Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 38 – 39

УДК 542

Неустойчивость холодного вращающегося гравитирующего цилиндра*

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

Рассмотрены нелинейные колебания однородного самогравитирующего цилиндра с конечным радиусом.

НЕСТІЙКІСТЬ ХОЛОДНОГО ГРАВІТУЮЧОГО ЦИЛІНДРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, Антонов В.А.— Розглянуто нелінійні коливання однорідного самогравітуючого циліндра з скінченим радіусом.

THE INSTABILITY OF A COLD GRAVITATING ROTATING CYLINDER, by Antonov V.A.— Non-linear oscillations of a homogeneous self-gravitating cylinder having finite radius are considered.

В [1] рассмотрена следующая модель. Большое число частиц, движущихся по круговым орбитам в одном направлении, образуют однородный цилиндр с плотностью ρ_0. Для стационарной модели требуется угловая скорость вращения $\Omega = \sqrt{2\pi G\rho_0}$. Рассматривается устойчивость цилиндра по отношению к поперечным возмущениям. В [1] сделан вывод об устойчивости, но он не точен, поскольку не выражает явно граничные условия, и колебания изучены только в линейном приближении.

Рассмотрим колебания однородного цилиндра с конечным радиусом r_0, но в нелинейной постановке, причем ограничимся случаем, когда лагранжевы координаты частиц линейно зависят от начальных координат x_0, y_0:

$$\begin{aligned} x &= \alpha(t)x_0 + \beta(t)y_0 \\ y &= \gamma(t)x_0 + \delta(t)y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Линейная зависимость (1) сохраняется все время, если ей подчиняются начальные скорости, так как преобразование (1) переводит круговой цилиндр в эллиптический, внутри которого напряженность поля, как известно, линейно выражается через координаты. Уравнение поверхности $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$ переходит в

$$(\gamma^2+\delta^2)x^2 + (\alpha^2+\beta^2)y^2 - 2(\alpha\gamma+\beta\delta)xy = r_0^2(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$$

откуда для полуосей сечения $a(t)$ и $b(t)$ получаем

$$a^2+b^2 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)r_0^2, \qquad ab = (\alpha\delta-\beta\gamma)r_0^2 \tag{2}$$

В системе координат Oxy, связанной с главными осями, потенциал эллиптического цилиндра во внутренней области берем в форме

$$\Phi = \frac{2GM}{a+b}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right) + 2GM\ln(a+b) \tag{3}$$

где $M = \pi\rho_0 r_0^2$, а для внешней области a и b следует заменить всюду соответственно на $\sqrt{a^2+\lambda}$ и $\sqrt{b^2+\lambda}$, где λ – положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1.$$

*Впервые опубликована в Доклады АН СССР. – 1973. – **209**, № 3. – С. 584–585.

Указанные выражения потенциала можно получить как предельный случай из потенциала эллипсоида [2], но с некоторыми предосторожностями при выборе аддитивной константы, чтобы асимптотика на больших расстояниях

$$\Phi = GM(2\ln 2R+1)+O(1/R)$$

зависела только от полной массы M, но не от деформации цилиндра.

Интегрируя (3) по всему сечению с учетом изменившейся плотности, получаем потенциальную энергию (на единицу длины цилиндра)

$$U = GM^2\left[\ln(a+b)+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}\Omega^2 r_0^2 M\left\{\ln\left[(\alpha+\delta)^2+(\beta-\gamma)^2\right] r_0^2+1\right\}.$$

Следовательно, интеграл действия имеет вид

$$\frac{Mr_0^2}{4}\int\left\{\frac{1}{2}\left(\dot\alpha^2+\dot\beta^2+\dot\gamma^2+\dot\delta^2\right)-\Omega^2\ln\left[(\alpha+\delta)^2+(\beta-\gamma)^2\right]\right\}dt+\text{const},$$

а уравнения движения

$$\begin{aligned}\ddot\alpha &= \ddot\delta = -2\Omega^2(\alpha+\delta)q^{-1}\\ \ddot\beta &= -\ddot\gamma = -2\Omega^2(\beta-\gamma)q^{-1}\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$q = (\alpha+\delta)^2+(\beta-\gamma)^2 = \left(\frac{a+b}{r_0}\right)^2.$$

Из (4) следует

$$t = \frac{1}{2}\int\frac{dq}{\sqrt{cq-c_1-4\Omega^2 q\ln q}}, \tag{5}$$

причем ширина интервала, в котором подкоренное выражение положительно, стремится к нулю вместе с параметрами начального толчка. Таким образом, при не слишком сильных возмущениях $a+b$ изменяется периодически. Однако $\alpha-\delta$ и $\beta+\gamma$ оказываются совершенно произвольными линейными функциями времени, так что

$$\left(\frac{a-b}{r_0}\right)^2 = (c_2t+c_3)^2+(c_4t+c_5)^2. \tag{6}$$

Соотношение (6) показывает, что любой начальный толчок, не удовлетворяющий специальному условию $c_2=c_4=0$, приводит в конце концов систему к сингулярному состоянию $b=0$. При малых возмущениях это происходит вблизи $a=2r_0$.

1. *Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б.* и др. // Журнал прикл. мех. и техн. физики. – 1969. – № 3. – С. 3.
2. *Идельсон Н.И.* Теория потенциала. – М.–Л., 1936.

Комментарий. Поперечные колебания холодного вращающегося гравитирующего цилиндра в линейном приближении распадаются на два класса:

а) Локальное внутреннее колебание с произвольным профилем, не зависящее явно от граничных условий и точно укладывающееся в постановку задачи по Джинсу с учетом вращения.

б) Глобальные колебания, очень похожие на колебания фигур равновесия несжимаемой жидкости.

В данной работе рассмотрен частный случай колебаний типа б). Он интересен нетривиальным обращением частоты в нуль. Неустойчивость носит пограничный характер и выявляется строго только при нелинейном расчете. В данном случае нелинейная эволюция, описываемая уравнениями (4), очень похожа на линейную, но это, конечно, не является общим законом.

Цилиндрические модели интересны не столько реальными приложениями, сколько как промежуточная ступень к познанию более сложных сферических систем. После теоретического взгляда на цилиндр с круговыми орбитами уже не столь удивительно, что шар с круговыми орбитами (модель Эйнштейна) устойчив в том же смысле, с делением колебаний на локальные и глобальные. Но нелинейный анализ для шара затруднен – он удается только в специфическом случае пульсаций, сохраняющих сферическую симметрию.

Поступила в редакцию 16.12.2002