Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 40 – 44

УДК 542

Нелинейные колебания некоторых однородных моделей звездных систем. I. Случай радиальных колебаний*

В.А. Антонов[1], **С.Н. Нуритдинов**[2]

[1] Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

[2] Кафедра астрономии Ташкенского университета, Узбекистан

При помощи метода лагранжевых координат изучены нелинейные радиальные колебания самосогласованных моделей – сферы Камма, диска Маклорена и цилиндра. Во всех этих моделях диаграмма скоростей анизотропна. Обнаружено, что цилиндр устойчив даже по отношению к нелинейным колебаниям. Сфера и диск устойчивы в нелинейном случае, если энергия возмущения меньше параболического предела.

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ДЕЯКИХ ОДНОРІДНИХ МОДЕЛЕЙ ЗОРЯНИХ СИСТЕМ. I. ВИПАДОК РАДІАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ, Антонов В.А., Нурітдінов С.Н. — За допомогою методу лагранжевих координат досліджено нелінійні радіальні коливання самоузгоджених моделей – сфери Камма, диска Маклорена та циліндра. В усіх цих моделях діаграма швидкостей анізотропна. Виявлено, що циліндр стійкий навіть по відношенню до нелінійних коливань. Сфера і диск стійкі в нелінійному випадку, якщо енергія збурення менша від параболічної межі.

NONLINEAR OSCILLATIONS OF SOME HOMOGENEOUS MODELS OF STELLAR SYSTEMS. I. THE CASE OF RADIAL OSCILLATIONS, by Antonov V.A., Nuritdinov S.N. — By the method of lagrangian coordinates the non-linear radial oscillations of self-consistent models – the Camm's sphere, the Maclaurin's disc and the cylinder – are studied. In all these models the velocity diagram is anisotropic. It is found that the cylinder is stable even with respect to non-linear oscillations. The sphere and disc are stable in non-linear case is the energy of perturbation is less than the parabolic limit.

1. Введение и постановка задачи

Среди разнообразных типов колебаний в звездных системах радиальные колебания представляют особый интерес. Они неизбежно возникают на начальных стадиях развития звездных систем, поскольку трудно ожидать, что теорема вириала выполняется с самого начала. Известно, что система, устойчивая в линейном приближении, может оказаться неустойчивой в нелинейном случае. Но при любой амплитуде радиальные колебания можно изучать методом лагранжевых координат.

Ниже выбраны для подробного рассмотрения несколько различных однородных моделей из тех соображений, что у них разные слои колеблются в фазе (синхронно), а это существенно облегчает анализ. Геометрически модель может представлять собой шар, цилиндр, диск или быть одномерной. Последний случай изучен в [1], и на нем мы не будем останавливаться.

В применяемом нами методе в каждом случае координаты и скорости произвольной звезды возмущенной системы представляем в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \alpha(t)\mathbf{r}_0 + \beta(t)\mathbf{v}_0 \tag{1}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t)\mathbf{r}_0 + \dot{\beta}(t)\mathbf{v}_0 \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ – соответственно радиус-вектор и вектор скорости в основном стационарном состоянии; $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – неизвестные функции, а точки над ними означают производную по времени. Векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ можно выразить обратно через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. При этом нужно принять во внимание то,

*Впервые опубликована в Вестник Ленингр. ун-та. – 1975. – № 7. – С. 133–138.

что якобиан преобразования $(\alpha\dot{\beta}-\beta\dot{\alpha})^n$, где n – размерность модели, не зависит от времени по теореме Лиувилля. В дальнейшем его будем считать равным единице, подвергнув в противном случае стационарную модель, служащую для сравнения, некоторому преобразованию подобия.

Итак, при

$$\alpha\dot{\beta}-\beta\dot{\alpha}=1 \tag{3}$$

из (1) и (2) получаем

$$\mathbf{r}_0 = \quad \dot{\beta}(t)\mathbf{r}-\beta(t)\mathbf{v} \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_0 = -\dot{\alpha}(t)\mathbf{r}+\alpha(t)\mathbf{v} \tag{5}$$

Далее рассмотрим разные случаи по отдельности.

2. Сферическая модель Камма

В номинальном стационарном состоянии фазовая модель Камма имеет вид [2, 3]

$$f_0 = c\left[\omega^2(a^2-r_0^2)-v_{0\perp}^2\left(1-\frac{r_0^2}{a^2}\right)-v_{0r}^2\right]^{-1/2}, \tag{6}$$

где c – некоторая постоянная; ω – частота обращения звезды; a – радиус системы; v_{0r} и $\mathbf{v}_0$ – трансверсальная и радиальная компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_0$. После этого интегрирование по $\mathbf{v}$, как можно показать, приводит к плотности, не зависящей от координат, но зависящей от времени. Однако так как масса системы сохраняется, проще следить за изменением ее возмущенного радиуса $R(t)$.

Из уравнения исходной фазовой границы

$$v_0^2+\omega^2r_0^2-\frac{(\mathbf{r}_0\times\mathbf{v}_0)^2}{a^2}=\omega^2a^2$$

с учетом (3)–(5) получаем уравнение новой границы

$$(\dot{\alpha}^2+\omega^2\dot{\beta}^2)r^2-2(\alpha\dot{\alpha}+\omega^2\beta\dot{\beta})\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}+(\alpha^2+\omega^2\beta^2)v^2-\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2}{a^2}=\omega^2a^2. \tag{7}$$

Величина $R(t)$ есть не что иное, как максимально допустимое значение модуля $\mathbf{r}$, при котором $\mathbf{v}$ еще может быть вещественным вектором. Если в (7) скорость разделить на свои составляющие, то при условии (3) равенство (7) можно преобразовать к виду

$$(\alpha^2+\omega^2\beta^2)\left(v_r-\frac{\alpha\dot{\alpha}+\omega^2\beta\dot{\beta}}{\alpha^2+\omega^2\beta^2}r\right)^2+\left(\alpha^2+\omega^2\beta^2-\frac{r^2}{a^2}\right)v_\perp^2=\omega^2\left(a^2-\frac{r^2}{\alpha^2+\omega^2\beta^2}\right). \tag{8}$$

Отсюда видно, что наибольшим допустимым значением r, при котором

$$v_r-\frac{\alpha\dot{\alpha}+\omega^2\beta\dot{\beta}}{\alpha^2+\omega^2\beta^2}r=0$$

и $v_\perp$ произвольно, является

$$R(t)=a\sqrt{\alpha^2+\omega^2\beta^2}. \tag{9}$$

Плотность системы меняется пропорционально R^{-3}, т.е.

$$\rho(t)=\rho_0(\alpha^2+\omega^2\beta^2)^{-3/2}, \tag{10}$$

где ρ_0 – плотность в основном состоянии. Тогда уравнение движения отдельной звезды имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{\omega^2\mathbf{r}}{(\alpha^2+\omega^2\beta^2)^{3/2}} \qquad \left(\omega^2=\frac{4}{3}\pi G\rho_0\right) \tag{11}$$

(G – гравитационная постоянная). Подставляя сюда выражение (1), получаем уравнение для двух неизвестных функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\ddot{\alpha}=-\frac{\omega^2\alpha}{(\alpha^2+\omega^2\beta^2)^{3/2}} \tag{12}$$

$$\ddot{\beta}=-\frac{\omega^2\beta}{(\alpha^2+\omega^2\beta^2)^{3/2}} \tag{13}$$

Как и следовало ожидать, интегралом движения этих уравнений является выражение (3).

Уравнения (12) и (13) имеют тот же вид, что и уравнения задачи двух тел, и, следовательно, можно считать их решения известными. Легко видеть, что траектория каждой звезды в возмущенном состоянии есть эллипс, т.е. модель устойчива при любой амплитуде, если энергия возмущения меньше параболического предела.

Радиальные колебания другой модели сферической системы (с круговыми орбитами звезд) изучены в [4]. Там доказана устойчивость даже при наличии неоднородности и, следовательно, асинхронности.

3. Двумерные модели

Теперь перейдем к изучению радиальных колебаний двумерных моделей, а именно кругового цилиндра [5] и диска Маклорена [6].

1.*Цилиндрическая модель.* В номинальном состоянии фазовая плотность цилиндрической модели

$$f_0 = c\,\delta\left[E - v_0^2 - \omega^2 r_0^2 + \Omega\,(\mathbf{r}_0\times\mathbf{v}_0)\right] \qquad (\Omega < 2\omega), \tag{14}$$

где E и Ω – некоторые параметры данной модели, δ – символ функции Дирака, $\omega^2 = 2\pi G\rho_0$, а остальные обозначения имеют прежний смысл. Предельный случай этой модели, когда параметр Ω принимает максимально возможное значение ($\Omega = 2\omega$), рассмотрен в [7], но там колебания были необязательно радиальные.

Подставляя (4) и (5) в (14), найдем возмущенную фазовую плотность

$$f_0 = c\,\delta\left[E - (\alpha^2+\omega^2\beta^2)v^2 - (\dot\alpha^2+\omega^2\dot\beta^2)r^2 + 2(\alpha\dot\alpha+\omega^2\beta\dot\beta)\mathbf{r}\mathbf{v} + \Omega\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\right]. \tag{15}$$

Разделим $\mathbf{v}$ на радиальную и трансверсальную составляющие. Тогда после обычных алгебраических преобразований, примененных уже для получения (8), и перехода к полярным координатам в пространстве скоростей (15) приводится к виду

$$f = c\,\delta(u^2 - w^2), \tag{16}$$

где

$$u^2 \equiv E - \frac{4\omega^2-\Omega^2}{4(\alpha^2+\omega^2\beta^2)}r^2, \tag{17}$$

а w определяется из уравнений

$$v_r = \frac{w\cos\theta}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2\beta^2}} + \frac{\alpha\dot\alpha+\omega^2\beta\dot\beta}{\alpha^2+\omega^2\beta^2}r, \tag{18}$$

$$v_\perp = \frac{w\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2\beta^2}} + \frac{\Omega}{2(\alpha^2+\omega^2\beta^2)}r. \tag{19}$$

Отсюда плотность

$$\rho(t) = \frac{2\pi c}{\alpha^2+\omega^2\beta^2}\int\limits_0^\infty w\cdot\delta(u^2-w^2)w\,dw = \frac{\pi c}{\alpha^2+\omega^2\beta^2}. \tag{20}$$

В частности, при подстановке в (20) равновесных значений $\alpha = 1$, $\beta = 0$ выясняется, что $c = \dfrac{\rho_0}{v}$.

Решением уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{21}$$

является потенциал $V = -\pi G\rho r^2$. Поэтому уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\omega^2\mathbf{r}}{\alpha^2+\omega^2\beta^2}. \tag{22}$$

Сравнение (22) с (1) дает нам искомые уравнения

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\omega^2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2 \beta^2}. \tag{23}$$

$$\ddot{\beta} = -\frac{\omega^2 \beta}{\alpha^2 + \omega^2 \beta^2}. \tag{24}$$

Переходим к исследованию вопроса устойчивости. Для этого сложим (23) и (24), предварительно умножив первое на $\dot{\alpha}$, а второе на $\omega^2 \dot{\beta}$ и проинтегрируем полученное уравнение. Имеем

$$\dot{\alpha}^2 + \omega^2 \dot{\beta}^2 = -\omega^2 \ln(\alpha^2 + \omega^2 \beta^2) + c_1, \tag{25}$$

где c_1 – произвольная постоянная, связанная с амплитудой колебаний. Введем величину $\gamma = \alpha^2 + \omega^2 \beta^2$, которая обратно пропорциональна ρ и прямо пропорциональна квадрату радиуса цилиндра. Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{4}\dot{\gamma}^2 + \omega^2 (\alpha \dot{\beta} - \beta \dot{\alpha})^2 = -\omega^2 \gamma \ln \gamma + c_1 \gamma. \tag{26}$$

Отсюда с учетом (3) находим

$$t = \frac{1}{2} \int \frac{d\gamma}{\sqrt{c_1 \gamma - \omega^2 \gamma \ln \gamma - \omega^2}}, \qquad c_1 > \omega^2. \tag{27}$$

Из (27) сразу видно, что при сравнительно малых начальных отклонениях $|1-\gamma|$ и $|\dot{\gamma}|$ (т.е. малых $|1-\alpha|$ и $|\beta|$) γ есть периодическая функция от времени и система устойчива. Наибольшее и наименьшее значения γ определяются из условия $\dot{\gamma} = 0$, или

$$\omega^2 = -\omega^2 \gamma \ln \gamma + c_1 \gamma.$$

Устойчивость будет сохраняться и при больших отклонениях, поскольку подкоренное выражение в (27) имеет одно экстремальное значение – максимум и при $\gamma \to \infty$ стремится к $(-\infty)$, а в точке $\gamma = 0$ равно $(-\omega^2)$. Таким образом, обратно из (27) γ выражается некоторой периодической функцией от t.

Переходя к обобщенным полярным координатам по формулам

$$\alpha = \sqrt{\gamma} \cos \varphi, \qquad \beta = \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega} \sin \varphi,$$

из (26) находим траекторию отдельной звезды в неявной форме:

$$\varphi = \frac{\omega}{2} \int \frac{d\gamma}{\gamma \sqrt{c_1 \gamma - \omega^2 \gamma \ln \gamma - \omega^2}} + \mathrm{const}. \tag{28}$$

Теперь, зная $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, а также задавшись $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$, легко определить $\mathbf{r}(t)$ по формуле (1)

2.Диск Маклорена. Фазовая модель диска Маклорена по виду мало отличается от (14), и в прежних обозначениях

$$f_0 = c \left[E - v_0^2 - \omega^2 r_0^2 + 2\Omega \left(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \right) \right]^{-1/2} \quad (\Omega < 2\omega) \tag{29}$$

с некоторыми новыми параметрами c, E, Ω. Поэтому теперь по аналогии с (16) возмущенная фазовая плотность

$$f = c(u^2 - w^2)^{-1/2}. \tag{30}$$

Возмущенный потенциал, который можно представить в виде

$$V_1(r,t) = -\frac{\omega_1^2(t)}{2} r^2,$$

найдем из принципа подобия. Пусть r_0 – координата некоторой точки в стационарной системе. В возмущенном состоянии этой точке будет соответствовать другая точка с координатами $r_1 = \lambda r_0$, где из подобия двух систем

$$\lambda = \frac{R(t)}{a} \tag{31}$$

($R(t)$ – максимально возможное значение $r(t)$, a – номинальный радиус диска). С другой стороны, соотношение сил

$$\frac{F_1(r_0)}{F_0(r_0)} = \frac{\omega_1^2}{\omega^2}. \tag{32}$$

Согласно принципу подобия $F_1(r_1) = \lambda^{-2}F_0(r_0)$. В самой возмущенной системе, очевидно, имеет место $F_1(r_1) = \lambda F_1(r_0)$. Разделив последние два равенства друг на друга, находим, что $F_1(r_0) = \lambda^{-3}F_0(r_0)$. Сравнивая это с (32) и учитывая (31), получим

$$\omega_1^2(t) = \frac{\omega^2 a^3}{R^3(t)}. \tag{33}$$

Возмущенный радиус системы соответствует значению $u=0$, т.е. из (17) имеем

$$R(t) = 2\sqrt{\frac{E(\alpha^2+\omega^2\beta^2)}{4\omega^2-\Omega^2}} \tag{34}$$

Следовательно, уравнение движения отдельной звезды есть

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\omega^2 a^3(4\omega^2-\Omega^2)^{3/2}}{8E^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{(\alpha^2+\omega^2\beta^2)^{3/2}} \tag{35}$$

Вид уравнения (35) такой же, как у (11). Другими словами, и в этом случае имеем устойчивость при не очень сильных возмущениях.

Таким образом, все рассмотренные модели устойчивы по отношению к радиальным пульсациям даже в нелинейном случае.

В заключение отметим, что устойчивость в линейном приближении шара Камма и цилиндра исследовалась в [8], а диска Маклорена – в [9, 10].

1. *Kalnajs A.J.* The perpendilcular oscillatons of a homogeneous slab of stars // Astrophys. J. – 1973. – **180**, № 5. – P. 1023–1034.
2. *Camm G.L.* Self-gravitationg star systems. II // MN RAS. – 1952. – **112**, № 2. – P. 155–176.
3. *Ahmad A.* Uniform density equilibrium model of self-gravitating stellar systems // Astroph. and Space Sci. – 1974. – **27**, № 2. – P. 343–350.
4. *Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б., Фридман А.М.* Об устойчивости тел вращения относительно радиальных возмущений // Доклады АН СССР. – 1968. – **182**, № 4. – С. 794–796.
5. *Бисноватый-Коган Г.С.* Устойчивость гравитирующих систем точечных масс. I. Ограниченный по радиусу цилиндр // Астрофизика. – 1971. – **7**, № 1. – С. 121–133.
6. *Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б.* О моделях скоплений точечных масс с квадратичным гравитационным потенциалом // Астрофизика. – 1970. – **6**, № 3. – С. 387–396.
7. *Антонов В.А.* Неустойчивость холодного вращающегося гравитирующего цилиндра // Доклады АН СССР. – 1973. – **209**, № 3. – С. 584–585.
8. *Поляченко В.Л., Шухман И.Г.* Устойчивость гравитирующих систем с квадратичным потенциалом. II. // Астрон. ж. – 1973. – **50**, № 5. – С. 721–725.
9. *Kalnajs A.J.* The equilibria and oscillatons of a family of uniformly rotating stellar discs // Astrophys. J. – 1972. – **175**, № 1. – С. 63–76.
10. *Поляченко В.Л., Шухман И.Г.* Устойчивость гравитирующих систем с квадратичным потенциалом. I. // Астрон. ж. – 1973. – **50**, № 1. – С. 97–100.

Комментарий. Однородность системы существенна. Как отмечал еще К.Ф.Огородников, с неоднородностью должно быть связано стремление к асинхронности в колебаниях центральных и периферических слоев. Согласно современным численным исследованиям разных авторов, при достаточно слабой пространственной неоднородности все-таки за счет «сцепления» взаимной гравитацией могут существовать режимы пульсаций системы как целого. В случае же сильной неоднородности периферия необратимо поглощает энергию пульсаций и последние затухают. Основной результат настоящей статьи (о модели Камма) потом неоднократно переоткрывался.

Поступила в редакцию 16.12.2002