Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 50 – 57

УДК 542

# Устойчивость нелинейных нерадиальных колебаний двумерных моделей вращающихся звездных систем*

**В.А. Антонов[1], С.Н. Нуритдинов[2]**

[1] Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

[2] Кафедра астрономии Ташкентского университета, Узбекистан

*Исследуются вопросы нелинейной устойчивости кругового цилиндра и диска Маклорена по отношению к нерадиальным колебаниям, придающим системе эллиптическую форму и оставляющим ее пространственную плотность в возмущенном состоянии. Определены фазовые инварианты, не зависящие от времени. При условии их сохранения минимизирована полная энергия двумерной модели. Для рассматриваемых нелинейных колебаний найдены условия устойчивости в виде ограничения сверху на скорость центроида* $\Omega$*: для цилиндра* $\Omega < 1$*, а для диска* $\Omega \leqslant \frac{125}{486}$ *(в единицах круговой скорости), что совпадает с критериями устойчивости линейного приближения. Причина этого совпадения, по-видимому, состоит в рассмотрении только аффинных колебаний.*

*СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ НЕРАДІАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ДВОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ЗОРЯНИХ СИСТЕМ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ, Антонов В.А., Нурітдінов С.Н. — Вивчаються питання нелінійної стійкості кругового циліндра і диска Маклорена відносно нерадіальних коливань, що надають системі еліптичної форми і залишають її просторову густину в збуреному стані. Визначено фазові інваріанти, які не залежать від часу. За умови їхнього збереження мінімізована повна енергія двовимірної моделі. Для розглянутих нелінійних коливань знайдені умови стійкості у вигляді обмеження зверху на швидкість центроїда* $\Omega$*: для циліндра* $\Omega < 1$*, а для диска* $\Omega \leqslant \frac{125}{486}$ *(в одиницях кругової швидкості), що збігається з критеріями стійкості лінійного наближення. Причина цього збігу, очевидно, полягає у розгляді тільки аффінних коливань.*

*THE STABILITY OF NON-LINEAR NON-RADIAL OSCILLATIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL MODELS OF ROTATING STELLAR SYSTEMS, by Antonov V.A., Nuritdinov S.N. — The problem of non-linear stability of a circular cylinder and Maclauren disk with respect to non-radial oscillations, which give to the stellar system an elliptical form and maintain the space density constant in the disturbed state, is discussed. Time-dependent phase invariants are determined. Under the condition of their existence the total energy of two-dimensional models is minimized. For non-linear oscillations considered, stability conditions in form of limitation from above of the centroid velocity* $\Omega$ *are found, viz for a cylinder* $\Omega < 1$ *and for a disk* $\Omega \leqslant \sqrt{\frac{125}{486}}$ *(in units of circular velocity) what coincides with the linear approximation data.*

Некоторыми характерными чертами вращающихся звездных систем обладают двумерные равновесные модели с квадратичным потенциалом: «круговой цилиндр» с фазовой плотностью [1]

$$f_0 = c\,\delta\left[(1-\Omega^2)(R_0^2 - x_0^2 - y_0^2) - (v_{x0} + \Omega y_0)^2 - (v_{y0} - \Omega x_0)^2\right] \tag{1}$$

и «диск Маклорена» [2]

$$f_0 = c\left[(1-\Omega^2)(R_0^2 - x_0^2 - y_0^2) - (v_{x0} + \Omega y_0)^2 - (v_{y0} - \Omega x_0)^2\right]^{-1/2}, \tag{2}$$

где $c$ – нормировочная (несущественная для нас) постоянная, $\delta$ – символ функции Дирака, $R_0$ – радиус соответствующей двумерной модели и $\Omega$ – отношение скорости центроида к круговой скорости в одной и той же точке, причем $0 \leqslant \Omega \leqslant 1$ (см. также [3]). В (1) и (2) частота обращения звезды равна единице. Колебания и устойчивость этих моделей в линейном приближении изучались в работах [4–6] с помощью различных методов. Но исследование нелинейного случая также представляет

*Впервые опубликована в Астрон. ж. – 1977. – **54**, № 4. – С. 745–752.

большой интерес, поскольку, например, при накоплении взаимных возмущений галактик амплитуда колебаний не обязательно мала. Вообще говоря, в механике [7, 8] известны факты нелинейной неустойчивости таких систем, которые являются устойчивыми в линейном приближении, и наоборот. Поэтому результат проводимого нами далее распространения анализа устойчивости моделей (1) и (2) на нелинейный случай заранее неизвестен.

Правда, применительно к моделям вращающихся газовых масс нередко без особо сложных выкладок удается установить, что равновесная конфигурация обладает минимальным значением энергии среди всех возможных состояний той же системы с заданным моментом вращения. Тем самым становится ясной устойчивость системы в некотором определенном смысле по отношению к колебаниям любой амплитуды. Но в нашей задаче мы не можем сослаться на эту гидродинамическую аналогию, так как возмущения, вообще говоря, будут приводить к анизотропии диаграммы скоростей в каждой точке, и в таких условиях невозможно ввести определенное уравнение состояния звездного «газа», общее для разных типов деформации системы. Мы можем сохранить только идею энергетического принципа, используя вместо гидродинамических параметров специальные фазовые инварианты, составленные из коэффициентов уравнения фазовой границы или связанных с ними моментов второго порядка. Рассматриваются не самые общие колебания, а такие, которые оставляют систему пространственно-однородной в возмущенном состоянии, хотя и придают ей эллиптическую форму. Такое допущение при изучении нелинейных колебаний звездных систем делается очень часто [9–11]. Оправданием его внутренней согласованности является свойство сохранения однородности объемной плотности (1) и (2) при аффинных преобразованиях в фазовом пространстве [12]. Что касается более частного случая радиальных пульсаций, то соответствующие уравнения, полученные методом лагранжевых координат, удается полностью решить и исследовать [13].

Мы обращаем внимание, что задание фазового объема системы (по теореме Лиувилля) еще не достаточно для того, чтобы выделить динамически допустимые деформации системы среди всех геометрически мыслимых. Это обстоятельство, как видно ниже, порождает некоторые формальные трудности расчета. Пути их преодоления могут оказаться интересными для анализа других, родственных задач.

## 1. Определение инвариантов системы

Пусть связь невозмущенной системы с возмущенной выражается некоторым линейным преобразованием фазовых координат. Тогда форма возмущенной системы в фазовом пространстве остается все время эллипсоидальной. Выделим скорость центроида в возмущенном состоянии:

$$v_x - v_x' = \alpha(t)x + \beta(t)y \tag{3}$$

$$v_y - v_y' = \gamma(t)x + d(t)y, \tag{4}$$

где $v_x'$, $v_y'$ – компоненты остаточной скорости, а $\alpha, \beta, \gamma, d$ – некоторые неизвестные функции от времени, характеризующие степень возмущения, причем в исходном стационарном состоянии $\alpha = d = 0$, $\beta = -\gamma = -\Omega$.

Известно [14], что коэффициенты уравнения эллипсоида $f = \mathrm{const}$ связаны с моментами второго порядка. Как мы сказали, некоторые комбинации последних представляют собой инвариантные величины, что было подробно изучено в работе [15] при произвольной размерности системы (см. также краткие указания [16]). Для выражения этих инвариантов через параметры возмущенной системы воспользуемся характеристическим уравнением [15] в двумерном случае

$$\begin{vmatrix} \overline{x^2} & \overline{xy} & \overline{xv_x} - \lambda & \overline{xv_y} \\ \overline{xy} & \overline{y^2} & \overline{yv_x} & \overline{yv_y} - \lambda \\ \overline{xv_x} + \lambda & \overline{yv_x} & \overline{v_x^2} & \overline{v_xv_y} \\ \overline{xv_y} & \overline{yv_y} + \lambda & \overline{v_xv_y} & \overline{v_y^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

где черта сверху означает усреднение по фазовой плотности возмущенной системы.

Для удобства дальнейших выкладок полезно преобразовать определитель (5). Умножим первый столбец на $\alpha$, а второй на $\beta$ и вычтем их сумму из третьего столбца, учитывая (3). Тогда, например, первый элемент третьего столбца заменяется на

$$\overline{xv_x}-\lambda-\alpha\overline{x^2}-\beta\overline{xy}=\overline{xv'_x}-\lambda.$$

Затем, умножив первый столбец на $\gamma$, а второй на $d$, вычтем их сумму из четвертого, используя уже (4). Далее, точно такую же процедуру проделаем для строчек определителя (5). Получаем

$$\begin{vmatrix} \overline{x^2} & \overline{xy} & \overline{xv'_x}-\lambda & \overline{xv'_y} \\ \overline{xy} & \overline{y^2} & \overline{yv'_x} & \overline{yv'_y}-\lambda \\ \overline{xv'_x}+\lambda & \overline{yv'_x} & \overline{v'^2_x} & \overline{v'_xv'_y}+(\beta-\gamma)\lambda \\ \overline{xv'_y} & \overline{yv'_y}+\lambda & \overline{v'_xv'_y}+(\gamma-\beta)\lambda & \overline{v'^2_y} \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

Здесь смешанные моменты $\overline{xv'_x}=\overline{xv'_y}=\overline{yv'_x}=\overline{yv'_y}=0$, так как диаграмма остаточных скоростей в каждой точке сохраняет эллиптическую форму. Поскольку характеристическое уравнение (6) инвариантно по отношению к повороту, приводящему систему к главным осям, то можно положить $\overline{xy}=0$. В результате (6) примет вид

$$\lambda^4+c_1\lambda^2+c_2=0, \tag{7}$$

где

$$c_1=\overline{x^2}\,\overline{v'^2_x}+\overline{y^2}\,\overline{v'^2_y}+(\beta-\gamma)^2\overline{x^2}\,\overline{y^2} \tag{8}$$

$$c_2=\overline{x^2}\,\overline{y^2}\left[\overline{v'^2_x}\,\overline{v'^2_y}-\left(\,\overline{v'_xv'_y}\,\right)^2\right]. \tag{9}$$

Следовательно, искомыми инвариантами являются величины $c_1$ и $c_2$. Как видно, величина $c_2$ пропорциональна квадрату фазового объема системы, но величине $c_1$ трудно приписать определенный физический смысл.

Помимо $c_1$ и $c_2$, в процессе эволюции звездной системы остается постоянным также его полный момент

$$H=M\,(\,\overline{xv_y-yv_x}\,), \tag{10}$$

где $M$ – масса двумерной системы. Из (10) с учетом (3) и (4) находим третий инвариант

$$c_3=\frac{H}{M}=\gamma\overline{x^2}-\beta\overline{y^2}. \tag{11}$$

Вычислим значения $c_1$, $c_2$ и $c_3$ для цилиндра (1) и диска (2). В случае цилиндра, учитывая сохранение пространственной однородности системы в возмущенном состоянии, находим фазовые средние

$$\overline{x^2}=\frac{\iint x^2\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}=\frac{a^2}{4},\qquad \overline{y^2}=\frac{b^2}{4}, \tag{12}$$

где $a$ и $b$ – соответственно большая и малая полуоси эллиптического сечения возмущенного цилиндра. Из вида аргумента $\delta$-функции в (1) легко заметить, что

$$\overline{v'^2_x}=\frac{a^2}{4}(1-\Omega^2),\qquad \overline{v'^2_y}=\frac{b^2}{4}(1-\Omega^2). \tag{13}$$

В стационарном состоянии $a=b=R_0$, $\gamma=\Omega=-\beta$ и $\overline{v'_xv'_y}=0$ вследствие изотропности распределения остаточных скоростей. Таким образом, для цилиндра (1)

$$c_1=\frac{R_0^4}{8}(1+\Omega^2),\qquad c_2=\frac{R_0^8}{256}(1-\Omega^2)^2,\qquad c_3=\frac{R_0^2}{2}\Omega. \tag{14}$$

В случае диска (2)

$$\overline{x^2}=\frac{\iint x^2\sigma(x,y)\,dx\,dy}{\iint \sigma(x,y)\,dx\,dy},$$

где $\sigma(x,y)=\mathrm{const}\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$ – поверхностная плотность эллиптического диска. Поэтому в данном случае

$$\overline{x'^2}=\frac{a^2}{5},\qquad \overline{y'^2}=\frac{b^2}{5},\qquad \overline{v_x'^2}=\frac{a^2}{5}(1-\Omega^2),\qquad \overline{v_y'^2}=\frac{b^2}{5}(1-\Omega^2). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (8), (9) и (11) и учитывая стационарные значения $a$, $b$, $\gamma$, $\beta$ и $\overline{v_x'v_y'}$, находим следующие значения инвариантов для диска Маклорена:

$$c_1=\frac{2R_0^4}{25}(1+\Omega^2),\qquad c_2=\frac{2R_0^8}{625}(1-\Omega^2)^2,\qquad c_3=\frac{2R_0^2}{5}\Omega. \tag{16}$$

Легко заметить, что в обоих случаях имеет место равенство

$$c_3^2=c_1-2\sqrt{c_2}. \tag{17}$$

Перейдем к изучению устойчивости (1) и (2) по отношению к нелинейным нерадиальным колебаниям «аффинного» типа. Задача состоит в минимизации полной энергии каждой двумерной модели при условии сохранения инвариантов $c_1$, $c_2$ и $c_3$. В частном случае $\Omega=0$ возможна более простая процедура минимизации [17], где используется только один инвариант (фазовый объем).

## 2. Устойчивость цилиндра

Напишем кинетическую энергию двумерной системы с учетом (3) и (4):

$$T=\frac{M}{2}\left(\overline{v_x^2+v_y^2}\right)=\frac{M}{2}\left[(\alpha^2+\gamma^2)\overline{x^2}+(\beta^2+d^2)\overline{y^2}+\overline{v_x'^2}+\overline{v_y'^2}\right]. \tag{18}$$

Из (8) и (11) находим

$$\beta=\frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2}-\overline{y^2}}\left(\frac{c_3}{\overline{x^2}}-\sqrt{\frac{c_1-\xi}{\overline{x^2}\cdot\overline{y^2}}}\right),\qquad \gamma=\frac{\overline{y^2}}{\overline{x^2}-\overline{y^2}}\left(\frac{c_3}{\overline{x^2}}-\sqrt{\frac{c_1-\xi}{\overline{x^2}\cdot\overline{y^2}}}\right). \tag{19}$$

где введена величина $\xi=\overline{x^2}\cdot\overline{v_x'^2}+\overline{y^2}\cdot\overline{v_y'^2}$, значения которой в стационарной точке для цилиндра (1) и диска (2) совпадают и равняются $\xi_0=2\sqrt{c_2}$. Пусть $\eta=\overline{x^2}\cdot\overline{v_x'^2}-\overline{y^2}\cdot\overline{v_y'^2}$. Из (9) следует, что

$$\xi^2-\eta^2=4\,\overline{x^2}\,\overline{y^2}\,\overline{v_x'^2}\,\overline{v_y'^2}\geqslant 4c_2,\qquad \eta\leqslant\sqrt{\xi^2-4c_2}. \tag{20}$$

Тогда с учетом (18)–(20) полная энергия

$$\begin{aligned}E\geqslant\frac{M}{2(\overline{x^2}-\overline{y^2})^2}&\left\{(c_3^2+c_1)(\overline{x^2}+\overline{y^2})+\frac{\xi}{2}\left[\frac{(\overline{x^2})^2}{\overline{y^2}}+\frac{(\overline{y^2})^2}{\overline{x^2}}-3(\overline{x^2}+\overline{y^2})\right]-\right.\\ &\left.-\frac{(\overline{x^2}-\overline{y^2})^3}{2\overline{x^2}\,\overline{y^2}}\sqrt{\xi^2-4c_2}-4c_3\sqrt{\overline{x^2}\,\overline{y^2}(c_1-\xi)}\right\}+W,\end{aligned} \tag{21}$$

где $W$ – потенциальная энергия двумерной модели. При получении (21) положено $\alpha=d=0$, поскольку $\alpha^2\overline{x^2}+d^2\overline{y^2}\geqslant 0$ и сами $\alpha$ и $d$ никак не связаны с инвариантами. Итак, учтены все инварианты, и минимизируемая функция зависит от трех оставшихся независимых переменных: $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ и $\xi$. В дальнейшем для определенности считаем $\overline{x^2}\geqslant\overline{y^2}$, т.е. $a\geqslant b$. Как видно из (21), $2\sqrt{c_2}\leqslant\xi\leqslant c_1$.

Рассмотрим теперь конкретно случай цилиндра (1). Потенциальная энергия однородного эллиптического цилиндра [11] с учетом (12)

$$W=\frac{MR_0^2}{2}\ln(a+b)+\mathrm{const}=\frac{MR_0^2}{2}\ln\left(\sqrt{\overline{x^2}}+\sqrt{\overline{y^2}}\right)+\mathrm{const}, \tag{22}$$

причем константа при минимизации не играет роли. Воспользуемся в (21) следующими соотношениями:

$$\sqrt{c_1-\xi}\leqslant c_3-\frac{\xi-2\sqrt{c_2}}{2c_3}\qquad \left(c_3=\sqrt{c_1-2\sqrt{c_2}}\,\right), \tag{23}$$

$$\min_{\xi}(\mu_1\xi-\mu_2\sqrt{\xi^2-4c_2})=2\sqrt{c_2(\mu_1^2-\mu_2^2)}\qquad (\mu_1>\mu_2>0). \tag{24}$$

Тогда с учетом (14) и (22), введя обозначения

$$m=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}, \qquad m=\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2} \qquad (m\geqslant n), \tag{25}$$

получим

$$\frac{E}{M}\geqslant\frac{(1+3\Omega^2)R_0^4}{16m^2}+\frac{(1-\Omega^2)R_0^4}{16m^2}\sqrt{9+\frac{8n^2}{m^2-n^2}}+\frac{R_0^2}{2}\ln m\geqslant\frac{R_0^4}{4m^2}+\frac{R_0^2}{2}\ln m\equiv E_1(m), \tag{26}$$

если $\Omega<1$. Стационарные значения $m_0=R_0$, $n_0=0$. Как видно, $E_1(m)\geqslant E_1(m_0)$. Таким образом, при $\Omega<1$ имеет место нелинейная устойчивость цилиндра (1). Когда $\Omega=1$, в (26) исчезает зависимость от $n$, т.е. появляется безразличное равновесие относительно $n$ или слабая неустойчивость, которая и была обнаружена еще в [11].

## 3. Локальный минимум для диска

Диск Маклорена при наибольшем возможном значении $\Omega=1$ неустойчив в линейном приближении [9] по отношению к колебаниям, вызывающим эллиптичность. Так как неустойчивость носит экспоненциальный характер, то результат сохраняется и в нелинейной теории. В другом предельном случае $\Omega=0$ диск, напротив, устойчив, что следует из теоремы Лиувилля [17]. Следовательно, остается найти критическое значение $\Omega$, разделяющее области устойчивости и неустойчивости.

Анализ минимума начнем с неравенства (21), которое в обозначениях $m$ и $n$ перепишем в виде

$$\frac{E}{M}\geqslant\frac{(c_3+\sqrt{c_1-\xi})^2}{4m^2}+\frac{(c_3-\sqrt{c_1-\xi})^2}{4n^2}+\frac{2(m^2+n^2)}{(m^2-n^2)^2}\xi-\frac{4mn}{(m^2-n^2)^2}\sqrt{\xi^2-4c^2}+\frac{W}{M}\equiv F. \tag{27}$$

Введем новое обозначение $e$:

$$c_3-\sqrt{c_1-\xi}=e^2n^2. \tag{28}$$

С целью нахождения локального минимума разложим функцию $F$ по $n^2$ с точностью до $\sim n^2$. Принимая во внимание разложение $W$ по $n^2$ (см. (37) в приложении), с учетом (16) получаем

$$F(m,n,e)=F_1(m)+n^2F_2(m,e)+O(n^4), \tag{29}$$

где

$$F_1(m)=\frac{4R_0^4}{25m^2}-\frac{4R_0^3}{5\sqrt{5}\,m}\geqslant F_1(m_0) \qquad \left(m_0=\frac{2R_0}{\sqrt{5}}\right)$$

$$F_2(m,e)=\frac{e^4}{4}+\frac{6R_0^3\Omega}{5m^2}e^2-\frac{16R_0^3\sqrt{\Omega(1-\Omega^2)}}{5\sqrt{5}\,m^3}e+\frac{12R_0^4(1-\Omega^2)}{25m^4}-\frac{R_0^3}{5\sqrt{5}\,m^3}.$$

Как видно, по $m$ имеется минимум для произвольного $\Omega$ и в $F_2$ вместо $m$ можно подставить его стационарное значение $m_0=\dfrac{2R_0}{\sqrt{5}}$. Суждение об устойчивости или неустойчивости модели зависит от знака $F_2$. Критическая точка соответствует случаю $F_2(m,e)=0$ для некоторого $e$. В этой точке появляются два слившихся корня и

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial e}\right)_{m=m_0}=0.$$

Совместное исследование последних двух уравнений дает нам критическое значение

$$\Omega^*=\sqrt{\frac{125}{486}} \tag{30}$$

Итак, энергетический принцип для диска Маклорена показывает, что устойчивость по отношению к малым, но конечным изменениям параметров системы имеет место при $\Omega\leqslant\Omega^*$. Линейный анализ устойчивости, проведенный рядом авторов [4–6], дает точно такие же значения $\Omega^*$. Совпадение результатов показывает, что равновесная модель с $\Omega\leqslant\Omega^*$ действительно находится в «энергетической яме» и что все существенные при этом инварианты нами учтены. Однако отметим, что для других, не рассмотренных здесь, типов колебаний критическое значение $\Omega$ в нелинейном случае может, по-видимому, отличаться от (30).

## 4. Доказательство абсолютного характера минимума

Докажем, что найденный локальный минимум (30) является более глубоким минимумом, чем другие, которые, вероятно, могут появиться с возрастанием амплитуды колебания. Иными словами, при произвольном $n$ и $\Omega \leqslant \Omega^*$ докажем справедливость неравенства

$$F(m,n,e) \geqslant F_0 \equiv -\frac{R_0^2}{5} \tag{31}$$

где $F_0$ – стационарное значение функции $F$.

Будем исходить из неравенства (27). Здесь больше всего неудобств создает член со знаменателем $4n^2$. Избавимся от него, используя неравенство

$$\frac{A^2}{4B} = \max(Az - Bz^2). \tag{32}$$

Здесь $A = c_3 - \sqrt{c_1 - \xi}$, $B = n^2$. Величину $z$ возьмем равной $z = \dfrac{4c_3}{5m^2}$, что обеспечивает нам получение известного $\Omega^*$ при небольших $n$. Тогда с учетом неравенства (23) получим

$$F \geqslant \mu_1 \xi - \mu_2 \sqrt{\xi^2 - 4c_2} - \frac{16c_3^2 n^2}{25m^4} + \frac{9c_3^2 + c_1}{10m^2} + \frac{W}{M}, \tag{33}$$

где

$$\mu_1 = -\frac{1}{10m^2} + \frac{2(m^2+n^2)}{(m^2-n^2)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{4mn}{(m^2-n^2)^2}.$$

Поскольку вторая производная от правой части (33) по $\xi$ положительна, можно найти ее минимум, воспользовавшись уже известной формулой (24). Тогда, пользуясь оценкой

$$\sqrt{\mu_1^2 - \mu_2^2} = \frac{\sqrt{361m^4 - 42m^2n^2 + n^4}}{10m^2(m^2-n^2)} \geqslant \frac{19m^2 - \frac{21}{19}n^2 - \frac{n^4}{9m^2}}{10m^2(m^2-n^2)} \geqslant 0,$$

с учетом (16) и (31) образуем разность

$$F - F_0 \geqslant \frac{R_0^4}{125m^2}\left[\frac{1-\Omega^2}{1-\alpha}\left(19 - \frac{21}{19}\alpha - \frac{\alpha^2}{19}\right) - \frac{64}{5}\Omega^2\alpha + 19\Omega^2 + 1\right] - \frac{P(\alpha)}{m} + \frac{R_0^2}{5}, \tag{34}$$

где $P(\alpha) = -\dfrac{mW}{M}$, $\alpha = \dfrac{n^2}{m^2}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Остается доказать положительность трехчлена в (34) относительно $m^{-1}$. Для этого достаточно установить отрицательность его дискриминанта, т.е.

$$[P(\alpha)]^2 - \frac{4R_0^2}{625}\left[\frac{1-\Omega^2}{1-\alpha}\left(19 - \frac{21}{19}\alpha - \frac{\alpha^2}{19}\right) - \frac{64}{5}\Omega^2\alpha + 19\Omega^2 + 1\right]$$

Умножая его на $\dfrac{125(1-\alpha)}{4R_0^6}$ и используя оценку п.3 в приложении в виде

$$(1-\alpha)[P(\alpha)]^2 \leqslant \frac{16R_0^6}{125}\sqrt{1-\alpha} \leqslant \frac{16R_0^6}{125}\left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}\right),$$

получим выражение

$$\left(-\frac{30}{19} + \frac{2916}{475}\Omega^2\right)\alpha + \left(-\frac{1}{2} - \frac{64}{25}\Omega^2 + \frac{1-\Omega^2}{95}\right)\alpha^2 \leqslant 0, \tag{35}$$

так как второе слагаемое в (35) отрицательно при произвольном $\Omega$, а первое – при $\Omega \leqslant \sqrt{\dfrac{125}{486}} = \Omega^*$. Таким образом, доказан абсолютный характер минимума.

## 5. Заключение

Мы рассмотрели устойчивость круговых моделей звездных систем (1) и (2) по отношению к нелинейным нерадиальным колебаниям «аффинного типа». При этом, вообще говоря, происходит перераспределение энергии между радиальными пульсациями и эллиптическими деформациями, которые в линейной теории были бы независимыми модами. Однако это не приводит к каким-либо новым неустойчивостям в рассматриваемом нелинейном случае, и предельное значение для диска $\Omega = \Omega^*$ остается таким же, как и в линейном приближении.

## 6. Приложение

Некоторые соотношения для потенциальной энергии эллиптического диска.

Потенциальная энергия эллиптического диска, полученного предельным сплющиванием трехосного эллипсоида, равна [17, 18]

$$W = -\frac{2MR_0^3}{5\pi}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s(a^2+s)(b^2+s)}}. \tag{36}$$

В (36) сделаем подстановку $s = abq$. Тогда с учетом (15) и (25) получим

$$W = -\frac{4MR_0^3}{5\sqrt{5}\,\pi m}\int\limits_0^\infty \frac{dq}{(1+q)\sqrt{q(1-\varepsilon)}}, \qquad \varepsilon = \left[\frac{n(1-q)}{m(1+q)}\right]^2.$$

Поскольку $n \leqslant m$ и $\varepsilon < 1$, разложим функцию $(1-\varepsilon)^{-1/2}$ в ряд по степеням $\varepsilon$. Получаем

$$W = -\frac{4MR_0^3}{5\sqrt{5}\,\pi m}\sum_{k=0}^\infty \sqrt{a_k}\left(\frac{n^2}{m^2}\right)^k \int\limits_0^\infty \frac{(1-q)^{2k}dq}{\sqrt{q}\,(1+q)^{2k+1}} = -\frac{4MR_0^3}{5\sqrt{5}\,m}\sum_{k=0}^\infty a_k\alpha^k, \quad a_k \equiv \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2, \quad \alpha \equiv \frac{n^2}{m^2}.$$

В частности, при нахождении локального минимума (п.3) нам понадобилась асимптотика

$$W = -\frac{4MR_0^3}{5\sqrt{5}\,m}\left(1+\frac{n^2}{4m^2}\right) - \ldots \tag{37}$$

Далее, введем обозначение $P(\alpha) = -\dfrac{mW}{M}$ и докажем следующее неравенство:

$$P(\alpha) \leqslant \frac{4R_0^3}{5\sqrt{5}}(1-\alpha)^{-1/4}. \tag{38}$$

Для этого рассмотрим разложение

$$(1-\alpha)^{-\nu} = \sum_{k=0}^\infty d_k\alpha^k, \qquad d_k = \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1)}{k!} \quad (k \geqslant 1), \qquad d_0 = 1$$

при $\nu = \frac{1}{4}$. Достаточно установить, что $a_k \leqslant d_k$ (равенство выполняется при $k = 1$). Так как трудно сравнить сами общие коэффициенты $a_k$ и $d_k$, сравним их попарные отношения

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{d_{k+1}}{d_k}, \tag{39}$$

что эквивалентно $(2k+1)^2 < 4(k+1)(k+\frac{1}{4})$, а это справедливо при $k > 0$. Поскольку $a_1 = d_1$, из (39) следует неравенство $a_2 < d_2$ и по индукции $a_k < d_k$, что требовалось доказать.


1. *Бисноватый-Коган Г.С.* // Астрофизика. – 1971. – **7**. – С. 121.
2. *Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б.* // Астрофизика. – 1970. – **6**. – С. 387.
3. *Фридман А.М.* // Итоги науки и техники, сер. Астрономия. – 1975. – **10**. – С. 61.
4. *Поляченко В.Л., Шухман И.Г.* // Астрон. ж. – 1973. – **50**. – С. 721.
5. *Kalnajs A.J.* // Astrophys. J. – 1972. – **175**. – P. 63.
6. *Антонов В.А.* // Тр. Астрон. обсерв. Ленингр. гос. ун-та. – 1976. – **32**.
7. *Зигель К.Л.* Лекции по небесной механике. – М.: ИЛ, 1959.
8. *Дубошин Г.Н.* Основы теории устойчивости движения. – М.: Изд-во МГУ, 1952.
9. *Hunter C.* // MN RAS. – 1963. – **126**. – P. 299.
10. *Kalnajs A.J.* // Astrophys. J. – 1973. – **180**. – P. 1023.

11. *Антонов В.А.* // Доклады АН СССР. – 1973. – **209**. – С.584.

12. *Нуритдинов С.Н.* // Вестник Ленингр. ун-та. – 1977. – № 1. – С. 151.

13. *Антонов В.А., Нуритдинов С.Н.* // Вестник Ленингр. ун-та. – 1975. – № 7. – С. 133.

14. *Курт Р.* Введение в звездную статистику. – М.: Мир, 1969.

15. *Антонов В.А.* // Вестник Ленингр. ун-та. – 1965. – № 13. – С. 136.

16. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974.

17. *Антонов В.А., Нуритдинов С.Н.* // В кн. Динамика и эволюция звездных систем. – М.: Изд-во ВАГО АН СССР, 1975. – С. 275.

18. *Субботин М.Ф.* Курс небесной механики. Т.3. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

19. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М.: Наука, 1976. – 447 с.

***Комментарий***. Здесь дан еще один пример доказательства устойчивости конкретной модели по отношению к динамически возможным колебаниям определенного класса при помощи слежения за инвариантами и оценивания полной энергии. Система предполагается автономной. Если диск является частью большей системы, положение несколько меняется, как показали, в частности, дальнейшие исследования Нуритдинова. Граница устойчивости по отношению к возникновению эллиптичности отодвигается к бо́льшим (по отношению к круговой скорости) значениям скорости центроида; становится возможным существование побочных «энергетических ям». Однако в таких вложенных системах относительно бо́льшую роль приобретают локальные неустойчивости на неаффинных возмущениях.

С другой стороны, в ходе последующих дискуссий с Б.П.Кондратьевым выяснилось, что известные эллиптические диски K.C.Freeman, если они устойчивы, также соответствуют «энергетическим» ямам. Различие состоит лишь в том, что три инварианта больше не связаны соотношением (17). Динамически допустимое превращение такого эллиптического диска в устойчивый круговой диск возможно только при сбрасывании не только части энергии, но и момента.

Многие литературные указания в данной статье сейчас можно было бы, конечно, заменить ссылками на обобщающую (вышедшую практически одновременно) монографию [19]

Поступила в редакцию 16.12.2002