Вісник Астрономічної школи · Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 45 – 46

УДК 542

Точная форма собственных колебаний фазовой модели Камма сферического звездного скопления[*]

В.А. Антонов[1], **С.Н. Нуритдинов**[2]

[1] Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

[2] Кафедра астрономии Ташкенского университета, Узбекистан

Изложены два интересных свойства равновесной модели Камма. Точная форма ее собственных колебаний, связанных с возмущениями объема, найдена в виде полиномов Якоби. Доказывается общая устойчивость модели по отношению к произвольным асимметричным колебаниям.

ТОЧНА ФОРМА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ФАЗОВОЇ МОДЕЛІ КАММА СФЕРИЧНОГО ЗОРЯНОГО СКУПЧЕННЯ, Антонов В.А., Нурітдінов С.Н. — Викладено дві цікаві властивості рівноважної моделі Камма. Точна форма її власних коливань, пов'язаних зі збуреннями об'єму, знайдена у вигляді поліномів Якобі. Доводиться загальна стійкість моделі по відношенню до довільних асиметричних коливань.

THE EXACT FORM OF AUTONOMOUS OSCILLATIONS OF THE CAMM'S PHASE MODEL OF SPHERICAL STELLAR CLUSTER, by Antonov V.A., Nuritdinov S.N. — Two interesting properties of the Camm's equilibrium model are given. The analytical exact form of its autonomous oscillations associated with volume perturbations is found by the Jacobi polynomials. The total stability of the model with respect to arbitrary asymmetric oscillations is proved.

В данной заметке мы публикуем результат для известной равновесной модели Камма, который доложен нами на Всесоюзной конференции уже давно (Волгоград, 1985). Речь идет о нахождении аналитической формы объемных возмущений потенциала. Сначала отметим два интересны свойства самой модели Камма, фазовая плотность которой равна

$$f(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{v}}) = \rho\pi^{-2}\left[(1-r^2)(1-v_\perp^2)-v_r^2\right]^{-1/2} \qquad (4\pi G\rho = 3), \tag{1}$$

где ρ – объемная плотность, v_z и $v_\perp$ – компоненты скорости.

Свойство 1. При заданной координате z распределение скоростей по соответствующей компоненте скорости v_z не зависит от двух других координат x и y точки, где строится диаграмма скоростей. Действительно,

$$\iint f\,dv_x\,dv_y = \frac{2\rho}{\pi}(1-z^2)^{-1/2}\left[1-\frac{v_z^2}{1-z^2}\right]^{1/2} \tag{2}$$

Свойство 2. Отклик модели (1) на дополнительное малое гравитационное поле с потенциалом $\exp(-i\omega t)\Phi_n(x,y,z)$ (Φ_n – произвольный многочлен степени n) создает возмущение плотности, которое соответствует потенциалу $\exp(-i\omega t)\tilde{\Phi}_n(x,y,z)$ с многочленом той же степени n. Известно, что последнее свойство имеет место и для шара Эйнштейна и некоторых двумерных моделей. Следовательно, оно доказывается таким же образом [1].

Поиск исходного вида Φ_n в случае модели (1) приводит нас к полиному Лежандра $P_n(z)$. Действительно, тогда смещение по координате z равно

$$\delta z = -\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}\,\tau \cdot e^{\omega\tau}\frac{d}{dl}P_n(l)d\tau, \qquad l = z\,\mathrm{ch}\,\tau + iv_z\mathrm{sh}\,\tau. \tag{3}$$

[*] Впервые опубликована в Астрон. циркуляр. – № 1545. – С. 3–4.

Используя свойство 1, можно легко провести усреднение δz с функцией (1)

$$\langle \delta z \rangle = -\frac{2}{n(n+1)} \frac{dP_n(z)}{dz} \int\limits_0^\infty e^{\omega\tau} \frac{d}{d\tau} P_n(\operatorname{ch}\tau) d\tau \tag{4}$$

Далее вычисляем возмущение плотности и результат сопоставляем с его теоретическим выражением $-\dfrac{1}{4\pi G}\frac{d^2 P_n}{dz^2}$. Находим

$$\omega \int\limits_0^\infty e^{\omega\tau} P_n(\operatorname{ch}\tau) d\tau = \frac{(n-2)(n+3)}{6} \tag{5}$$

Уравнение (5) представляет собой дисперсионное соотношение модели (1). Оно впервые было получено С.Н.Нуритдиновым (Доклад на семинаре К.Ф.Огородникова. Ленинград, 1985; Звездные скопления, 1987, УрГУ, с.97) как частный случай дисперсионного уравнения пульсирующего аналога модели (1). В работе В.Л.Поляченко [2] (5) выводится иначе с упоминанием о нашем результате. Отметим, что модель (1) полностью устойчива относительно объемных возмущений. Используя разложение $P_n(\operatorname{ch}\tau)$ по кратным аргументам, легко представить (5) в форме суммы. Тогда при нечетном n корни находятся в интервалах (0, 1), (2, 4), $\ldots, (n-2, n)$. Еще столько же корней расположено симметрично относительно точки $\omega = 0$.

Наконец, можно указать сам основной результат – выражение точной формы собственных колебаний модели (1) через многочлен Якоби, после того, как выделена одна из сферических гармоник:

$$\Phi_n = \varepsilon(1-r^2) r^m P_m\left(\frac{z}{2}\right) P^{(m+\frac{1}{2},\,1)}_{\frac{n-m}{2}-1}(r^2) \qquad (m<n,\ \varepsilon \ll 1) \tag{6}$$

1. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М.: Наука, 1976. – 447 с.

2. *Поляченко В.Л.* // Астрофизика. – 1987. – **27**. – С. 296.

Комментарий. Данная заметка окончательно решает в положительном смысле вопрос об устойчивости модели, промежуточной между шаром с круговыми орбитами (модель Эйнштейна) и шаром с изотропным распределением скоростей. В обоих крайних случаях устойчивость уже была известна. Напротив, при изменении анизотропии в сторону преобладания радиальных движений в некоторый момент должна возникать неустойчивость, что и подтвердил ряд авторов.

Поступила в редакцию 16.12.2002