Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 6 – 13

УДК 524.7

Энергия колебаний консервативных систем с внутренними течениями

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

Исследуются самогравитирующие консервативные системы с внутренними течениями вещества. Проведен анализ знака энергии колебаний и проанализированы критерии устойчивости вращающихся систем.

ЕНЕРГІЯ КОЛИВАНЬ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ З ВНУТРІШНІМИ ТЕЧІЯМИ, Антонов В.А.— Досліджуютьса самогравітуючі консервативні системи з внутрішніми течіями речовини. Проведено аналіз знаку енергії коливань та проаналізовано критерій стійкості систем, що обертаються.

AN ENERGY OF OSCILLATIONS OF CONSERVATIVE SYSTEMS WITH INTERNAL FLOWS, by Antonov V.A.— Self-gravitating conservative systems having internal flows are investigated. The sign of energy of oscillations and stability criterium of rotating systems are analyzed.

1. Введение

Вопрос о малых колебаниях консервативных систем около положения равновесия за редкими исключениями сводится к анализу систем линейных канонических уравнений соответственно с квадратичным гамильтонианом

$$H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}A_{ij}q_iq_j+B_{ij}q_ip_j+\frac{1}{2}C_{ij}p_ip_j\right). \tag{1}$$

В (1) $q_1,q_2,\dots,q_n$ и $p_1,p_2,\dots,p_n$ – обобщенные координаты и импульсы, n – число степеней свободы. Без ограничения общности далее можно пользоваться условием симметрии,

$$A_{ij}=A_{ji},\qquad C_{ij}=C_{ji} \tag{2}$$

Величина H трактуется как избыток энергии колеблющейся системы над энергией стационарного состояния. (Последняя для нас не представляет большого интереса). Третья группа членов в (1) образует кинетическую энергию, представляющую обычно собой, как мы и считаем в дальнейшем, положительно определенную форму. Совокупность первых членов правой части (1) дает тогда потенциальную энергию, а члены с B_{ij} ответственны за гироскопические силы в обобщенном смысле слова.

Когда стационарное состояние есть просто неподвижность, а гироскопические силы отсутствуют, получается известная проблема устойчивости равновесия, давно и подробно освещенная в литературе [1]. В астрономии сюда относится равновесное состояние невращающихся звезд и планет [2,3]. Однако очень распространены и такие системы, в которых под внешней стационарностью оказываются циркулирующие струи вещества или взаимопроникающие потоки звезд и других дискретных частиц. Тогда уже, вообще говоря, вступают в действие гироскопические силы.

В результате решения уравнений малых колебаний

$$\frac{dp_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\left(A_{ij}q_j+B_{ij}p_j\right),\qquad \frac{dq_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(B_{ji}q_j+C_{ij}p_j\right) \tag{3}$$

мы получаем $2n$ собственных значений $\lambda^{(\nu)}$ с соответствующими собственными векторами $(q_i^{(\nu)}, p_i^{(\nu)})$. Произвольное возмущение разлагается по ним:

$$q_i = \sum_{\nu=1}^{2n} \xi_\nu q_i^{(\nu)} e^{\lambda^{(\nu)} t}, \qquad p_i = \sum_{\nu=1}^{2n} \xi_\nu p_i^{(\nu)} e^{\lambda^{(\nu)} t} \tag{4}$$

При подстановке (4) в (1), ввиду инвариантности H, могут остаться только те члены, в которых происходит компенсация экспонент от собственных векторов с противоположными λ:

$$e^{\lambda^{(\nu)} t} \cdot e^{-\lambda^{(\nu)} t} = 1$$

Такая группировка значений λ в пáры по теории Ляпунова имеет место для любой линейной канонической системы (3). Напротив, так называемые присоединенные векторы (для которых зависимость от t в (4) не чисто экспоненциальная, а содержит отдельно степени t^k, $k \geqslant 1$) не дает никакого вклада в H из-за неуничтожимости степенных множителей. Получаем

$$H = \sum_\nu \rho_\nu \xi_\nu \xi_{-\nu}, \tag{5}$$

где для некоторой ясности обозначений мы приписываем номера ν и $-\nu$ собственным значениями λ и $-\lambda$. Если λ вещественное ($\lambda \neq 0$) или собственно комплексное $\lambda = \alpha + i\beta$ (здесь i – мнимая единица, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), коэффициент ρ_ν мы можем менять по своему усмотрению, изменяя нормировку собственных функций. Только при чисто мнимом $\lambda = i\omega$ для перехода от обсуждавшейся до сих пор комплексной записи (5) к вещественной мы должны положить ξ_ν и $\xi_{-\nu}$ комплексно сопряженными величинами. Тогда при изменении нормировки также комплексно сопряженными множителями знак ρ_ν инвариантен. Соответствующую группу членов в (5) можно переписать в виде

$$H = \sum_\nu \rho_\nu |\xi_\nu|^2 + \ldots, \tag{6}$$

где ρ_ν вещественны, а обращенные члены соответствуют модам с $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. Мы, правда, молчаливо предполагали отсутствие кратных λ, но и при любой кратности собственного значения $\lambda = i\omega$ ему отвечает в (6) вместо одного $|\xi_\nu|^2$ более общая эрмитова форма из коэффициентов ξ, которая, однако, по известным правилам может быть сведена к сумме разных $|\xi|^2$ с некоторыми дополнительными коэффициентами ρ. Итак, кратность не меняет дела.

Встает вопрос о знаках ρ_ν в (6), т.е. по существу вопрос о знаке энергии того или иного колебания.

2. Способ определения знака энергии колебаний у гравитирующих тел

Прямые расчеты энергии возмущения могут оказаться сложными по двум причинам. Во-первых, эта энергия квадратична по амплитуде возмущения, и одно это уже требует большой точности вычислений. Во-вторых, обычные уравнения гидродинамики и звездной динамики не имеют канонического вида и приведение к нему достигается либо введением избыточных степеней свободы для различения отдельных частиц, либо отсеиванием тех нейтральных мод, которые соответствуют «динамически недопустимым» возмущениям. Однако для гравитирующих систем можно действовать достаточно удобным косвенным путем.

Используем воображаемую ситуацию, когда на каждую звезду или другую частицу действует «отставший потенциал» $U(x, y, z, t - \delta)$ с некоторым малым положительным δ. Движение остается динамически допустимым: на частицу действует потенциальное поле, хотя и не самосогласованное. Стационарное состояние, очевидно, не меняется, но возмущение будет эволюционировать по какому-то другому закону. Обычное уравнение Больцмана заменится на

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v}\ \mathrm{grad}\, f - \mathrm{grad}\left(U - \delta \frac{\partial U}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{grad}_v\, f.$$

Полная энергия системы

(7)

(m – масса отдельной звезды, $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{v}$ – элементы обычного пространства и пространства скоростей), следовательно, будет эволюционировать по закону

$$\frac{\partial E}{\partial t} = m \iint \left(\frac{v^2}{2} - U\right) \frac{\partial f}{\partial t}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v} = \delta \cdot m \iint \frac{v^2}{2} \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial t} \operatorname{grad}_v f\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v},$$

поскольку при $\delta = 0$ энергия сохранялась бы точно. Интегрирование по частям с учетом ограниченности системы в пространстве скоростей дает

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\delta m \iint \mathbf{v} f \operatorname{grad} \frac{dU}{dt} d\mathbf{r}\, d\mathbf{v} = -\delta \int \mathbf{j} \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial t} d\mathbf{r}, \tag{8}$$

где $\mathbf{j}$ – поток массы. К той же формуле (8) приводит и гидродинамическая модель. Далее преобразуем интегралы уже в физическом пространстве

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \delta \int \frac{\partial U}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{j}\, d\mathbf{r} = -\delta \iint \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathbf{r} = -\frac{\delta}{2\pi G} \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} U\right) d\mathbf{r} \leqslant 0 \tag{9}$$

(G – гравитационная постоянная). Таким образом, энергия уменьшается.

Подойдем теперь к такой модифицированной модели с несколько другой стороны. Вернувшись к комплексной форме записи, допустим, что возмущение пропорционально $e^{i\omega t}$, тогда все отличие от нормальной модели состоит в умножении потенциала на коэффициент $e^{-i\omega\delta} \approx 1 - i\omega\delta$

Формально того же эффекта можно добиться, заменив гравитационную постоянную

$$G \to G(1 - i\omega\delta) \tag{10}$$

Допустим, что уже было написано дисперсионное уравнение. Как правило, оно получается в виде

$$4\pi G \tilde{\rho}(\omega) = -\Delta U_0, \tag{11}$$

где U_0 – некоторый пробный потенциал, задаваемый в начале расчета, а $\tilde{\rho}$ – возмущение плотности с этим пробным потенциалом в тот же момент t. Замена (10) превратит (11) в уравнение

$$4\pi G \tilde{\rho}(\omega) = -(1 + i\omega\delta)\Delta U_0,$$

откуда получается поправка $\bar{\omega}$ для частоты в фиктивном, модифицированном процессе

$$\bar{\omega} = -\frac{i\omega\delta \cdot \Delta U_0}{4\pi G \frac{d\tilde{\rho}}{d\omega}} = \frac{i\omega\delta \cdot \tilde{\rho}(\omega)}{\frac{d\tilde{\rho}}{d\omega}}$$

Теперь при положительной энергии колебаний в силу (9) данная мода должна затухать в фиктивном процессе, $\operatorname{Im} \bar{\omega} > 0$. Сравнение с предыдущей формулой показывает, что указанная энергия положительна при

$$\frac{\frac{d\tilde{\rho}}{d\omega}}{\omega\tilde{\rho}} > 0 \tag{12}$$

и отрицательна в противном случае

3. Примеры

1. Простой пример дают колебания тонкого газового слоя в своей плоскости (частный случай теории, резюмированной, например, в [4]). Пусть σ – стационарная двумерная плотность, c – скорость звука, Ω – угловая скорость вращения. При наложении пробного потенциала

$$U_0 = \varepsilon e^{i\omega t - ikx} \qquad (k > 0) \tag{13}$$

отклик системы выражается как появление дополнительной плотности

$$\tilde{\sigma} = -\frac{k^2\sigma}{\omega^2 - 4\Omega^2 - k^2c^2} \varepsilon e^{-ikx}$$

Дисперсионное уравнение несколько отличается от (11) размерностью (что несущественно для нашей темы). Именно

$$\frac{2\pi G}{k} \tilde{\sigma} = U_0, \tag{14}$$

откуда следует известное соотношение

$$\omega^2 = 4\Omega^2 + k^2c^2 - 2\pi Gk\sigma. \tag{15}$$

В левой части (12) стоит

$$-\frac{2}{\omega^2 - 4\Omega^2 - k^2c^2} = \frac{1}{\pi Gk\sigma} > 0$$

и энергия колебания оказывается положительной для всех вещественных ω.

2. Рассмотрим еще кинетическую плоскую модель без вращения. Достаточно учитывать скорости u параллельно волновому вектору с функцией распределения (ненормированной $f(u)$). Тогда

$$\sigma = m\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du, \tag{16}$$

где m – масса отдельной звезды. Конкретно берем двухпотоковую модель:

$$f = f_0\left(=\frac{\sigma}{4ma}\right) \qquad \text{при } b-a < |u| < b+a \quad (b > a > 0)$$

$f = 0$ в остальной области.

Общая формула [5] для возмущения плотности при потенциале (13)

$$\tilde{\sigma} = km\varepsilon e^{i\omega t - ikx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{df}{du}}{ku-\omega}du$$

для данной модели дает

$$\tilde{\sigma} = 2mf_0k^2\left[\frac{b-a}{\omega^2 - k^2(b-a)^2} - \frac{b+a}{\omega^2 - k^2(b+a)^2}\right]\varepsilon e^{-ikx},$$

а в сочетании опять с (14) получается дисперсионное уравнение

$$2kf_0\left[\frac{b-a}{\xi - k^2(b-a)^2} - \frac{b+a}{\xi - k^2(b+a)^2}\right] = \frac{1}{2\pi mG} \qquad (\xi = \omega^2) \tag{17}$$

Главной чертой графика его левой части относительно переменной ξ является U – образный ход в интервале $k^2(b-a)^2 < \xi < k^2(b+a)^2$. На этом основании легко видеть, что критерием устойчивости оказывается

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} > \sqrt{\frac{\pi G\sigma}{bk}}. \tag{18}$$

При условии (18) получаются два положительных корня для ξ: больший, если иметь ввиду (12), соответствует возмущению с положительной энергией, а меньший – возмущению с отрицательной энергией. для более простой модели с одним потоком ($b = a$) остается только колебание с положительной энергией, если система вообще устойчива.

3. Для однородного слоя [6] из уравнения (45) или (45а) цитируемой статьи ясно, что все ветви графика левой части пересекают ось ξ в одну и ту же сторону, причем это соответствует колебаниям с положительной энергией.

4. Напротив, для кинетической модели дифференциально вращающейся кольцевой структуры [7] всегда положительна только энергия автомодельного сжатия-расширения ($n = 2$), но для высших мод это может быть и не так. При $n = 3$ мода с отрицательной энергией возникает, в силу (47) цитируемой статьи, вблизи $\omega = 2$, если $l^2 > \frac{1}{2}$, т.е. при достаточном размахе радиальных движений.

5. Для шара Эйнштейна взгляд на рис.14 и 15 монографии [8] показывает наличие ветвей противоположных направлений. Корни для ω, отвечающие отрицательной энергии колебаний, надо искать в обоих случаях в левой части графика. Такие корни появляются при $l \geqslant 2$ для объемных и при $l \geqslant 3$ для поверхностных колебаний (l здесь – порядок сферической гармоники, которой пропорционально возмущение потенциала).

6. Свободное вращение твердого тела, хотя самогравитация здесь и выключается, также дает полезный пример использования энергетических соотношений [9]. Если моменты инерции тела отно-

сительно трех главных осей, отождествляемых с координатными осями, обозначить через A, B, C, а соответствующие компоненты угловой скорости через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, то обнаруживается два хорошо известных инварианта: энергия (чисто кинетическая)

$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\right)$$

и квадрат момента

$$K^2 = (A\omega_x)^2 + (B\omega_y)^2 + (C\omega_z)^2.$$

Как показывают уравнения Эйлера, стационарное вращение возможно только вокруг любой из главных осей. Возмущения за счет изменения K мало существенны. Более интересны малые отклонения оси вращения от координатной оси, которой для конкретности будем считать ось z. Из предыдущих соотношений следует

$$2T = \left(A - \frac{A^2}{C}\right) w_x^2 + \left(B - \frac{B^2}{C}\right) w_y^2 + \frac{K^2}{C}. \tag{19}$$

Видно, что если вращение происходит вокруг оси с наибольшим моментом инерции ($C > A$, $C > B$), то дополнительная энергия положительна ($C < A$, $C < B$). О вращении вокруг средней оси ($A > C > B$ или $B > C > A$) известно, что оно динамически неустойчиво.

4. Внешнее трение

Вопрос о знаке энергии колебаний, казалось бы, безразличный для устойчивости системы как таковой, приобретает, однако, существенное значение в случае ее взаимодействия с другой системой, способный поглощать энергию. Такая ситуация представляет астрономический интерес ввиду резкого различия темпов диссипации у систем разных категорий. Например, большинство звездных систем практически бездиссипативно за космологически приемлемые сроки. Но если внутри такой системы имеется газовое облако, сохраняющее вязкость благодаря турбулентности или еще чему-либо, то становится возможной передача энергии колебаний звездной системы по гравитационной связи к этому облаку с последующей деградацией энергии колебаний в нем, переходом ее в тепловую. При положительной энергии колебаний звездная система, отдавая энергию газу, в конце концов должна успокоиться. Наоборот, при отрицательной энергии колебаний отдача энергии газу означает усиление колебаний звездной системы вплоть до какой-то ее перестройки или распыления газа.

Нам кажется необходимым изучать многообразные проявления такого «внешнего трения» или, наоборот, раскачки колебаний для составления правильной картины эволюции галактик, несмотря на то, что при этом допускается известная идеализация: процессы в газе могут оказаться более сложными и не сводиться к прямой диссипации энергии.

5. Резонансные неустойчивости

Вопрос о взаимодействии колебаний с разным знаком энергии внутри одной и той же системы также представляет немалый интерес. Рассмотрим простейший пример взаимодействия двух мод, появляющегося в результате какого-то изменения параметров системы. Исходный гамильтониан пусть приведен к виду

$$H_0 = \frac{\omega_0}{2}(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2)$$

Изменение же тогда состоит в добавлении малого члена

$$\delta H = \alpha p_1 p_2 + \beta p_1 q_2 + \gamma p_2 q_1 + \delta q_1 q_2.$$

Написав уравнения (3) для измененного гамильтониана $H = H_0 + \delta H$ и приравняв определитель нулю, получаем характеристическое уравнение для частоты ω:

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -\omega_0 & -\gamma & -\delta \\ \omega_0 & -i\omega & \alpha & \beta \\ -\beta & -\delta & -i\omega & \omega_0 \\ \alpha & \gamma & -\omega_0 & -i\omega \end{vmatrix} = 0$$

или в раскрытом виде

$$(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega_0^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-2(\alpha\delta-\beta\gamma)\omega^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=0$$

с корнями для ω^2:

$$\omega^2=\omega_0^2+\alpha\delta-\beta\gamma\pm\sqrt{-\omega_0^2[(\alpha-\delta)^2+(\beta+\gamma)^2]}.$$

Очевидно, значения ω комплексные, и имеет место неустойчивость, кроме специального случая выполнения равенств $\alpha=\delta, \beta=-\gamma$.

Таким образом, появление резонансной, или «комбинационной» неустойчивости является правилом при взаимодействии мод с разными знаками энергии. Напротив, совершенно аналогичное взаимодействие мод с одинаковым знаком энергии сохраняет устойчивость, что заранее ясно из знакоопределенности H в этом случае. Подробно такие вопросы рассмотрены в [10].

Комбинационная неустойчивость должна, конечно, играть определенную роль в эволюции звездных систем, препятствуя установлению естественного, казалось бы, равновесия по определенным степеням свободы.Однако довольно трудно предусмотреть все возможные проявления такой неустойчивости из-за многообразия мыслимых сочетаний мод с $(+)$ и $(-)$-энергией. Некоторые сочетания, правда, недейственны из-за различия типов симметрии, например, если одна мода – четная по отношению к какому-то отражению, а другая – нечетная.

Комбинационная неустойчивость, по-видимому, ответственна за значительную часть тех «прожилок» или «отрогов» областей неустойчивости, которые столь часто появляются на диаграммах, полученных численными методами (хотя дискуссия с С.Н.Нуритдиновым показала, что для этих аномалий бывают иногда и другие причины). Одним из первых примеров можно считать резонансное зацепление горизонтальных и вертикальных колебаний трехосного эллипсоида Фримана, хорошо видимое на рис.26 в [8].

6. Вращающиеся системы

Для систем, которые в исходном состоянии ротационно симметричны, несложное фурье-разложение показывает, что возмущение плотности в цилиндрических координатах должно иметь вид

$$\tilde{\rho}=A(R,z)\cos[\omega(t-t_0)-m\theta], \tag{20}$$

где m – целое число, t_0 – некоторое постоянное, $A(R,z)$ – функция двух других координат. Взаимодействие возможно только между модами с одним и тем же m. При $m\neq 0$ формулу (20) можно также переписать в виде:

$$\tilde{\rho}=A(R,z)\cos[m(\theta-\Omega t-\theta_0)] \qquad \left(\theta_0=-\frac{\omega t_0}{m}, \quad \Omega=\frac{\omega}{m}\right). \tag{21}$$

Таким образом, возмущение вращается вокруг оси с угловой скоростью Ω.

Заметим, что при переходе к вращающейся системе координат энергия колебаний меняется по общему правилу аналитической механики [11]:

$$H=H_0-\Omega_1 K, \tag{22}$$

где H_0 – гамильтониан, отнесенный к неподвижной системе координат, а H – к системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω_1. Через K обозначена величина момента, связанного с колебаниями.

Переход к вращающейся системе координат важен, в частности, в связи с вопросом о внешнем трении: если можно выделить кольцевой слой газа, ответственный за диссипацию и вращающийся с угловой скоростью Ω_1, то обычная трактовка поглощения энергии справедлива лишь в системе координат именно со скоростью Ω_1. Хотя $\tilde{\rho}$ в данной физической точке, разумеется, не зависит от вращения системы координат, но формально меняются частоты, которые надо подставлять в (12). Точнее, если в неподвижной системе координат мы имеем частоту ω_0, то во вращающейся она, в силу (20), равна $\omega_0 - m\Omega_1$, эта величина может переменить знак при изменении Ω_1.

Далее, если мы подобрали угловую скорость Ω_1 системы координат, совпадающей с Ω, которая фигурирует в (21), то возмущение станет как бы застывшим, $\omega = 0$. Тогда в канонических уравнениях все $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial H}{\partial q_i}$ обращаются в нуль, так что в силу теоремы Эйлера об однородных функциях равна нулю и величина H. Мы получаем соотношение

$$H_0 = \Omega K, \tag{23}$$

часто появлявшееся у разных авторов. При произвольно же выбранной Ω_1 из (22) и (23) следует

$$H = (\Omega - \Omega_1)K \tag{24}$$

Кстати, соотношение (24) позволяет устранить возможное беспокойство при распознавании комбинационной неустойчивости. Действительно, в условиях резонанса ω и m одни и те же у обеих мод, так что совпадают и значения Ω. На основании (24) видно, что в этом случае соответствие или противоположность знаков H у той или иной моды носят объективный характер и не зависят от выбора Ω_1.

Наконец, существенный интерес представляет ситуация, когда ожидается резонанс волны не с другой волной, а с потоком частиц, движущихся по круговым или почти круговым орбитам. При этом подразумевается некоторый разброс значений угловой скорости частиц вокруг Ω, определенного для волны. Качественно результат можно понять, заменив вращение просто поступательным перемещением и перейдя соответственно к ранее рассмотренному примеру 2, где, однако, в состав $f(u)$ включается еще компонента с концентрацией скоростей вблизи резонанса

$$\delta f(u) = \frac{\sigma' a}{\pi m[(u - u^*)^2 + a^2]} \tag{25}$$

где u^*, a, σ' – постоянные, a и σ' малы. Таким образом, для примера мы используем, как достаточно простое, распределение Коши внутри дифференциального потока (в теории плазмы его связывают с именем Джексона). Это изменение дает дополнительную плотность, если заранее допустить неустойчивость,

$$\delta\tilde{\sigma} = -k\varepsilon e^{i\omega t - ikx} \frac{k\sigma'}{[k(u^* + ia) - \omega]}.$$

Несложное составление дисперсионного уравнения при малом отличии η средней скорости потока u^* от скорости волны ω/k приводит к поправке

$$\delta\omega \approx \frac{\sigma'}{(\eta + ia)^2 \frac{d\tilde{\sigma}}{d\omega}}.$$

Неустойчивость соответствует $\operatorname{Im}\omega < 0$. Это наблюдается при $\eta > 0$, если $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\omega} > 0$, и $\eta < 0$, если $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\omega} < 0$. Сопоставляя этот результат с (12), видим, что соблюдается то же правило, как в аналогичных примерах в теории плазмы [12].

При положительности энергии волны по отношению к инерциальной системе отсчета, как это обычно и бывает с волнами плотности, из вышесказанного следует, что волна раскачивается, если в зоне коротации преобладают звезды, движущиеся быстрее ее, и затухает в противном случае.

Вообще для галактик рискованно развивать теорию волновых возмущений, относя их только к конкретно выделенной подсистеме – желателен учет взаимодействий с другими средами. В частности, в специальной работе [13] нами дана оценка оказавшегося достаточно заметным взаимодействия с гало. Качественно это мало отличается от упоминавшейся выше диссипации в газе, хотя в [13] речь идет об уносе энергии не с газовыми движениями, а с дискретными звездами.

1. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1946. — 532 с.

2. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Релятивистская астрофизика. – М., 1967. – 654 с.
3. *Аллер Л.* Астрофизика. Т.2. – М.: ИЛ, 1957. – 325 с.
4. *Lau G.G., Lin C.C., Mark J.W.* Unstable spiral modes in disk-shaped galaxies // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1976. – **73**. – С. 1379–1381.
5. *Марочник Л.С., Сучков А.А.* Галактика. – М.: Наука, 1984. – 392 с.
6. *Антонов В.А.* Точное определение спектра собственных колебаний звездных систем на примере модели плоского однородного слоя // Тр. Астрон. обсерв. ЛГУ. – 1971. – **28**. – С. 64–85.
7. *Антонов В.А., Нуритдинов С.Н.* Простая звездно-динамическая модель кольцевой структуры и ее устойчивость // Астрофизика. – 1983. – **19**. – С. 547–558.
8. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М.: Наука, 1976. – 447 с.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
10. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 360 с.
11. *Уиттекер Б.Т.* Аналитическая динамика. – М.-Л.
12. *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т.1. Неустойчивости однородной плазмы. – М.: Атомиздат, 1975. – 272 с.
13. *Антонов В.А., Баранов А.С.* Усиление спиральных волн плотности в газопылевых дисках галактик в результате взаимодействия с гало // Астрон. ж. – 2000. – **44**. – С. 647–653.

Поступила в редакцию 16.12.2002