Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 58 – 65

УДК 542

Об устойчивости бесконечного цилиндра с анизотропным распределением скоростей*

В.А. Антонов, Е.М. Нежинский

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

Изучается устойчивость бесконечного цилиндра, однородного вдоль z-оси, по отношению к продольным возмущениям. Посредством соответствующего выбора модели задача сводится к одномерной. Показано, что цилиндр неустойчив при любой дисперсии скоростей (σ^2). Для некоторых распределений плотности найдены асимптотические оценки критической длины волны. Показано, что рост критической длины волны вряд ли может играть какую-либо роль в физических приложениях.

ПРО СТІЙКІСТЬ НЕСКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА З АНІЗОТРОПНИМ РОЗПОДІЛОМ ШВИДКОСТЕЙ, Антонов В.А., Нежинський Є.М. — Вивчається стійкість нескінченного циліндра, однорідного вздовж вісі z, відносно подовжніх збурень. За допомогою відповідного вибору моделі задача зводиться до одновимірної. Показано, що циліндр нестійкий при будь-якій дисперсії швидкостей (σ^2). Для деяких розподілів густини знайдено асимптотичні оцінки критичної довжини хвилі. Показано, що зростання критичної довжини хвилі навряд чи може грати яку-небудь роль у фізичних випадках.

ON THE STABILITY OF AN INFINITE CYLINDER HAVING ANISOTROPIC VELOCITY DISTRIBUTION, by Antonov V.A., Nezhinskiy E.M. — The stability is studied with respect to longitudinal perturbations of an infinite cylinder homogeneous along z axis. The problem is reduced to the one-dimensional one by the proper choice of the model. It is shown that the cylinder is unstable for any dispersion of the velocities (σ^2). The asymptotic estimate of critical wavelength is found for several density distributions. It shows that the critical wavelength increases so that can hardly play any role in physical applications.

В связи с обнаружением у некоторых аномальных и кратных галактик вытянутых структур [1] типа мостов, хвостов и перемычек естественно встает вопрос об устойчивости таких образований.

В устойчивости вытянутых газовых образований определяющую роль, по-видимому, играет магнитное поле. Однако в данном случае вид многих мостов и хвостов указывает на их физическое сходство, а иногда и непосредственную связь с типичными спиральными ветвями, в которых относительно малая часть вещества представлена газом, а основным является звездная компонента. Движение звезд не зависит от магнитного поля, поэтому для космогонии галактик и групп галактик большой интерес представляет оценка времени, в течение которого вытянутое образование (в пределе – бесконечный цилиндр) может удержаться в стационарном состоянии за счет тяготения составляющих его звезд.

Хотя рассматриваемая задача (исследование устойчивости бесконечного, однородного в продольном направлении, самогравитирующего цилиндра звезд) несколько напоминает классическую задачу Джинса [2,3], отличие состоит в том, что среда бесконечна не во всех направлениях: цилиндр ограничен по радиусу.

В нижеследующих расчетах мы примем некоторые допущения:

1) гравитационное поле, как обычно, сглаживается (иррегулярными силами пренебрегаем);

2) возмущения гравитационного поля действуют на совокупность звезд с одинаковыми z и w (координатами вдоль оси цилиндра и соответствующими скоростями) одновременно, как на жесткий диск, двигающийся со скоростью w вдоль оси z. Относительные движения звезд в направлениях,

*Впервые опубликована в Трудах Астрон. обсерв. Ленингр. ун-та – 1973. – **29**. – С. 122–140.

перпендикулярных z, учитываются лишь косвенно тем, что диску приписывается распределение поверхностной плотности, совпадающее с распределением объемной плотности исходной стационарной модели цилиндра. Структура диска формально полагается неизменной в ходе возмущения, и он может лишь смещаться как целое, оставаясь ориентированным параллельно прежнему положению. Будем также считать, что диски свободно проходят один сквозь другой, и задана функция распределения их скоростей $\psi_0(w)$, не зависящая от z.

1. Продольные возмущения

1.1. Вывод дисперсионного уравнения

Известно, что в двумерном фазовом пространстве (z, w) выполняется уравнение Больцмана-Власова

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial w} = 0, \tag{1}$$

где t – время; z – линейная координата диска; w – соответствующая компонента скорости диска; $\Psi(z, w, t)$ – фазовая плотность,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(w)dw = 1, \tag{2}$$

$\Phi(z, t)$ – потенциальная энергия (на единицу массы).

Представим фазовую плотность и потенциальную энергию в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon f, \qquad \Phi = \Phi_0 + \varepsilon s,$$

где Ψ_0 и Φ_0 – фазовая плотность и потенциальная энергия для невозмущенного однородного цилиндра; f и s – соответствующие возмущения; ε – малый параметр.

Линеаризуя уравнение (1), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \varphi\frac{\partial \Psi_0}{\partial w} = 0, \tag{3}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{M}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(z_1 - z) f(z_1, w_1, t) dw_1\, dz_1,$$

$F(z_1 - z)$ – сила, с которой одна пластинка (с координатой z_1) притягивает другую пластинку (с координатой z); M – масса пластинки.

Малые возмущения фазовой плотности в силу однородности системы достаточно искать в виде

$$f(z, w, t) = b(w)e^{i\lambda t + ikz}, \tag{4}$$

где k – всегда вещественно.

Обозначим

$$z_1 - z = \xi \tag{5}$$

Подставим (4) в (3) и учтем (5):

$$ib(w)(\lambda + kw) + \frac{1}{M}\frac{\partial \Psi_0}{\partial w}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{ik\xi}d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} b(w_1)\, dw_1 = 0.$$

Функция $F(\xi)$ по своему смыслу нечетная, поэтому

$$b(w) = -\frac{2}{M(\lambda + kw)}\frac{\partial \Phi_0}{\partial w}\int\limits_{0}^{\infty} F(\xi)\sin(k\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} b(w_1)\, dw_1. \tag{6}$$

Интегрируя обе части (6) по w, получим дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{2} = -\frac{2}{M}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda + kw}\frac{\partial \Psi_0}{\partial w}dw\int\limits_{0}^{\infty}F(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi.$$

Очевидно, что устойчивые решения будут отделены от неустойчивых решением, которое не зависит от времени, т.е. таким (аналогично [3]), при котором $\lambda = 0$:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{M}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{kw}\frac{\partial \Psi_0}{\partial w}dw\int\limits_{0}^{\infty}F(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

Пусть для определенности в каждой точке имеет место распределение скоростей по закону Максвелла

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right),$$

где σ^2 – дисперсия скоростей.

Тогда дисперсионное уравнение (7) можно записать как

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{1}{kM}\int\limits_{0}^{\infty}F(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Из (8) находится критическая дисперсия скоростей дисков для каждого волнового числа k, т.е. дисперсия, при которой цилиндр еще устойчив, иначе говоря, – граница областей устойчивости и неустойчивости. Аналогичные расчеты можно провести и для других законов распределения величин w.

1.2. Изучение устойчивости бесконечного цилиндра

Пусть плотность в самом цилиндре, а значит (в силу (2)), и образующих цилиндр пластинках радиуса R меняется по закону $\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ – ограниченная, непрерывная, положительная функция ($\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \leqslant \nu_0$, $\nu_0 = \mathrm{const}$). Тогда сила, с которой одна пластинка притягивает другую, удаленную от нее на расстояние ξ, имеет вид (G – гравитационная постоянная)

$$F(\xi) = G\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}}\frac{\xi\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)dx\,dy\,dx_1dy_1}{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\xi^2\right]^{3/2}}. \tag{9}$$

Подставим полученное выражение для силы (9) в дисперсионное уравнение (8), тогда *

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{G}{kM}\int\limits_{0}^{\infty}\iiiint\frac{\xi\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)}{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\xi^2\right]^{3/2}}\sin k\xi\,dx\,dy\,dx_1dy_1\,d\xi. \tag{10}$$

Изменим в правой части (10) порядок интегрирования. Интегрируем по ξ [4]:

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{G}{M}\iiiint K_0\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\,k\right)\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)dx\,dy\,dx_1dy_1\,. \tag{11}$$

Исследуем поведение правой части (11). Так как [5] $K_0(k) > 0$ и функция K_0 монотонно убывает с ростом аргумента k, а плотность $\rho \geqslant 0$, то правая часть (11) всегда положительна и монотонно убывает с ростом K. При $k \to \infty$ правая часть стремится к $+\infty$ ($\underset{k\to 0}{K_0}(\alpha k) \to +\infty$ при $\alpha > 0$).

На рисунке схематично показано поведение критической кривой, т.е. границы областей устойчивости и неустойчивости для любого закона распределения плотности в пластинке.

Теперь для наглядности рассмотрим три конкретных закона распределения плотности в диске и непосредственно получим вид критических кривых (см. (13), (15), (17)). При этом будем считать, что скорости пластинок распределены по закону Максвелла.

*В дальнейшем интегралы без обозначения пределов распространены по сечениям цилиндра, как (9). Ниже J и K – модифицированные функции Бесселя [5].

Пример 1. Поверхностная плотность пластинок радиуса R не меняется;

$$\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\nu, \qquad \nu=\mathrm{const}$$

Тогда сила, с которой притягиваются две одинаковые, однородные, параллельные, имеющие общую ось симметрии и удаленные друг от друга на расстояние ξ пластинки, имеет вид

$$F(\xi)=2\pi^2GR^2\nu^2\,\mathrm{sign}\,\xi-8\pi G\nu^2R^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\xi\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\xi^2+4R^2\cos^2\varphi}}. \tag{12}$$

Подставив (12) в (8), после интегрирования получим уравнение для критической кривой

$$\sigma^2=\frac{4\pi^2G\nu^2R^2}{k^2M}\left[1-2J_1(kR)K_1(kR)\right]. \tag{13}$$

Пример 2. Поверхностная плотность пластинки меняется по закону

$$\rho(x,y)=\nu\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) \qquad (\nu=\mathrm{const},\ a=\mathrm{const},\ a>0), R=\infty$$

Тогда потенциальная энергия одного диска в поле тяготения другого на расстоянии ξ

$$U(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G\nu^2\exp\left(-\frac{x^2+y^2+x_1^2+y_1^2}{a^2}\right)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\xi^2}}\,dx\,dy\,dx_1dy_1$$

или, если ввести еще одну переменную интегрирования (τ) (см. [6]):

$$U(\xi)=\frac{G\nu^2}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{x^2+y^2+x_1^2+y_1^2+\tau^2[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\xi^2]}{a^2}\right)d\tau\,dx\,dy\,dx_1dy_1$$

$$=G\nu^2(\pi a^2)^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\tau^2\xi^2}{a^2}\right)}{1+2\tau^2}\,d\tau,$$

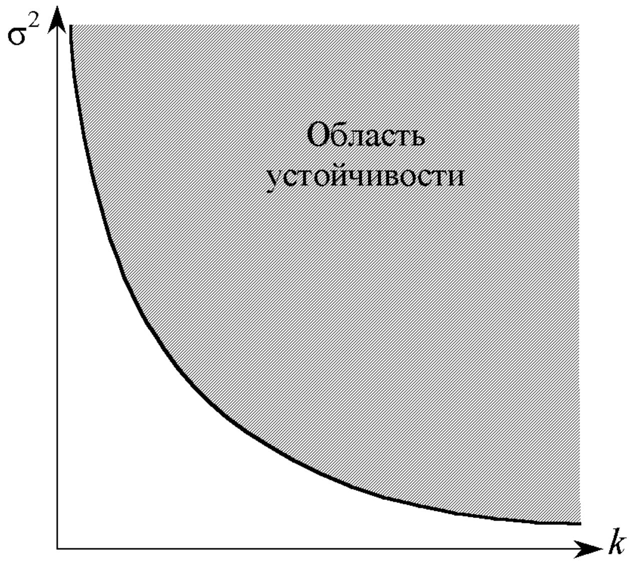

Рис. 1. Слой межзвездной среды во внешнем гравитационном поле с учетом действия магнитного поля

и тогда сила, с которой одна пластинка действует на другую:

$$F(\xi)=-\frac{dU(\xi)}{d\xi}=2G\nu^2\pi^{3/2}a\xi\int\limits_0^\infty \frac{\tau^2}{\tau^2+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\tau^2\xi^2}{a^2}\right)d\tau. \tag{14}$$

Подставив (14) в (8), получим выражение для критической кривой

$$\sigma^2=\frac{\pi^2 G\nu^2 a^2}{k^2 M}\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\frac{a^2k^2}{2}-\ln\tau}. \tag{15}$$

Пример 3. Возьмем закон поверхностной плотности диска

$$\rho(x,y)=\frac{\nu}{(a^2+r^2)^{3/2}} \qquad (\nu=\text{const},\ a=\text{const},\ a>0), R=\infty.$$

Ему соответствует потенциал в точке с координатами (r,ξ)

$$V=\frac{2\pi G\nu}{a}\left[r^2+(|\xi|+a)^2\right]^{-1/2}.$$

Легко убедиться, что эта функция – гармоническая. При $\xi=0$ она испытывает скачок нужной величины

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)_{\xi=+0}-\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)_{\xi=-0}=-4\pi G\rho.$$

Для определенности возьмем $\xi>0$ и проинтегрируем по массе второго диска (см. [6]):

$$U=\int V\,dm=\frac{4\pi^2G\nu^2}{a}\int\limits_0^\infty (a^2+r^2)^{-3/2}\left[r^2+(\xi+a)^2\right]^{-1/2}r\,dr=\frac{4\pi^2G\nu^2}{a^2(\xi+2a)}.$$

Соответственно сила тяготения

$$F(\xi)=-\frac{\partial U}{\partial\xi}=\frac{4\pi^2G\nu^2}{a^2(\xi+2a)}. \tag{16}$$

Подставляем (16) в (8) и получаем выражение для критической кривой

$$\frac{\sigma^2}{2}=\frac{4\pi^2G\nu^2}{a^2M}\int\limits_{2ak}^\infty \frac{\cos(\tau-2ak)}{\tau}\,d\tau. \tag{17}$$

1.3. Асимптотика возмущений при больших длинах волн

Как мы видели выше, при любом значении дисперсии продольных скоростей σ^2 цилиндр неустойчив по отношению к возмущениям с достаточно большой длиной волны. В этом смысле ситуация аналогична известной неустойчивости Джинса в трехмерной среде. Однако в цилиндрической системе увеличение критической длины волны с ростом σ^2 происходит очень быстро.

Действительно, при $k\to 0$, $\sigma^2\to\infty$ (11) можно записать в виде

$$\frac{\sigma^2}{2}=-\frac{G}{M}\iiiint\left\{\frac{1}{2}\ln[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]+\ln\frac{k}{2}+C\right\}\times$$
$$\times\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)dx\,dy\,dx_1dy_1+O(k\ln k),$$

или

$$\frac{\sigma^2}{2}=-\frac{1}{2M}\iint\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\Phi_0\,dx\,dy-GM\left(\ln\frac{k}{2}+C\right), \tag{18}$$

где C – постоянная Эйлера, Φ_0 – логарифмический потенциал, соответствующий пластинке $\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Ведем эффективный радиус соотношением

$$\iint\rho\Phi_0\,dx\,dy=2GM^2\ln R_e.$$

Тогда в критическом случае из (18)

$$k \sim \frac{2}{R_e} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2GM} - C\right),$$

а соответствующая длина волны

$$l \sim \pi R_e \exp\left(\frac{\sigma^2}{2GM} + C\right). \tag{19}$$

Удобно ввести в эту формулу среднюю дисперсию поперечных скоростей. Для этого напишем уравнение Больцмана в стационарном случае для отдельных звезд

$$u\frac{\partial\Psi}{\partial x} + v\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial u} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial v} = 0, \tag{20}$$

где u и v – компоненты скорости соответственно по осям x и y, а Ψ – фазовая плотность в пространстве (x, y, u, v). Умножая (20) на $xu + yv$ и интегрируя по всему фазовому пространству, получаем после некоторых преобразований

$$-\iiiint (u^2+v^2)\psi\, dx\, dy\, du\, dv + \iiiint \left(x\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right)\psi\, dx\, dy\, du\, dv = 0 \tag{21}$$

Но из

$$\Phi_0 = G\iint \rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right) \ln\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\, dx_1 dy_1$$

следует

$$x\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} = 2G\iint \frac{x(x-x_1)+y(y-y_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right) dx_1 dy_1.$$

Среднюю дисперсию поперечных скоростей σ_1^2 определим обычным способом

$$\sigma_1^2 = \frac{\iiiint (u^2+v^2)\Psi\, dx\, dy\, du\, dv}{\iiiint \Psi\, dx\, dy\, du\, dv} = \frac{1}{M}\iiiint (u^2+v^2)\Psi\, dx\, dy\, du\, dv,$$

или, если использовать (21):

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{M}\iint \left(x\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right)\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy =$$
$$= \frac{2G}{M}\iiiint \frac{x(x-x_1)+y(y-y_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right) dx\, dy\, dx_1 dy_1$$

Меняя местами x, y и x_1, y_1 и взяв полусумму полученных выражений, получаем просто

$$\sigma_1^2 = GM,$$

(19) же можно переписать так:

$$l \sim \pi R_e \exp\left(\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2} + C\right). \tag{22}$$

Определение R_e в рассмотренных выше примерах не представляет особых трудностей, если учесть, что Φ_0 обязан удовлетворять уравнению Пуассона:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_0}{dr}\right) = 4\pi G\rho(r)$$

с предельным условием

$$\lim_{r\to\infty}(\Phi_0 - 2GM\ln r) = 0.$$

Так, в примере 1

$$R_e = R\, e^{-1/4}$$

или в примере 2

$$R_e = \frac{a}{\sqrt{2}}\, e^{-C/2}$$

В примере 3 просто $R_e = a$.

2. Поперечные возмущения

2.1. Вывод и исследование дисперсионного уравнения

Рассмотрим, как влияют поперечные возмущения на тот же цилиндр. Для этого из всей совокупности дисков, образующих цилиндр, выберем два (координаты первого – (z,w), второго – (z_1,w_1)). Отклоним один из них, не нарушая параллельности дисков, от оси симметрии в направлении x на небольшую величину h, а другой – на h_1. Тогда сила, действующая в том же направлении, с которой второй диск воздействует на первый, может быть записана в виде

$$F_x(z_1-z)=G\iiiint\frac{(x_1-x+h_1-h)\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\right)dx\,dy\,dx_1dy_1}{[(x_1-x+h_1-h)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2]^{3/2}}.$$

где $h=h(z,w)$, $h_1=h(z_1,w_1)$, а $\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)$ – поверхностная плотность дисков. Разложим подынтегральное выражение в ряд и сохраним члены первого порядка малости

$$F_x(z_1-z)=-G(h_1-h)\iiiint\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)\rho\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\right]^{-1/2}dx\,dy\,dx_1dy_1\,.$$

Ввиду равноправия координат x и y можно также написать в этом интеграле вместо $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ полусумму

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\right]^{-1/2}=$$
$$=-\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\right]^{-1/2},$$

тогда

$$F_x(z_1-z)=-\frac{h_1-h}{2}\frac{\partial}{\partial z_1}F(z_1-z).$$

(определение $F(z_1-z)$ см. в (9)). Напишем выражение для силы (T), с которой весь возмущенный цилиндр будет действовать на отклонившийся от оси симметрии диск с координатами (z,w) и массой M:

$$T(z,w)=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left[h(z+\xi,w_1)+h(z-\xi,w_1)-2h(z,w_1)\right]\Psi_0(w_1)\frac{d}{d\xi}F(\xi)\,dw_1\,d\xi, \tag{23}$$

где $\xi=z_1-z$.

С другой стороны,

$$T(z,w)=\frac{D^2h(z,w)}{Dt^2}M$$

($\frac{D}{Dt}$ – стоксова производная). Поэтому из (23)

$$M\frac{D^2h(z,w)}{Dt^2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[h(z,w_1)-h(z,w)]\Psi_0(w_1)F(0)\,dw_1+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\Psi_0(w_1)F(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[h(z+\xi,w_1)+h(z-\xi,w_1)\right]d\xi\,dw_1, \tag{24}$$

где $F(0)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}F(\xi)>0$.

Так же, как и в п.1, малые возмущения представим в виде

$$h(z,w)=n(w)e^{i\lambda t+ikz} \tag{25}$$

Подставим (25) в (24):

$$M(\lambda+kw)^2 n(w)=F(0)\left[n(w)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(w_1)n(w_1)\,dw_1\right]+k\int\limits_0^{\infty}F(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(w_1)n(w_1)\,dw_1.$$

Теперь проверим, можно ли получить неустойчивые решения, для чего представим дисперсионное уравнение в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi_0(w)\,dw}{F(0)-M(\lambda+kw)^2}=\frac{1}{F(0)-k\int\limits_0^{\infty}F(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi}. \tag{26}$$

1. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Атлас и каталог взаимодействующих галактик. – М., 1959.
2. *Jeans J.H.* Astronomy and cosmogony.
3. *Максумов М.Н., Марочник Л.С.* // Доклады АН СССР. – 1965. – **164**. – С. 1019–1021.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т.1. – М., 1969.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М., 1964.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1963.

Комментарий. При настоящем переиздании статья дана с сокращениями. Во-первых, сокращены некоторые промежуточные аналитические выкладки, не столь, видимо, интересные в нашу эпоху распространения численных расчетов, но отвлекающие внимание читателей от сути дела. Во-вторых, усечен конец статьи, поскольку при анализе уравнения (26) была допущена ошибка (некорректное обращение с расходящимся интегралом), приводившая и к искаженному физическому выводу об устойчивости поперечных возмущений при любом k.

В исправленном виде анализ уравнения (26) дадим опять-таки в пределе длинных волн и больших σ^2. Тогда главным членом в обоих знаменателях (26) оказывается $F(0)$ и разложение по добавкам к нему с использованием уже известной нам асимптотики правой части (8) дает приближенную форму дисперсионного уравнения

$$\lambda^2+k^2\sigma^2=-k^2\sigma_1^2\left(\ln\frac{kR_e}{2}+C\right)$$

и критическую длину

$$l\sim\pi R_e\exp\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2}+C\right),$$

почти совпадающую с (22). Существенная разница однако состоит в том, что продольные возмущения неустойчивы на длинах $>l$, а поперечные, наоборот, на меньших длинах (но больше R). Это в общем-то согласуется с выводами других авторов о так называемой шланговой неустойчивости.

Кроме того, возможно, с нормировкой фазовой плотности (2) связана некоторая техническая неловкость, так как величина M оказывается размерности г$\cdot$см$^{-1}$. Фактически, это, конечно, масса цилиндра на единицу длины:

$$M=2\pi\int\limits_0^R r\rho(r)\,dr.$$

Соответственно F имеет непривычную размерность г$\cdot$см$^{-1}\cdot$сек$^{-2}\cdot$.

Поступила в редакцию 16.12.2002