Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 33 – 34

УДК 542

По поводу коллективных процессов в гравитирующих системах*

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

При помощи точного уравнения Больцмана доказывается устойчивость одномерной самогравитирующей системы.

ПРО КОЛЕКТИВНІ ПРОЦЕСИ У ГРАВІТУЮЧИХ СИСТЕМАХ, Антонов В.А.— За допомогою точного рівняння Больцмана доводиться стійкість одновимірної самогравітуючої системи.

ON THE CO-OPERATIVE PROCESSES IN GRAVITATING SYSTEMS, by Antonov V.A.— The stability of the one-dimensional self-gravitating system is proved with aid of the exact Boltzmann's equation.

В работе [1] рассмотрен вопрос об устойчивости «одномерной» самогравитирующей системы (т.е. однородной в направлениях x и y). Линеаризованные уравнения развития возмущения в такой системе имеют вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{dU}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{dU_1}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2U_1}{dz^2} = -4\pi mG \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1 dv, \tag{2}$$

причем мы несколько изменим обозначения, принятые в [1], введя для гравитационного потенциала более привычное обозначение U. Значком “1” отмечены параметры возмущения.

В указанной статье путем применения к системе (1), (2) метода малого параметра делается вывод о неустойчивости и вычисляется критическая длина. Однако применение этого метода неверно по двум причинам. Во-первых, в роли малого параметра выступает именованная величина. Во-вторых, на расстоянии порядка критической длины свойства системы существенно меняются, а тогда само понятие критической длины неприменимо, независимо от того, имеет ли система резкую границу или постепенно сходит на нет. Ниже мы докажем, что стационарная одномерная самогравитирующая система устойчива, если только диаграмма скоростей имеет одновершинный характер, т.е. если фазовая плотность в невозмущенном состоянии является убывающей функцией интеграла энергии $E = \frac{v^2}{2} - U$.

Для доказательства достаточно применить метод, развитый в [2] и [3]. Специфика одномерного случая состоит лишь в несколько иной форме потенциала материальной точки: вместо $-\frac{mG}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ надо взять $2\pi mG|z_1 - z_2|$. Повторяя выкладки, приведенные в [2] и начале [3], видим, что для вывода об устойчивости достаточно установить положительность выражения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2}{\frac{d\nu}{dU}} dz + 2\pi mG \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(z)p(z_1)|z - z_1| dz\, dz_1 \tag{3}$$

*Впервые опубликована в Трудах Астрон. обсерв. Ленингр. ун-та. – 1968. – **25**. – С. 98–100.

для произвольных функций $p(z)$ (имеющих смысл дополнительной звездной плотности), которые удовлетворяют условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(z)dz = 0 \tag{4}$$

(ν – звездная плотность).

Введем функцию

$$\tau(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} p(z)dz = -\int\limits_{z}^{\infty} p(z)dz,$$

для которой

$$\tau(-\infty) = \tau(\infty) = 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dz = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{z}^{\infty} p(x)dx \int\limits_{-\infty}^{z} p(y)dy = -\iint\limits_{(x>y)} p(x)p(y)(x-y)dxdy.$$

Тогда выражение (3) можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau'^2}{\frac{d\nu}{dU}} - 4\pi mG\tau^2 \right) dz,$$

и вопрос о его знаке сводится к нахождению следующего минимума:

$$\lambda = \min \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau'^2}{\frac{d\nu}{dU}} dz}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} 4\pi mG\tau^2 dz} \tag{6}$$

при условии (5). Но этот минимум есть ни что иное, как первое собственное значение уравнения

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\tau'}{\frac{d\nu}{dU}} \right) + 4\pi mG\lambda\tau = 0. \tag{7}$$

Однако уравнению (7) с $\lambda = 1$ удовлетворяет функция $\tau = \nu(z)$. Она является первой собственной функцией, поскольку не меняет знака. Итак, $\lambda = 1$, следовательно, выражение (3), вообще говоря, положительно и обращается в нуль только при $\tau = c\nu$, $p = c\frac{d\nu}{dz}$, что соответствует просто смещению системы как целого. Этим устойчивость доказана.

1. *Максумов М.Н., Марочник Л.С.* // Астрон. ж. – 1965. – **42**, вып. 6. – С. 1261.
2. *Антонов В.А.* // Астрон. ж. – 1960. – **37**, вып. 5. – С. 918.
3. *Антонов В.А.* // Вестник ЛГУ. – 1962. – № 19. – С. 96.

Комментарий. Здесь упомянуто характерное, много раз встречающееся положение вещей: только в тех направлениях, по которым система квазиоднородна, можно – с рядом оговорок – применять критерий Джинса. Но уже в силу элементарных оценок по порядку величины в любой самогравитирующей системе обязательно найдется направление, по которому она существенно неоднородна. Точнее, соответствующий размер системы оказывается того же порядка, что и рассчитанная длина Джинса, из-за чего критерий Джинса неинформативен. Требуется обязательно глобальный подход. Исключение могут составлять газовые системы, близкие к фазовому переходу, когда гравитационная неустойчивость смыкается с термодинамической. Это обстоятельство делает проблему устойчивости гравитирующих систем особенно трудной и интересной. Плазма – другое дело, ее всегда можно представить достаточно протяженной во всех направлениях для работоспособности локальных методов анализа устойчивости.

Поступила в редакцию 16.12.2002