int\limits_0^\theta \sigma_1(\rho\cos\theta_1)\sin(\theta-\theta_1)\,d\theta_1 + b(\rho)\theta\sin\theta + a_1(\rho)\cos\theta, \tag{26}$$

причем мы не включили на этот раз член типа $b_1(\rho)\sin\theta$, чтобы не повторять уже известных частных решений (22). $\sigma_1(x)$ – нечетная функция, а граничные условия дают нам

$$\int\limits_0^\pi \sigma_1(\rho\cos\theta)\cos\theta\,d\theta = -\pi b(\rho) \tag{27}$$

или в переменных ρ и X

$$\int\limits_0^\rho \frac{X\sigma_1(X)}{\sqrt{\rho^2-X^2}}dX = -\frac{\pi}{2}\rho b(\rho) \tag{28}$$

Так как функция ψ_1 из (26) зависит от θ четным образом, то ее также можно однозначно выразить через θ и X:

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{\rho^2-X^2}}{\rho^2}\int\limits_X^\rho \frac{X_1\sigma_1(X_1)}{\sqrt{\rho^2-X_1^2}}dX_1 - \frac{X}{\rho^2}\int\limits_X^\rho \sigma_1(X_1)\,dX_1 + \frac{b(\rho)}{\rho}\sqrt{\rho^2-X^2}\arccos\frac{X}{\rho} + \frac{a_1(\rho)}{\rho}X.$$

Учитывая соотношение $dY = \dfrac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-X^2}}$ и выполнив, где возможно, интегрирование по ρ в явном виде, получаем

$$\sigma_1(X)=\frac{2}{\pi}\int\limits_X^c \frac{\rho\psi_1\,d\rho}{\sqrt{(\rho^2-X^2)(c^2-\rho^2)}}=\frac{2}{\pi c}\int\limits_X^c \sigma_1(X_1)\arccos\frac{X\sqrt{c^2-X_1^2}}{X_1\sqrt{c^2-X^2}}\,dX_1+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_X^c \frac{b(\rho)\arccos\frac{X}{\rho}}{\sqrt{c^2-\rho^2}}d\rho+\frac{2X}{\pi}\int\limits_X^c \frac{a_1(\rho)}{\sqrt{(\rho^2-X^2)(c^2-\rho^2)}}d\rho. \tag{29}$$

Если задана одна из функций $\sigma_1(X)$ или $b(\rho)$, то согласно (28) однозначно определяется другая. Поэтому соотношение (29) можно считать интегральным уравнением относительно неизвестной функции $a_1(\rho)$ и записать его в виде

$$\frac{2X}{\pi}\int\limits_X^c \frac{a_1(\rho)\,d\rho}{\sqrt{(\rho^2-X^2)(c^2-\rho^2)}}=\varphi(X)$$

Чтобы выразить $a_1(\rho)$ в явном виде, применим интегро-дифференциальную операцию, близкую к той, которая применяется при решении уравнений Абеля:

$$\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^c \frac{\varphi(X)}{\sqrt{X^2-\rho^2}}dX=-\frac{a_1(\rho)}{\sqrt{c^2-\rho^2}}.$$

Но ту же самую операцию можно представить в иной форме, используя интегрирование по частям (штрих ниже означает производную):

$$\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^c \frac{\varphi(X)}{\sqrt{X^2-\rho^2}}dX=\frac{d}{d\rho}\Bigg[\varphi(c)\ln(c+\sqrt{c^2-\rho^2})-\varphi(\rho)\ln\rho-$$
$$-\int\limits_\rho^c \varphi'(X)\ln(X+\sqrt{X^2-\rho^2})\,dX\Bigg]=-\frac{c\varphi(c)}{\rho\sqrt{c^2-\rho^2}}+\frac{1}{\rho}\int\limits_\rho^c \frac{X\varphi'(X)}{\sqrt{X^2-\rho^2}}dX.$$

Эту вторую форму операции мы применяем к тем членам в (29), которые содержат интегралы от обратных тригонометрических функций. Последние в результате дифференцирования по X переходят в алгебраические функции, и мы получаем

$$\frac{a_1(\rho)}{\sqrt{c^2-\rho^2}}=-\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^c \frac{\sigma_1(X)}{\sqrt{X^2-\rho^2}}dX-\frac{2}{\pi\rho}\iint\limits_{c>X_1>X>\rho}\frac{X\sqrt{c^2-X_1^2}\,\sigma_1(X_1)}{(c^2-X^2)\sqrt{(X_1^2-X^2)(X^2-\rho^2)}}\,dX\,dX_1-$$
$$-\frac{2}{\pi\rho}\iint\limits_{c>\rho_1>X>\rho}\frac{Xb(\rho_1)}{\sqrt{(c^2-\rho_1^2)(X^2-\rho^2)(\rho_1^2-X^2)}}\,dX\,d\rho_1.$$

В двойных интегралах интегрирование по X выполняется в элементарных функциях

$$\frac{a_1(\rho)}{\sqrt{c^2-\rho^2}}=-\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^c \frac{\sigma_1(X)}{\sqrt{X^2-\rho^2}}dX-\frac{1}{\rho\sqrt{c^2-\rho^2}}\int\limits_\rho^c \sigma_1(X)\,dX-\frac{1}{\rho}\int\limits_\rho^c \frac{b(\rho_1)}{\sqrt{c^2-\rho_1^2}}\,d\rho_1. \tag{30}$$

При дифференцируемой исходной функции $\sigma_1(X)$ $(0\leqslant X\leqslant c)$ непрерывна в том же интервале и $a_1(\rho)$. Особого рассмотрения при этом требует только случай $\rho=0$. Подставив выражение $b(\rho)$ из (28) в (30), получаем

$$\frac{a_1(\rho)}{\sqrt{c^2-\rho^2}} = -\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^c \frac{\sigma_1(X)}{\sqrt{X^2-\rho^2}}dX - \frac{\rho}{c\sqrt{c^2-\rho^2}(c+\sqrt{c^2-\rho^2})}\int\limits_\rho^c \sigma_1(X)\,dX +$$
$$+\frac{1}{c\rho}\int\limits_0^\rho \arcsin\frac{X}{\rho}\sqrt{\frac{c^2-\rho^2}{c^2-X^2}}\sigma_1(X)\,dX,$$

после чего непрерывность $a_1(\rho)$ при $\rho=0$ становится очевидной. Смысл найденного решения основного уравнения

$$\psi = tb(\rho)\sin\theta + \psi_1(\rho,\theta) \tag{31}$$

выясняется, если учесть, что накопление вековых членов происходит только в фазе движения, притом одинаково у всех частиц, движущихся по одной орбите. Таким образом, решение (31) соответствует такому перераспределению масс, при котором изменяются периоды обращения, но система в целом остается стационарной. Такие решения можно назвать «деформационными».

4. Перестановочные решения общего вида

Перестановка частиц в системе без изменения ее фазовой плотности возможна не только в пределах одной орбиты, но и между разными орбитами. Перестановка частиц не влияет, в частности, на общее гравитационное поле, так что уравнением движения каждой отдельной частицы остается уравнение гармонических колебаний

$$D^2\psi + \psi = 0. \tag{32}$$

Отделим переменное t:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\omega\psi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - 2i\omega\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - (\omega^2-1)\psi = 0.$$

Но последнее уравнение легко решается в общем виде:

$$\begin{cases}\psi = \left[A(\rho)e^{i(\omega+1)\theta} + B(\rho)e^{i(\omega-1)\theta}\right]e^{i\omega t},\\ \varphi = D\psi = i\left[-A(\rho)e^{i(\omega+1)\theta} + B(\rho)e^{i(\omega-1)\theta}\right]e^{i\omega t}.\end{cases} \tag{33}$$

Однозначность решения (33) обеспечена только при целочисленных ω. Наличие высших гармоник в данном случае связано с тем, что вдоль орбиты может укладываться произвольное число «волн» взаимных перестановок частиц, попеременно проходящих мимо какой-либо точки.

Но условие (32) еще не является достаточным, и требуется непосредственно проверить сохранение фазовой плотности вида (4). Вернемся к формулам (6) и приравняем отношение фазовых плотностей в исходной и преобразованной точке якобиану преобразования

$$\frac{d(z,w)}{d(z_0,w_0)} = \frac{f(z_0,w_0)}{f(z,w)}.$$

Отбрасывая малые величины высшего порядка, получаем

$$\cos t\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial w_0}\right) + \sin t\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} + \frac{\partial\psi}{\partial w_0}\right) = -\frac{(z_0\cos t + w_0\sin t)\psi + (-z_0\sin t + w_0\cos t)\varphi}{c^2 - z_0^2 - w_0^2}.$$

В переменных X и Y то же уравнение записывается проще:

$$(c^2 - X^2 - Y^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial X} + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right) + X\psi + Y\varphi = 0.$$

Перейдем, наконец, к переменным ρ и θ:

$$(c^2-\rho^2)\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\sin\theta\right] + \rho(\psi\cos\theta + \varphi\sin\theta) = 0.$$

Подставив решение (33), получаем связь между функциями $A(\rho)$ и $B(\rho)$:

$$(c^2-\rho^2)\left(\frac{dA}{d\rho} + \frac{dB}{d\rho}\right) + \frac{c^2}{\rho}\left[(\omega+1)A - (\omega-1)B\right] - \omega\rho(A-B) = 0. \tag{34}$$

Введем функцию $g = A + B$, через которую согласно (34) $A(\rho)$ и $B(\rho)$ выражаются в явном виде:

$$A = \frac{1}{2}\left[g - \frac{\rho g'}{\omega} - \frac{c^2 g}{\omega(c^2-\rho^2)}\right], \qquad B = \frac{1}{2}\left[g + \frac{\rho g'}{\omega} + \frac{c^2 g}{\omega(c^2-\rho^2)}\right]. \tag{35}$$

Особый случай $\omega = 0$ был уже отмечен в (22). Найдем еще граничные условия для функции g. Условие

$$g(c) = 0 \tag{36}$$

выражает в сущности неизменность внешней границы (10), но может быть усмотрено непосредственно из (35). Кроме того, значению $\rho = 0$ соответствует только одна исходная точка $z_0 = w_0 = 0$, поэтому ψ и φ при $\rho = 0$ не могут зависеть от θ. Для $\omega = 1$ это приводит к условию $A(0) = 0$, а для $\omega = -1$ – к условию $B(0) = 0$, но оба условия автоматически следуют из (35) при $\omega = \pm 1$. Напротив, при $|\omega| \neq 1$ получаем одновременно $A(0) = B(0) = 0$ и, следовательно, дополнительное условие имеет вид

$$g(0) = 0. \tag{37}$$

5. Истинные собственные колебания

При анализе решений основного уравнения (14), соответствующих колебаниям системы в целом, а не движению отдельных частиц, можно считать начальное смещение $\psi(X,Y,0)$ непрерывной функцией. С любой заданной точностью функцию $\psi(X,Y,0)$ можно аппроксимировать полиномами достаточно высокого порядка (теорема Вейерштрасса). Отметим следующий интересный факт: если ψ как функция от X и Y была при $t = 0$ полиномом степени N, то она останется полиномом той же степени во все моменты времени. Действительно, оператор D в силу своей структуры (12) не меняет степени полинома, а интегральный оператор в правой части (14) превращает член вида $X^m Y^n$ в нуль при n нечетном, тогда как при n четном получается следующий результат:

$$\frac{2X^m}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{c^2-X^2}} \frac{Y^n}{\sqrt{c^2-X^2-Y^2}}\,dY = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot n} X^m (c^2-X^2)^{n/2},$$

т.е. опять-таки полином степени $m+n$, что и доказывает требуемое утверждение. Более точно, уравнение (14) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно всех возможных коэффициентов (зависящих от t) общего полинома степени N. При этом, как легко видеть, эволюция совокупности старших членов сама по себе описывается замкнутой системой $N+1$ дифференциальных уравнений.

Случаи $N = 0$ и $N = 1$, играющие несколько особую роль, рассматриваются элементарно. При $N = 0$ получаются только тривиальные решения (23) и (25). При $N = 1$, кроме перестановочного решения (22) с $b(\rho) = \rho$ и деформационного решения $\psi = tY - 2X$, что соответствует в (26) и (31) $b(\rho) = \rho$, $\sigma_1(x) = -2x$, $a_1(\rho) = -2\rho$, получаем еще следующую пару комплексно сопряженных частных решений:

$$\psi = (\pm i\sqrt{3}\,X - 2Y)e^{\pm i\sqrt{3}\,t}. \tag{38}$$

Решения (38) соответствуют однородным пульсациям системы как целого, налагающимся на орбитальное движение частиц.

Переходя к произвольному значению N, воспользуемся опять полярными координатами в фазовой плоскости. Совокупность старших членов в полиноме ψ, которую будем обозначать через $\tilde\psi$, разлагается в тригонометрическую сумму

$$\tilde\psi = \rho^N \sum_k \alpha_k(t) e^{ik\theta}, \tag{39}$$

причем индекс k здесь, как и во всех дальнейших формулах, пробегает все значения от $-N$ до $+N$, одинаковые по четности с N. Подстановка (39) в левую часть (14) дает

$$D^2\tilde\psi + \tilde\psi = \rho^N \sum_k \left[\alpha_k''(t) - 2i\alpha_k'(t) - (k^2-1)\alpha_k(t)\right] e^{ik\theta}. \tag{40}$$

Обращаясь к правой части (14), надо освободиться от получающихся членов более низкой степени делением на ρ^N и переходом к пределу при $\rho\to\infty$. Так как $\rho e^{\pm i\theta}=X\pm iY$, то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{c^2-X^2}}^{\sqrt{c^2-X^2}}\frac{\tilde{\psi}}{\sqrt{c^2-X^2-Y^2}}dY=\frac{1}{\pi}\sum_k\alpha_k\int\limits_{-\sqrt{c^2-X^2}}^{\sqrt{c^2-X^2}}\frac{(X+iY)^{\frac{N+k}{2}}(X-iY)^{\frac{N-k}{2}}}{\sqrt{c^2-X^2-Y^2}}dY=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_k\alpha_k\int\limits_{-1}^{1}\frac{(X+iz\sqrt{c^2-X^2})^{\frac{N+k}{2}}(X-iz\sqrt{c^2-X^2})^{\frac{N-k}{2}}}{\sqrt{1-z^2}}dz.$$

Разделить на ρ^N – значит в данном выражении разделить подынтегральное выражение на X^N и ввести множитель $\cos^N\theta$. После предельного перехода $\rho\to\infty$ или $X\to\infty$ остается

$$\frac{\cos^N\theta}{\pi}\sum_k\alpha_k\int\limits_{-1}^{1}(1-z)^{\frac{N+k-1}{2}}(1+z)^{\frac{N-k-1}{2}}dz=\frac{\cos^N\theta}{N!}\sum_k\alpha_k(N+k-1)!!(N-k-1)!! \tag{41}$$

(символ $n!!$ по обычному определению обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и одинаковой с ним четности).

Сравнивая (40) и (41) и воспользовавшись известным разложением степени косинуса

$$\cos^N\theta=\sum_k\frac{N!}{(N+k)!!(N-k)!!}e^{ik\theta}, \tag{42}$$

получаем систему $N+1$ дифференциальных уравнений для функций α_k

$$\frac{d^2\alpha_k}{dt^2}-2ik\frac{d\alpha_k}{dt}-(k^2-1)\alpha_k=\frac{1}{(N+k)!!(N-k)!!}\sum_k(N+k-1)!!(N-k-1)!!\,\alpha_k \tag{43}$$

При нахождении собственных частот ω надо заменить $\frac{d}{dt}$ на $i\omega$. Обозначим значение суммы в правой части (43) через γ. Тогда из каждого уравнения (43) следует

$$\alpha_k=\frac{\gamma}{(N+k)!!(N-k)!![1-(\omega-k)^2]}$$

и поэтому

$$\sum_k\frac{(N+k-1)!!(N-k-1)!!}{(N+k)!!(N-k)!![1-(\omega-k)^2]}=1\qquad(N\geqslant1). \tag{44}$$

Для дальнейшего исследования удобно перейти к другой, эквивалентной форме характеристического уравнения

$$-\frac{[\omega^2-(N-2)^2][\omega^2-(N-4)^2]\dots\omega^2}{[\omega^2-(N+1)^2][\omega^2-(N-1)^2]\dots[\omega^2-1]}=1, \tag{45}$$

при четном N или же

$$-\frac{[\omega^2-(N-2)^2][\omega^2-(N-4)^2]\dots[\omega^2-1]}{[\omega^2-(N+1)^2][\omega^2-(N-1)^2]\dots[\omega^2-4]}=1 \tag{46}$$

при N нечетном. Для проверки тождества левых частей (44) и (45) следует отметить, что в (44) при четном N общий знаменатель равен

$$[\omega-(N+1)][\omega-(N-1)]\dots[\omega+(N+1)],$$

а это совпадает со знаменателем (45). Степень числителя в обоих случаях меньше степени знаменателя, поэтому остается проверить по обычным правилам совпадение разложений на элементарные дроби. В случае нечетного N вначале кажется, что общим знаменателем в (44) должно быть произведение

$$[\omega^2-(N+1)^2][\omega^2-(N-1)^2]\dots(\omega^2-4)\omega.$$

На самом деле элементарные дроби, знаменателем которых является ω, выпадают, так как они присутствуют лишь в членах суммы с $k=\pm1$:

$$\frac{1}{1-(\omega\pm1)^2}=\frac{1}{2}\left(\mp\frac{1}{\omega}+\frac{1}{2\pm\omega}\right)$$

и взаимно уничтожаются ввиду совпадения коэффициентов. Далее действуем, как в случае четного N.

Отделим все положительные корни характеристического уравнения. Обозначив левую часть (45) или (46) через $Q(\omega)$, получаем прежде всего

$$Q(N)=\frac{1}{2}\frac{(2N)!!}{(2N+1)!!}<\frac{1}{2},$$

а при $\omega=N\pm1$ функция Q, сохраняя положительный знак, обращается в бесконечность.

В области $0<\omega<N$ функция Q меняет знак каждый раз, когда ω равно натуральному числу, причем значение Q переходит при этом поочередно через нуль или бесконечность. На этом основании легко составить список всех интервалов с целочисленными концами, где должны находиться искомые корни

$(1{,}2), (3{,}4), \ldots, (N-1, N)$ и $(N, N+1)$, если N четное;

$(2{,}3), (4{,}5), \ldots, (N-1, N)$ и $(N, N+1)$, если N нечетное.

Если добавить еще соответствующие отрицательные корни, то вышеуказанным списком исчерпаны все корни характеристического уравнения, так как степень (45) или (46) относительно ω^2 после приведения к общему знаменателю равна $\left[\dfrac{N}{2}\right]+1$ ([ ] – символ целой части), что соответствует размеру списка.

Заметим, что все корни (45) или (46) иррациональны. Действительно, после уничтожения знаменателя все коэффициенты оказываются целочисленными, а коэффициент при старшем члене ω^{N+1} или ω^{N+2} равен единице. Рациональные корни уравнения такого типа могут быть только целочисленными, чего в данном случае нет. Далее, для классификации всех собственных частот будем пользоваться обозначением ω с двумя индексами, вторым из которых является N, а первый индекс j означает то из натуральных чисел, противоположных по четности N, которое ближе всего к данному положительному значению ω. Из предыдущего ясно, что при заданном $N\geqslant2$ индекс j принимает значения $1{,}3{,}5,\ldots,N+1$, если N четное, и $2{,}4{,}6,\ldots,N+1$, если N нечетное. Включим еще полученное для $N=1$ значение $\omega=\sqrt{3}$ с $j=2$. Объединение всех значений ω с одним и тем же j, но разными N будем называть серией. Легко видеть, что второй индекс членов серии принимает значения $N=j-1, j+1, j+3, j+5, \ldots$, причем для первого члена

$$j-1<\omega_{j,j-1}<j, \tag{47}$$

а для всех остальных

$$j<\omega_{jN}<j+1 \qquad (N\geqslant j+1) \tag{48}$$

Исключение составляет первая серия в том отношении, что для нее член типа $\omega_{j,j-1}$ выпадает и она начинается со значения $\omega_{12}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}=1{,}071\ldots$ Вторая и третья серии начинаются по общему правилу с $\omega_{21}=\sqrt{3}=1{,}732\ldots$ и $\omega_{32}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}=2{,}803\ldots$ Докажем еще некоторые неравенства, уточняющие (47) и (48). Будем снабжать функции $Q(\omega)$ для отличия нижним индексом N. При увеличении N на два в левую часть (45) или (46) прибавляется множитель, меньший единицы по абсолютной величине. Но из $|Q_{N+2}(\omega_{jN})|\leqslant|Q_N(\omega_{jN})|=1$ и $Q_N(j)=\infty$ следует

$$\omega_{jN}\geqslant\omega_{j,N+2} \qquad (N=j+1, j+3, \ldots). \tag{49}$$

Кроме того, при любом фиксированном ω из интервала $(j, j+1)$

$$\frac{Q_{N+2}(\omega)}{Q_N(\omega)}=\frac{N^2-\omega^2}{(N+3)^2-\omega^2}<\left(\frac{N}{N+2}\right)^2 \qquad (N\geqslant j+1),$$

так что

$$|Q_N(\omega)|<|Q_{j+1}(\omega)|\left(\frac{j+1}{j+3}\right)^2\left(\frac{j+3}{j+5}\right)^2\cdots\left(\frac{N-2}{N}\right)^2=\frac{|Q_{j+1}(\omega)|(j+1)^2}{N^2}$$

и $\lim\limits_{N\to\infty} Q_N(\omega)=0$, откуда следует
$$\lim_{N\to\infty}\omega_{jN}=j. \tag{50}$$
Далее, путем некоторой перегруппировки сомножителей из (45) и (46) следует
$$\frac{Q_{N+1}(\omega+1)}{Q_N(\omega}=\frac{(\omega+1)(\omega+N)}{\omega(\omega+N+3)}$$
и при $\omega>\dfrac{N}{2}$
$$|Q_N(\omega+1)|<|Q_N(\omega)|. \tag{51}$$
Применим (51) для сравнения первых членов серий с $j=2,3,4,\ldots$ В этом случае $N=j-1$ и рассматривается интервал $N<\omega<N+1$, так что неравенство (51) справедливо и дает нам
$$|Q_j(\omega_{j,j-1}+1)|<|Q_{j-1}(\omega_{j,j-1})|=1,$$
а с учетом $Q_j(j+1)=\infty$ получается
$$\omega_{j+1,j}>\omega_{j,j-1}+1 \qquad (j\geqslant 2). \tag{52}$$
Аналогично (51) можно применить для $N=j+1$, где $j=1,2,3,\ldots$ в интервале $N-1<\omega<N$:
$$|Q_{j+2}(\omega_{j,j+1}+1)|<|Q_{j+1}(\omega_{j,j+1})|=1,$$
и так как $Q_{j+2}(j+1)=\infty$, то для вторых членов серии получаем
$$\omega_{j+1,j+2}<\omega_{j,j+1} \qquad (j\geqslant 1) \tag{53}$$
Выше мы видели, что $\omega_{21}>\omega_{12}$. Применяя (52) и (53), по индукции получаем
$$\omega_{j+1,j}>\omega_{j,j+1}+1 \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{54}$$
Если неравенства (47), (48) и (49) показывают отсутствие совпадающих членов в пределах одной серии, то (54) означает, что сами соседние серии также взаимно не перекрываются.

Способ вывода характеристического уравнения (45) или (46) перестает быть справедливым только для целочисленных ω. Но решения основного уравнения, соответствующие целочисленным собственным частотам, мы уже изучали отдельно в предыдущих пунктах. Распределим эти уравнения сообразно их формальной степени $N\geqslant 2$. В (33), чтобы получить полином данной степени, можно брать ω равным целым числам в пределах $-(N-1)\leqslant\omega\leqslant(N-1)$, противоположным по четности N, кроме $\omega=0$. Соответственно в (35) возьмем $g=\rho^{N-2}(c^2-\rho^2)$, что удовлетворяет граничным условиям (36) и (37), кроме случая $N=2$, $\omega=\pm1$, когда (37) не является необходимым условием. В раскрытом виде
$$A=\frac{c^2}{2}\left(1-\frac{N-1}{\omega}\right)\rho^{N-2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{N}{\omega}\right)\rho^N,$$
$$B=\frac{c^2}{2}\left(1+\frac{N-1}{\omega}\right)\rho^{N-2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{N}{\omega}\right)\rho^N,$$
и ψ легко выразить через X и Y:
$$\psi=\frac{e^{i\omega t}}{2}\left[-\left(1+\frac{N}{\omega}\right)S^{\frac{N+\omega+1}{2}}S_1^{\frac{N-\omega-1}{2}}-\left(1-\frac{N}{\omega}\right)S^{\frac{N+\omega-1}{2}}S_1^{\frac{N-\omega+1}{2}}+\right.$$
$$\left.+c^2\left(1-\frac{N-1}{\omega}\right)S^{\frac{N+\omega-1}{2}}S_1^{\frac{N-\omega-3}{2}}+c^2\left(1+\frac{N-1}{\omega}\right)S^{\frac{N+\omega-3}{2}}S_1^{\frac{N-\omega-1}{2}}\right],$$
$$S=X+iY, \qquad S_1=X-iY$$
Всего таким путем находим $2\left[\frac{N}{2}\right]$ решений, что вместе с $2\left[\frac{N}{2}\right]+2$ истинными колебаниями (считая частоты $+\omega$ и $-\omega$ отдельно) дает для четного N требуемые согласно суммарному порядку системы (43) $2N+2$, а для нечетного N остается найти еще два решения. Последние соответствуют $\omega=0$. Одно получается из (22) при $b(\rho)=0$. Точно так же для деформационного решения (31) берем $b(\rho)=\rho^N$ и получаем из (28)
$$\sigma_1(x)=-\frac{(N+1)!!}{N!!}x^N$$

Пользуясь (42), значение интеграла в правой части (26) можно представить в виде линейной комбинации членов типа

$$\rho^N \int\limits_0^\theta \cos k\theta_1 \sin(\theta-\theta_1)\, d\theta_1 = \rho^N \frac{\cos\theta - \cos k\theta}{k^2-1} \qquad (k=3{,}5,\dots,N).$$

При $k=1$ появляется апериодический член

$$\rho^N \int\limits_0^\theta \cos\theta_1 \sin(\theta-\theta_1)\, d\theta_1 = \frac{1}{2}\rho^N \theta \sin\theta,$$

но после учета коэффициента он уничтожается членом $b(\rho)\theta\sin\theta$ в (26). Итак, совокупность первых двух слагаемых в правой части (26) имеет вид (39). Точное выражение функции $a_1(\rho)$ нам не понадобится. Достаточно заметить, что из (30) она определяется как полином степени N, содержащий только нечетные степени ρ. Очевидно, что и все решение (31) является полиномом относительно X и Y степени N.

Вышеприведенные подсчеты гарантируют, что нами найдена полная система решений основного уравнения. Остается заметить, что на основании старших членов полиномиального решения можно определить и все остальные, причем в них не появляется никаких «вековых» членов. Для перестановочных и деформационных решений возможность такого доопределения (не единственного) следует из самого способа построения. Для истинных же колебаний можно определить последовательно совокупность членов степени $n=N, N-2, N-4$ и т.д. до $n=1$ или 2 (другие степени не появляются).

Действительно, если в выражении $\psi(X,Y)$ степени N рассмотреть отдельно члены степени $n<N$, то их можно представить аналогично (39), но с заменой N на n, а коэффициенты будут удовлетворять системе уравнений типа (43) также с заменой N на n и с некоторыми свободными членами, зависящими от уже определенных членов $\psi(X,Y)$ более высокой степени. Но характеристические показатели такой системы дифференциальных уравнений равны либо целым числам, либо одному из чисел ω_{jn}, тогда как свободные члены зависят от t только посредством множителя $\exp(i\omega_{jN}t)$ при некотором j. Так как собственные частоты ω_{jn} не совпадают ни между собой, ни с целыми числами, то никаких резонансов нет и ψ пропорционально $\exp(i\omega_{jN}t)$.

Согласно нашей прежней классификации, серии собственных частот с четным номером j дают только симметричные решения, а с нечетным номером – антисимметричные. Перестановочные решения симметричны или антисимметричны смотря по тому, является ли ω четным или нечетным числом. Деформационные решения, очевидно, всегда симметричны.

Соотношение (50) можно интерпретировать как исчезновение различия при больших N между решением, описывающим колебания системы как целого, и близким к нему перестановочным решением. Действительно, с ростом N усложняется зависимость характера колебаний при переходе от одной орбиты к другой, и если выделить в этом смысле быстропеременные в фазовом пространстве колебания (нечто аналогичное высшим гармоникам струны), то изменения общего гравитационного поля, вызываемые смещениями частиц на близких орбитах, почти нейтрализуют друг друга. Но тогда дело сводится к колебаниям отдельных частиц в стационарном поле. Номер серии j играет, по-видимому, роль волнового числа вдоль орбиты.

Кстати сказать, с ростом j согласно (52) и (53) также наблюдается стягивание всей серии к перестановочному решению.

6. Обсуждение результатов

Характерным свойством фазовой плотности (4) как функции скорости является наличие минимума, а если аргументом считать значение интеграла энергии E, то изменение знака производной по сравнению с нормальным поведением

$$\frac{df}{dE} < 0. \tag{55}$$

Условие (55)играет важную роль в нашем предыдущем анализе, поскольку на него существенно опирается вывод критерия устойчивости. Аналогичное положение в расчетах Линден-Белла [10].

Рассматривая динамику звездных систем как гидродинамику в фазовом пространстве, можно думать, что нарушение условия (55) равносильно помещению слоя тяжелой жидкости поверх легкой. В гидродинамике подобная инверсия, в частности, влечет за собой неустойчивость равновесного состояния. Указанная аналогия обсуждалась в литературе [17] и проверялась также численными экспериментами, которые, действительно, показали стремление более тяжелой фазовой «жидкости» собраться в центре, если вначале она располагалась на периферии системы [6].

Точный расчет, проведенный в настоящей статье, неожиданно опровергает эти наводящие рассуждения: система оказалась все-таки устойчивой, по крайней мере в линейном приближении. Более того, она останется устойчивой и при некотором дальнейшем углублении минимума, так как не имеет таких собственных колебаний, которые могли бы стать неустойчивыми при бесконечно-малом изменении параметров. Остается заключить, что само по себе наличие минимума фазовой плотности недостаточно для создания неустойчивости; напротив, минимум должен быть достаточно глубоким и широким. Иными словами, он должен разделять диаграмму скоростей на достаточно узкие разобщенные друг от друга потоки. Предельно узкие (по величине скорости) потоки неустойчивы каждый сам по себе в смысле неустойчивости Джинса, хотя этим не отвергается возможность неустойчивости за счет взаимодействия потоков. В упомянутых численных экспериментах [6] испытуемая система, действительно, была составлена из довольно узких потоков с резкими границами. В нашем выражении (4) хотя и намечаются два потока вблизи $w = \pm\sqrt{c^2 - z^2}$, но они соединены плавным переходом.

Как изменится вид спектра, если немного изменить фазовую плотность по сравнению с (4), отказавшись тем самым от условия синхронизма орбитальных движений? При этом следует ожидать, что между дискретными собственными колебаниями вклинятся участки непрерывного спектра. Здесь действует та же причина появления непрерывного спектра, что и в обстоятельно изученном случае однородной плазмы с непрерывным распределением скоростей [18], а именно наличие таких частиц, которые движутся в фазе с распространением волны. Так как в нашем случае резонанс может происходить и на высших гармониках орбитального движения частиц, когда различия в периодах обращения на разных орбитах сказываются особенно сильно, то, надо полагать, с ростом ω участки непрерывного спектра будут становиться все шире, пока не сольются в сплошной континуум. Заметим, что само по себе появление непрерывного спектра не опасно для устойчивости системы. Скорее, оно может рассматриваться как стабилизирующий фактор, поскольку различие периодов обращения благоприятно для рассасывания гравитационных конденсаций.

1. *Eggen O.F., Lynden-Bell D., Sandage A.R.* // Astrophys. J. – 1962. – **136**. – P. 748.
2. *Hénon M.* // Bull. Astron. – 1968. – **3**. – P. 241.
3. *von Hoerner S.* // Zs. Astrophys. – 1963. – **57**. – P. 47.
4. *Aarseth S.J.* // Astrophys. Norveg. – 1965. – **9**. – P. 313.
5. *Hockney R.W., Hohl F.* // Astron. J. – 1969. – **74**. – P. 1102.
6. *Hohl F., Campbell J.W.* // Astron. J. – 1968. – **73**. – P. 611.
7. *Огородников К.Ф.* Динамика звездных систем. – М.: Физматгиз, 1958.
8. *Антонов В.А.* // Астрон. ж. – 1960. – **37**. – С. 918.
9. *Антонов В.А.* // Вестник ЛГУ. – 1962. – № 7. – С. 135.
10. *Lynden-Bell D.* // Intern. Astron. Union. Symp. – 1966. – № 25. – P. 78.
11. *Hénon M.* // Ann. Astrophys. – 1960. – **23**. – P. 459.

12. *Lynden-Bell D., Sanitt N.* // MN RAS. – 1969. – **143**. – P. 167.

13. *Субботин М.Ф.* Курс небесной механиики. Т.3. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.

14. *Toomre A.* // Astrophys. J. – 1964. – **139**. – P. 1217.

15. *Cohen L., Lecar M.* // Bull. Astron. – 1968. – **3**. – P. 213.

16. *Hohl F., Feix M.D.* // Astrophys. J. – 1967. – **147**. – P. 1164.

17. *Hohl F., Feix M.D.* // Astrophys. J. – 1968. – **151**, №2, pt. 1. – P. 783.

18. *Кадомцев Б.Б.* // Успехи физических наук. – 1968. – **95**. – С. 111.

Комментарий. Положение с устойчивостью сферических политропных моделей с изотропным распределением скоростей после ряда дискуссий можно с современной точки зрения резюмировать следующим образом в зависимости от индекса политропы n:

а) $0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}$. Фазовую модель с нужными свойствами построить нельзя.

б) $\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$. Фазовая модель существует, но с инвертированным распределением скоростей. Впрочем, как соображения данной статьи, так и недавние попытки анализа таких моделей у Y.Sobouti (основанные на других идеях и относящиеся прямо к сферическим системам), видимо, указывают, что неустойчивость в упомянутом диапазоне значений n может быть весьма слабой или иногда вообще отсутствовать.

в) $\frac{3}{2} \leqslant n < 3$. Работает гидродинамическая аналогия, система устойчива.

г) $n \geqslant 3$. Изображающий газовый шар был бы неустойчив, но устойчива звездная система при ее кинетическом рассмотрении.

Основные выводы были сделаны в [9], но с лишней громоздкостью и логическим несовершенством в ряде мест. Более строгое и тщательно исследование составляет заслугу ряда авторов: Хазин и Шноль, Lynden-Bell, Mark, Doremus и др. Область гарантируемой устойчивости удается рассмотреть в сравнении с (1).

Вернемся к главной теме статьи – к проблеме колебаний одномерной системы. Несколько позже оказалось, что точную форму собственных колебаний все-таки можно найти. Восполним этот пробел, опираясь, главным образом, на работы A.G.Kalnajs и В.Л.Поляченко. Ищем функцию ψ в виде

$$\psi = \int\limits_0^{2\pi} R(\tau) P_N \left(\frac{X\cos\tau + Y\sin\tau}{c} \right) d\tau,$$

где P_n – символ полинома Лежандра, а периодическая функция $R(\tau)$ подлежит определению. При подстановке в (14) наиболее трудным моментом является вычисление интеграла

$$T(\tau) = \int\limits_{-\sqrt{c^2-X^2}}^{\sqrt{c^2-X^2}} \frac{P_N\left(\dfrac{X\cos\tau + Y\sin\tau}{c}\right)}{\sqrt{c^2 - X^2 - Y^2}} dY$$

Введем условную сферу единичного радиуса. Полярный угол ξ и азимут λ на ней соотнесем с X и Y, как с декартовыми координатами, обычными формулами

$$X = c\cos\xi, \qquad Y = c\sin\xi\cos\lambda$$

При фиксированном X также постоянно ξ и мы имеем

$$dY = -c\sin\xi\sin\lambda\, d\lambda, \qquad \frac{dY}{\sqrt{c^2 - X^2 - Y^2}} = -d\lambda \quad (0 < \lambda < \pi)$$

Интеграл по λ получается, с учетом изменения знака у $d\lambda$, от 0 до π, но формально удобнее брать его по целой окружности с коэффициентом 1/2. С другой стороны, по известной формуле поворота для сферических функций

$$P_N(\cos\tau\cos\xi + \sin\tau\sin\xi\cos\lambda) = P_N(\cos\tau)P_N(\cos\xi) + 2\sum_{m=1}^{N} \frac{(N-m)!}{(N+m)!} P_N^m(\cos\tau) P_N^m(\cos\xi)\cos m\lambda.$$

При интегрировании все члены суммы пропадают за счет множителей $\cos m\lambda$ и остается

$$T(\tau) = \pi P_N\left(\frac{X}{c}\right) P_N(\cos\tau).$$

В левой же части (14) в соответствии с определением оператора D в (12)

$$D\psi = \int_0^{2\pi} \left[i\omega P_N \left(\frac{X\cos\tau + Y\sin\tau}{c} \right) + \frac{Y\cos\tau - X\sin\tau}{c} P_N' \left(\frac{X\cos\tau + Y\sin\tau}{c} \right) \right] R(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[i\omega R(\tau) - R'(\tau) \right] P_N \left(\frac{X\cos\tau + Y\sin\tau}{c} \right) d\tau + \left[R(2\pi) - R(0) \right] P_N \left(\frac{X}{c} \right)$$

$$D^2\psi = \int_0^{2\pi} \left[R''(\tau) - 2i\omega R'(\tau) - \omega^2 R(\tau) \right] P_N \left(\frac{X\cos\tau + Y\sin\tau}{c} \right) d\tau +$$

$$+ \frac{Y}{c} \left[R(2\pi) - R(0) \right] P_N' \left(\frac{X}{c} \right) + \left[i\omega \left(R(2\pi) - R(0) \right) - R'(2\pi) + R'(0) \right] P_N \left(\frac{X}{c} \right).$$

Таким образом, все согласуется, если принято $R(\tau) = e^{i\omega\tau} \sin\tau$ и удовлетворяется уравнение

$$-1 + e^{2\pi i\omega} + \int_0^{2\pi} P_N(\cos\tau) e^{i\omega\tau} \sin\tau\, d\tau = 0,$$

совпадающее после разложения $P_N(\cos\tau)$ в тригонометрический полином с нашим (44). Множитель же $P_N\left(\frac{X}{c}\right)$ сокращается. Он, по смыслу вывода (14), представляет закон изменения с z возмущения напряженности гравитационного поля. Одинаковость этого закона $\sim P_N\left(\frac{z}{c}\right)$ для всех возмущений с фиксированным N и, соответственно, закона приращения пространственной плотности не вносит противоречия: за счет различия частот ω фазовые отклики все же различаются.

Близкий ход рассуждений удавалось применить к другим пространственно однородным моделям, точнее, там, где исходный потенциал выражается квадратичной формой относительно декартовых координат. В ряде случаев получается точная форма собственных колебаний, но иногда приходится довольствоваться сравнением старших членов возмущения, чего достаточно для определения частот.

Преодолевать трудности, связанные с сингулярностями начального состояния, можно и другим путем: в выражение фазовой плотности, кроме непосредственной зависимости от координат и скоростей, вставляют как промежуточную функцию левую часть уравнения фазовой границы (у нас это (10)) и подвергают эту функцию линеаризации после составления уравнения Больцмана. Такой прием используется, в частности, в работах А.Г.Морозова и др. для эллипсоидальной модели. Но метод малых смещений, примененный в настоящей статье, представляется нам более систематическим и теснее связанным с традициями аналитической динамики.

Вопрос с различными тривиальными модами, которым уделено большое место в данной статье, нельзя считать совсем уж простым. Иногда, особенно при работе методом малого параметра, какую-нибудь тривиальную моду при недостатке внимания можно принять за истинное колебание (или наоборот).

Кстати, в теории плазмы точно такое же инвертированное распределение скоростей

$$f = \frac{\gamma}{\sqrt{w^{+2} - w^2}} \qquad (\gamma, w^+ = \mathrm{const})$$

было известно как критическое для однородной среды без магнитного поля: уже малого дальнейшего углубления минимума f достаточно для развития пучковой неустойчивости.

Заметим, что в большинстве работ порядком возмущения гравитирующей системы считают степень полинома, изображающего потенциал, т.е. величину $N+1$ в терминах настоящей статьи.

Поступила в редакцию 16.12.2002