Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 47 – 49

УДК 542

Устойчивость сферических скоплений по отношению к возмущениям конечной амплитуды[*]

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

Рассматривается устойчивость гравитирующих систем – газовых шаров и бесстолкновительных звездных систем – по отношению к возмущениям произвольной амплитуды.

СТІЙКІСТЬ СФЕРИЧНИХ СКУПЧЕНЬ ПО ВІДНОШЕННЮ ДО ЗБУРЕНЬ СКІНЧЕНОЇ АМПЛІТУДИ, Антонов В.А.— Розглядається стійкість гравітуючих систем – газових куль та беззіткненних зоряних систем – по відношенню до збурень довільної амплітуди.

THE STABILITY OF SPHERICAL CLUSTERS WITH RESPECT TO PERTURBATIONS OF FINITE AMPLITUDE, by Antonov V.A.— The stability of gravitating systems – gaseous spheres and collisionless stellar systems – with respect to perturbations of arbitrary amplitude is considered.

Рассматривая устойчивость гравитирующей системы по отношению к возмущениям произвольной амплитуды, мы имеем в виду энергетический критерий: для устойчивости системы достаточно, если энергия возмущенного состояния с учетом некоторых локальных законов сохранения всегда больше энергии исходного, равновесного состояния. Применительно к гравитирующим шарам конечные амплитуды изучались обычно для узких специальных классов возмущений [1, 2]. Общую задачу о качественных особенностях вариации полной энергии можно решать косвенно, опираясь на топологию экстремалей [3]. Однако более наглядным способом проверки устойчивости является прямое сравнение значений энергии.

Рассмотрим модели двоякого рода: газовые шары и бесстолкновительные звездные системы. Начинаем с газодинамических моделей. Тогда результаты для звездных скоплений будут получаться по аналогии с небольшими видоизменениями. Задаемся политропным состояние газа $p = K\rho^{\gamma}$, причем $\gamma > 4/3$ (в противном случае заведомо имеет место неустойчивость). Подразумеваем химическую и термодинамическую однородность вещества. При условии сохранения сферической симметрии полная энергия (газовая + потенциальная) конфигурации с плотностью $\rho(r)$ и соответствующим гравитационным потенциалом $U(r)$ записывается в общем виде как

$$E = \frac{K}{\gamma - 1} \int\limits_0^{M^*} \rho^{\gamma-1} dM - \frac{1}{2} \int\limits_0^{M^*} U\, dM \qquad (1)$$

где $M(r)$ означает массу, заключенную внутри сферы радиуса r, т.е.

$$M(r) = 4\pi \int\limits_0^{r} r^2 \rho(r)\, dr, \qquad dM = 4\pi r^2 \rho\, dr, \qquad (2)$$

а M^* – полная масса системы. Потенциал очень легко выражается через M:

$$U(r) = \frac{GM(r)}{r} \qquad (3)$$

[*]Впервые опубликована в «Вопросы небесной механики и звездной динамики» / под ред. Т.Б.Омарова. – Алма-Ата: «Наука» Каз. ССР, 1990. – С. 66–70.

где G – гравитационная постоянная, так что

$$E = K_1 \int \frac{1}{r^2} \left(\frac{dM}{dr}\right)^{\gamma-1} dM - \frac{G}{2} \int \frac{M\,dM}{r}, \qquad \left(K_1 = \frac{K}{(\gamma-1)(4\pi)^{\gamma-1}}\right) \tag{4}$$

Основной функцией, характеризующей состояние, удобно считать $S = r^{-1}$ по отношению к аргументу M. Тогда (4) переписывается в виде

$$E = K_1 \int \left(-\frac{1}{S^4}\frac{dS}{dM}\right)^{1-\gamma} dM - \frac{G}{2} \int SM\,dM.$$

Будем рассматривать функцию $S(M) = S_0(M)$ равновесного состояния и функцию $S(M) = S_0(M) + \delta S(M)$ произвольного адиабатически возмущенного состояния с $S = S_0 + \lambda \delta S (0 < \lambda < 1)$. По интерполяции они удовлетворяют условию неперепутывания слоев $\frac{dr}{dM} > 0$, или $\frac{dS}{dM} < 0$, необходимому для физической реализуемости состояния. Сосредоточим внимание на зависимости E от λ. Вблизи равновесия, как известно, любая первая вариация энергии обращается в нуль, так что $\frac{dE}{d\lambda} = 0$ при $\lambda = 0$. Далее, для произвольного промежуточного состояния несложные выкладки дают

$$\frac{d^2E}{d\lambda^2} = K_1(\gamma-1) \int \left[(4\gamma-5)A^2 - (4\gamma-4)AB + \gamma B^2\right] S^{4\gamma-6} \left|\frac{dS}{dM}\right|^{-1-\gamma} dM, \tag{5}$$

где $A = 2\delta S \left|\frac{dS}{dM}\right|$, $B = -S\frac{d\delta S}{dM}$. Дискриминант, встретившийся в (5) квадратичной формы $(2\gamma-2)^2 - \gamma(4\gamma-5) = 4 - 3\gamma < 0$, так что $\frac{d^2E}{d\lambda^2} > 0$ $(\lambda \in (0, 1))$, и приращение энергии от $\lambda = 0$ до 1 оказывается положительным, что и требовалось доказать. В критическом случае $\lambda = 4/3$ автомодельные возмущения сохраняют энергию, все прочие увеличивают.

Перейдем к бесстолкновительному случаю, ограничиваясь моделью с изотропным «давлением». Известно [4], что структура политропного шара Эмдена свойственна, в частности, звездному скоплению с фазовой плотностью

$$f = c(H^* - H)^{n-\frac{3}{2}}, \quad (c,\ H^* = \mathrm{const},\ n = \frac{1}{\gamma-1},\ c > 0,\ H^* < 0), \tag{6}$$

зависящей от интеграла энергии $H = \frac{v^2}{2} - U(r)$. Показатель «адиабаты» подчиняем условиям $\frac{4}{3} < \gamma < \frac{5}{3}$, причем верхняя граница нужна для исключения мало реалистичных моделей, в которых f увеличивается с ростом скорости. Аналогом условия адиабатичности является регулярность внешних гравитационных воздействий, переводящих систему в возмущенное состояние. По теореме Лиувилля при этом сохраняется значение f каждого фазового элемента. Фактически, как мы сейчас докажем, устойчивость имеет место по отношению к более широкому и удобному для анализа классу возмущений, которые подчинены только условию сохранения полной массы $M^* = \iint f\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$ и вспомогательной величины, «квазиэнтропии» $L = \iint f^{\frac{2n-1}{2n-3}}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$. (легко видеть, что сохранение L следует из теоремы Лиувилля). Вместо энергии можно рассматривать отличающуюся от нее только постоянными слагаемыми величину

$$E - H^*M^* + \frac{2n-3}{2n-1} c^{-\frac{2}{2n-3}} L = -\iint \left(\frac{U}{2} + H^*\right) \rho\, d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \iint v^2\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v} + \frac{2n-3}{2n-1} \iint c \left(\frac{f}{c}\right)^{\frac{2n-1}{2n-3}} d\mathbf{r}\, d\mathbf{v} \tag{7}$$

(масса звезды принята за единицу). Допустим временно, что при каждом r возмущенная фазовая плотность принадлежит определенному классу, возникающему как формальное неоднородное обобщение закона (6). Пусть

$$f = c\left(H^0(r) - \frac{v^2}{2}\right)^{n-3/2} \qquad (v < \sqrt{2H^0(r)}\,), \tag{8}$$

где для внутреннего согласования необходимо

$$\rho(r) = 4\sqrt{2}\pi^{3/2} c \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} (H^0(r))^n. \tag{9}$$

Подстановкой (8) с учетом (9) правая часть (7) сводится к виду (1) с некоторой постоянной K, и мы вправе сослаться на анализ проблемы для газодинамического случая. При произвольной же зависимости f от $\mathbf{v}$ мы можем искусственно определить функцию $H^0(r)$ из (9) по заданной $\rho(r)$ и использовать неравенство Минковского [5] в форме

$$\int\limits_{v<\sqrt{2H^0}} \left(H^0(r)-\frac{v^2}{2}\right) f\, d\mathbf{v} \leqslant \left[\int f^{\frac{2n-1}{2n-3}} d\mathbf{v}\right]^{\frac{2n-3}{2n-1}} \left[\int \left(H^0(r)-\frac{v^2}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} d\mathbf{v}\right]^{\frac{2}{2n-1}},$$

позволяющей с учетом знакопостоянных вкладов от области $v>\sqrt{2H^0}$ убедиться, что равенство (1) заменяется неравенством со знаком $>$ и вывод о минимальности энергии стационарного состояния по отношению ко всем допустимым возмущениям остается в силе. Точнее говоря, утверждение об устойчивости мы обосновали в предположении сферической симметрии возмущенного состояния, но это не ограничивает общности, так как перемещение гидродинамических элементов из несимметричного в симметричное положение всегда уменьшает E [6,7]. Последний факт, интуитивно очевидный, может быть доказан посредством ссылки на теорему Лихтенштейна. Заметим, что при $\gamma<4/3$ сказывается существенное отличие бесстолкновительных моделей от истинных газовых шаров, поскольку доказано, что звездные скопления с изотропным давлением и при малых γ сохраняют устойчивость по отношению к малым возмущениям [8]. Однако в доказательстве существенно используется интеграл площадей, исчезающий, когда возмущения приобретают конечную амплитуду. Следовательно, конечность амплитуды существенно меняет задачу, и те сравнительно простые приемы, которые употреблены в статье, в случае $\gamma<4/3$ принципиально не работают.

1. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Релятивистская астрофизика. – М., 1967. – 654 с.
2. *Ferronsky V.I., Denisik S.A., Ferronsky S.V.* // Cel. Mech. Dyn. Astron. – 1979. – **19**, № 2. – P. 173–201.
3. *Bisnovatyi-Kogan C.S., Blinnikov S.I.* // Astron. Astrophys. – 1974. – **31**. – P. 391–404.
4. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М.: Наука, 1976. – 447 с.
5. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства. – М.: 1983.
6. *Антонов В.А.* // Вестник ЛГУ. – 1962. – № 19. – С. 96.
7. *Хазан Л., Шноль Э.Э.* // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**. – С. 1018.
8. *Doremus G.P., Feix M.R.* // Astron. Astrophys. – 1973. – **29**, № 3. – P. 401–407.

Комментарий. Здесь дан пример доказательства устойчивости системы, конкретно, политропного шара $3/2<n<3$, с учетом нелинейности. Но вместо анализа поведения той или иной формы колебаний звездной системы, рассуждение ведется в общем виде при помощи инвариантов эволюции. В сущности, доказано даже нечто большее, чем устойчивость по Ляпунову. Именно, устанавливается, что динамически возможный (без трения, столкновений звезд и т.п.) переход данной стационарной системы в любое другое состояние требует затраты энергии. Реально, если, например, система все-таки переведена в другое состояние толчком со стороны внешнего тела, это неизбежно отзовется уменьшением энергии последнего.

Поступила в редакцию 16.12.2002