УДК 542

О неустойчивости стационарных сферических моделей с чисто радиальными движениями*

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулковско

Доказується неустойчивість сферических звездных систем, в которых орбиты звезд чисто радиальные.
ПРО НЕСТІЙКІСТЬ СТАЦІОНАРНИХ СФЕРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З ВИКЛЮЧНО РАДІАЛЬНИМИ РУХАМИ, Антонов В.А.— Доводиться нестійкість сферических зоряних систем, в яких орбіти зірок виключно радіальні.
ON THE INSTABILITY OF STATIONARY SPHERICAL MODELS WITH PURELY RADIAL MOTIONS, by Antonov V.A.— The instability of spherical stellar in which orbits of stars are purely radial is proved.

Модели сферических самогравитирующих звездных систем, в которых все траектории проходят первоначально вблизи центра, представляют интерес с различных точек зрения. Такие модели совместимы не только с взрывной космогонией, но и с представлением об образовании звезд из газообразного сферического облака, если они при своем возникновении не получают существенных пекулярных движений и благодаря этому «падают» на центр. Другой вопрос, способна ли такая система устойчиво существовать длительное время. Мы докажем, что оно неустойчиво по отношению к регулярным силам и должно перестраиваться за время порядка периода обращения отдельной звезды. Систему можно представлять себе состоящей из отдельных радиальных потоков, каждый со своим значением интеграла энергии E . Для удобства считаем, что имеется конечное число N таких потоков, хотя это и не существенно. Легко видеть, что абсолютная величина скорости в каждом потоке дается формулой

$$|v_{\nu}| = \sqrt{2(E_{\nu} - \Phi(r))},$$

а парциальная плотность вещества

$$\rho_{\nu} = \frac{h_{\nu}}{r^2 |v_{\nu}(r)|},$$

где ν – номер потока, E_{ν} и h_{ν} – некоторые характерные для него константы, $\Phi(r)$ – гравитационный потенциал системы в целом. За точкой поворота следует считать $\rho_{\nu} = 0$. Учитывая еще уравнение Пуассона, получаем основное уравнение для определения структуры модели

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \sum_{\nu=1}^N \frac{h_{\nu}}{\sqrt{2(E_{\nu} - \Phi(r))}} \quad (1)$$

которое уже встречалось в работе Агеяна [1] для случая одного потока. Там была отмечена асимптотика в центре

$$\Phi \sim |\ln r|^{1/3},$$

справедливая и для общего случая. Эта сингулярность является довольно слабой и не препятствует дальнейшим рассуждениям. Решить уравнение (1) в общем виде не удастся, но конкретная

*Впервые опубликована в «Динамика галактик и звездных скоплений» / под ред. Т.Б.Омарова. – Алма-Ата: «Наука» Каз. ССР, 1973. – С. 139–144.

форма решения нам и не понадобится. Для исследования устойчивости мы применим квазиклассическое приближение, отличающееся от применявшегося в развитии кольцеобразных возмущений в цилиндре [2] только другим направлением поверхностей равной фазы. Именно, возьмем вариацию потенциала пропорциональной секториальной гармонике $Y_n(\theta, \varphi)$, т.е.

$$\delta\Phi = \sin^n \theta \cdot \cos n\varphi \cdot \chi(r), \quad (2)$$

где $\chi(r)$ – некоторая медленно меняющаяся функция. Тогда уравнение Пуассона можно записать в виде

$$n(n+1)\delta\Phi = \sin^n \theta \cdot \cos n\varphi \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\chi}{dr} \right) - 4\pi Gr^2 \delta\rho \quad (3)$$

В рассматриваемом приближении $n \gg 1$, и мы должны в правой части (3) оставить члены, пропорциональные n^2 . Дополнительное радиальное смещение частиц, как и действующая в этом направлении сила $\frac{\partial}{\partial r} \delta\Phi$, вообще не растет вместе с n . В силу общих свойств симметрии [3], сразу можно утверждать, что трансверсальное смещение обязано иметь зависимость от угловых координат типа $\text{grad } Y_n(\theta, \varphi)$, и в зоне $\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \sim n^{-1/2}$, где выражение (2) существенно отлично от нуля, $\frac{\partial Y_n}{\partial \theta}$ имеет меньший порядок, чем $\frac{\partial Y_n}{\partial \varphi}$. При вычислении дивергенции, необходимой для составления уравнения неразрывности, это различие еще более усилится. Итак, достаточно ограничиться смещениями по θ вблизи экватора. Относя частицам каждого потока линейное смещение x_ν , получаем упрощенную форму уравнения неразрывности

$$\delta\rho_\nu = -\frac{\rho_\nu}{2r} \left(\frac{\partial x_\nu^+}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_\nu^-}{\partial \varphi} \right). \quad (4)$$

Верхние знаки $+$ и $-$ в (4), как и далее, введены для различия двух половин потока, скорости v_ν которых имеют противоположные знаки. Уравнение же Пуассона после отбрасывания членов низшего порядка имеет вид

$$n^2 \delta\Phi = -\frac{\partial^2 \delta\Phi}{\partial \varphi^2} = -4\pi Gr^2 \sum_{\nu=1}^N \delta\rho_\nu \quad (5)$$

Используя (4) и (5), можно теперь получить уравнения движения по θ в терминах поперечного отклонения $x_\nu(r)$ и вращательного момента на единицу массы $J_\nu(r)$:

$$\frac{dx_\nu^+}{dt} = \frac{J_\nu^+ + v_\nu x_\nu^+}{r}, \quad \frac{dx_\nu^-}{dt} = \frac{J_\nu^- - v_\nu x_\nu^-}{r}, \quad \frac{dJ_\nu^+}{dt} = \frac{dJ_\nu^-}{dt} = 2\pi Gr \sum_{\mu=1}^N \rho_\mu (x_\mu^+ + x_\mu^-). \quad (6)$$

Неустойчивость доказывается построением функционала Ляпунова

$$H(t) = \sum_{\nu=1}^N \int \frac{x_\nu^+ J_\nu^+ + x_\nu^- J_\nu^-}{r} dm_\nu \quad (7)$$

где $dm_\nu = r^2 \rho_\nu dr$ означает элемент массы вдоль некоторого диаметра (точнее, вдоль элементарного конуса), а интегралы берутся между точками поворота соответствующего потока. Дифференцируя (7) и учитывая инвариантность dm_ν , получаем после некоторых вычислений

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \int \frac{(J_\nu^+)^2 + (J_\nu^-)^2}{r^2} dm_\nu + 2\pi Gr^2 \int \left[\sum_{\nu=1}^N \rho_\nu (x_\nu^+ + x_\nu^-) \right]^2 dr > 0.$$

Это означает даже, что в нашей схеме устойчивых мод нет вовсе.

Ранее [4] нами была доказана устойчивость широкого класса моделей со сферически симметричным распределением скоростей. Интересно было бы проследить за потерей устойчивости при постепенном увеличении радиальной вытянутости диаграммы скоростей. Препятствием пока является сравнительная сложность известных моделей.

1. Агекян Т.А. Сферические системы звезд и галактик на ранних стадиях эволюции // Вестник ЛГУ. – 1962. – № 1. – С. 152–161.

2. Михайловский А.Б., Фридман А.М. Пучковая неустойчивость в гравитирующих средах // Журнал эксперим. и теорет. физики. – 1971. – **61**, № 2. – С. 457–468.
3. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. – М.: Гостехиздат, 1957.
4. Антонов В.А. Решение задачи об устойчивости звездной системы с законом плотности Эмдена и сферическим распределением скоростей // Вестник ЛГУ. – 1962. – № 19. – С. 96–111.

Комментарий. Выступая в дискуссии сразу после доклада, А.М.Фридман заметил, что интуитивно результат выглядит просто как применение критерия Джинса к модели с нулевой дисперсией трансверсальных скоростей.

Однако на самом деле выполнено только одно из условий справедливости локального анализа: $n \gg 1$, т.е. длина волны возмущения мала в сравнении с размерами системы. Для полной локальности требовалось бы, чтобы и время развития возмущения было много меньше характерного времени передвижения частиц. Однако то и другое время имеют здесь одинаковый порядок $\sim (G\rho)^{-1/2}$. Итак, результат статьи получен за пределами работоспособности локального анализа и, по нашему мнению, сохраняет значимость. Почти автоматически вывод переносится на цилиндрические и плоские модели с резким преобладанием радиальных движений, а также на слои с доминированием вертикальности движений над остаточными горизонтальными скоростями.

Кроме того, дискретизация потоков по величине энергии – физическая, а не вводимая для удобства – сама тоже влечет за собой неустойчивость в направлении движения потока. Это можно показать тем же методом, как в статье, на идеализированном примере гравитирующей среды, изначально неоднородной по y и подверженной, кроме собственного, внешнему гравитационному полю, но однородной по x, z . Предполагаем также симметрию относительно плоскости $y = 0$ и период l по y . Ограничиваемся случаем одного холодного потока частиц со скоростью $v(y, t)$. Введя толщину слоя $F = \int_0^y \rho(y) dy$, гидродинамические уравнения можно записать как

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -2\pi G F, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Предполагая, что возмущение сохраняет те же элементы симметрии, получаем линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\delta v \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial \delta v}{\partial y} - 2\pi G \delta F, \quad \frac{\partial \delta F}{\partial t} = -v \frac{\partial \delta F}{\partial y} - \delta v \frac{\partial F}{\partial y},$$

и тогда после некоторых выкладок

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \delta v \delta F dy = - \int_0^l [\rho (\delta v)^2 + 2\pi G (\delta F)^2] dy < 0.$$

Таким образом, неустойчивость сохраняется при любой степени начальной неоднородности $\rho(y)$.

Сказанное относится к пучкам не только прямолинейных, но и слабо искривленных траекторий. Однако есть модели, в которых таким искривлением никак пренебречь нельзя.

Поступила в редакцию 16.12.2002