Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 · № 1 · 2003 С. 25 – 32

УДК 542

Замечания к проблеме устойчивости в звездной динамике*

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

К проблеме устойчивости звездных систем применяется метод А.М.Ляпунова. Для частного случая, когда фазовая плотность зависит только от интеграла энергии, найден критерий устойчивости, хотя и довольно сложный.

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ В ЗОРЯНІЙ ДИНАМІЦІ, Антонов В.А.— До проблеми стійкості зоряних систем застосовується метод А.М.Ляпунова. Для часткового випадку, коли фазова густина залежить тільки від інтегралу енергії, знайдено критерій стійкості, хоча і доволі складний.

REMARKS ON THE PROBLEM OF STABILITY IN STELLAR DYNAMICS, by Antonov V.A.— Lyapunov's method is applied to the problem of stability of stellar systems. The stability criterium is obtained for the particular case, when the phase density depends only on the energy integral.

1. Устойчивость стационарной звездной системы

Если принять обычные для звездной динамики упрощения – отвлечься от различия масс звезд, не учитывать влияния межзвездной среды и магнитных полей, то состояние каждой из звезд, входящих в звездную систему, вполне характеризуется тремя пространственными координатами и тремя составляющими скорости. Иначе говоря, каждой звезде соответствует точка шестимерного фазового пространства. Эти точки не выходят за пределы некоторого ограниченного фазового объема γ, так как любая реальная звездная система ограничена в пространстве и имеет конечную скорость отрыва.

Разобьем фазовый объем γ на n ячеек и обозначим число звезд, соответствующих i-ячейке, через N_i. Как будут изменяться величины N_i со временем? Если оставить в стороне флуктуации, то производные N_i по времени являются некоторыми определенными функциями

$$\frac{dN_i}{dt} = \xi_i(N_1, N_2, \ldots, N_n) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{1}$$

В случае стационарного состояния все ξ_i тождественно обращаются в нуль.

Уравнения (1) по своей общей структуре совпадают с уравнениями движения автономных механических систем в обычном смысле слова. При этом N_i следует рассматривать как особого вида координаты. К уравнениям (1) можно без существенных изменений применить теорию устойчивости, разработанную для обычных механических систем [1].

Действительно, пусть звездная система, находящаяся в стационарном состоянии, вследствие каких-либо причин (например, процессы звездообразования, возмущения со стороны соседних звездных систем) немного отклонилась от этого состояния. Тогда N_i можно разложить на двоякого рода слагаемые

$$N_i = N_i' + N_i'', \tag{2}$$

*Впервые опубликована в Астрон.ж. – 1960. – **37**, № 5. – С. 918–926.

где N_i' соответствуют стационарному состоянию, а N_i'' малы по сравнению с N_i'. Подставим в (1), отбрасывая члены высшего порядка малости.

$$\frac{dN_i''}{dt} = \sum a_{ij} N_j'', \qquad a_{ij} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial N_j}\right)_{N_i = N_i'} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n). \tag{3}$$

Как известно, общее решение уравнений (3) можно представить в виде линейной комбинации частных решений.

$$N_i = C^{(1)} N_i^{(1)} + C^{(2)} N_i^{(2)} + \ldots + C^{(n)} N_i^{(n)}. \tag{4}$$

Известно также, что при подходящем выборе частных решений последние разбиваются на группы определенного вида.

Выпишем одну из таких групп:

$$\begin{aligned} N_i^{(r+1)} &= P_{i1} e^{kt}, \\ N_i^{(r+2)} &= (tP_{i1} + P_{i2}) e^{kt}, \\ N_i^{(r+3)} &= \left(\frac{t^2}{2} P_{i1} + tP_{i2} + P_{i3}\right) e^{kt}, \\ &\ldots \\ N_i^{(r+m)} &= \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} P_{i1} + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} P_{i2} + \ldots + P_{im}\right) e^{kt}. \end{aligned} \tag{5}$$

P_{i1}, P_{i2} не зависят от времени.

При переходе от одной группы к другой k (характеристическое число) и m (число решений в группе), вообще говоря, меняются. Непосредственным следствием является данный Ляпуновым критерий устойчивости по первому приближению. Именно, если хотя бы одно из характеристических чисел имеет положительную вещественную часть или имеет равную нулю вещественную часть, но соответствует группе с $m > 1$, то движение, описываемое уравнениями (3), является неустойчивым. В противном случае имеет место устойчивость.

Таким образом, мы подходим к проблеме устойчивости с другой стороны, чем, например, С.Чандрасекар ([2], гл.IV, § 3.). Там идет речь об устойчивости орбиты отдельной звезды, здесь – об устойчивости звездной системы как целого.

Необходимо сделать также следующее замечание. Вместо чисел N_i характеристикой звездной системы может служить непрерывная фазовая плотность. Теоретически такую функцию всегда можно получить, сгладив местные неоднородности. В принципе нет большей разницы, каким из этих двух способов мы характеризуем звездную систему, но вычисления удобнее производить, заменив N_i фазовой плотностью, а суммы – интегралами.

Принимаем обозначения Чандрасекара: x, y, z – пространственные координаты, u, v, w – соответствующие компоненты скорости, $\psi(x, y, z, u, v, w, t)$ – фазовая плотность, $\Phi(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия на единицу массы, m – масса звезды, G – постоянная тяготения.

Тогда (1) заменяется следующим уравнением ([2], гл.III, § 4).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial w} = 0, \tag{6}$$

или, в векторной форме ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\mathbf{v}$ – вектор скорости)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathrm{grad}_{\mathbf{r}} \Psi \cdot \mathbf{v} - \mathrm{grad}_{\mathbf{v}} \Psi \cdot \mathrm{grad}_{\mathbf{r}} \Phi = 0. \tag{7}$$

Аналогом (2) является разложение фазовой плотности

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon f. \tag{8}$$

Через Ψ_0 мы будем обозначать фазовую плотность, когда требуется отметить стационарность, ε – малый параметр. Точно так же разложим потенциал

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon s. \tag{9}$$

Подставляем в (7) и отбрасываем члены второго порядка малости:
$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} f\cdot\mathbf{v}-\mathrm{grad}_{\mathbf{v}} f\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\Phi_0-\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} s\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf{v}}\Phi_0=0. \tag{10}$$
Частные решения этого уравнения ищем в виде, аналогичном (5)
$$\begin{aligned} f^{(r+1)}&=\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v})e^{kt},\\ f^{(r+2)}&=(t\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v})+\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v}))e^{kt},\\ f^{(r+3)}&=\left(\frac{t^2}{2}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v})+t\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})+\beta(\mathbf{r},\mathbf{v})\right)e^{kt},\\ &\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

2. Разбор одного из случаев стационарности

Согласно теореме Джинса, один из случаев стационарности звездной системы получается, когда фазовая плотности имеет вид $\Psi_0=F(E)$.

Будем предполагать, что $F(E)$ – убывающая функция, E – полная энергия, приходящаяся на единицу массы в переменной точке фазового пространства.
$$E=\Phi_0(\mathbf{r})+\frac{\mathbf{v}^2}{2}. \tag{12}$$
Подставляем в (10)
$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} f\cdot\mathbf{v}-\mathrm{grad}_{\mathbf{v}} f\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\Phi_0-\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} s\cdot\mathbf{v}\frac{dF}{dE}=0. \tag{13}$$
Введем теперь линейный оператор D.
$$D\{\ldots\}=\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\{\ldots\}\cdot\mathbf{v}-\mathrm{grad}_{\mathbf{v}}\{\ldots\}-\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\Phi_0.$$
Составим выражение
$$\frac{f}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{f(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'$$
и применим к нему оператор D.
$$D\left\{\frac{f}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{f(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}=\frac{Df}{\frac{dF}{dE}}+f\cdot D\left\{\frac{1}{\frac{dF}{dE}}\right\}+mG\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\iint\frac{f(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'. \tag{14}$$
Но E удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} E\cdot\mathbf{v}-\mathrm{grad}_{\mathbf{v}} E\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\Phi_0=0; \qquad DE=0. \tag{15}$$
Следовательно, также $D\left\{\frac{1}{\frac{dF}{dE}}\right\}=0.$

Закон тяготения позволяет написать связь, существующую вообще между фазовой плотностью и потенциалом
$$\Phi(r,t)=-mG\iint\frac{\Psi(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'.$$
Здесь, как и в дальнейшем, интегралы распространены на весь фазовый объем γ. С учетом (8) и (9) получаем также
$$s(r,t)=-mG\iint\frac{f(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'. \tag{16}$$
Из (14), (15), (16) следует, что основное уравнение (13) равносильно следующему:
$$\frac{1}{\frac{dF}{dE}}\frac{df}{dt}+D\left\{\frac{f}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{f(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}=0. \tag{17}$$

Переходим к функциям $\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v})$ (первая строка (11))

$$\frac{k\varphi}{\frac{dF}{dE}}+D\left\{\frac{\varphi}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{\varphi(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}=0 \tag{18}$$

Будем называть функцию $g(\mathbf{r},\mathbf{v})$ симметрической, если она удовлетворяет равенству $g(\mathbf{r},-\mathbf{v})=g(\mathbf{r},\mathbf{v})$, и антисимметрической, если она удовлетворяет равенству $g(\mathbf{r},-\mathbf{v})=-g(\mathbf{r},\mathbf{v})$.

Такие функции обладают следующими свойствами:

1. Правила сложения и умножения. C – симметрические функции, A – антисимметрические

$$\begin{array}{lll} C+C=C & C\cdot C=C & A\cdot A=C \\ A+A=A & C\cdot A=A & \end{array}$$

2. Симметрическая функция не может тождественно равняться антисимметрической, если только она не есть нуль.

3. Интеграл от антисимметрической функции по всему пространству скоростей равен нулю.

4. Оператор D переводит симметрическую функцию в антисимметрическую и наоборот.

5. Любая функция, заданная на фазовом пространстве, может быть представлена в виде суммы симметрического и антисимметрического слагаемых. Например:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r},\mathbf{v})&=\varphi_1(\mathbf{r},\mathbf{v})+\varphi_2(\mathbf{r},\mathbf{v}),\\ \varphi_1(\mathbf{r},\mathbf{v})&=\frac{\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v})+\varphi(\mathbf{r},-\mathbf{v})}{2},\\ \varphi_2(\mathbf{r},\mathbf{v})&=\frac{\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v})-\varphi(\mathbf{r},-\mathbf{v})}{2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Подставляем (19) в (18)

$$\frac{k\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}{\frac{dF}{dE}}+D\left\{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{\varphi_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}=0.$$

Отделяем симметрические слагаемые от антисимметрических и приравниваем суммы тех и других нулю.

$$k\varphi_1+D\varphi_2=0; \tag{20}$$

$$\frac{k\varphi_2}{\frac{dF}{dE}}+D\left\{\frac{\varphi_1}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{\varphi_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}=0. \tag{21}$$

Оставим пока в стороне случай $k=0$. Заметим, что ни одна из функций φ_1 и φ_2 не может обращаться в нуль тождественно. Действительно, если бы одна из них обращалась в нуль, то, согласно (20) и (21), обращалась бы в нуль и другая, т.е. получилось бы тривиальное нулевое решение.

Находим из (20) φ_1 и подставляем в (21)

$$\frac{k^2\varphi_2}{\frac{dF}{dE}}=D\left\{\frac{D\varphi_2}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{D\varphi_2(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}.$$

Последнее уравнение запишем кратко

$$\frac{k^2\varphi_2}{\frac{dF}{dE}}=A\varphi_2, \tag{22}$$

где A – новый линейный оператор.

Пусть $g(\mathbf{r},\mathbf{v})$ и $h(\mathbf{r},\mathbf{v})$ – всюду непрерывные функции, обращающиеся в нуль за пределами некоторого ограниченного фазового объема. Это свойство кратко выразим так: функции g и h принадлежат классу $\mathfrak{M}$. Докажем, что для функции класса $\mathfrak{M}$ оператор A является самосопряженным. Начнем с одного свойства оператора D – антисамосопряженности.

$$\iint D\{gh\}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=\iint \mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\{gh\}\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}-\iint \mathrm{grad}_{\mathbf{v}}\{gh\}\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\Phi_0\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$$

Преобразовав эти интегралы по формуле Грина-Остроградского, видим, что они обращаются в нуль.

(Это справедливо и тогда, когда только одна из функций принадлежит классу $\mathfrak{M}$.)

$$\iint D\{gh\}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=\iint g\cdot Dh\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}+\iint h\cdot Dg\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}.$$

$$\iint g\cdot Dh\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=-\iint hDg\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$$

$$\iint g\cdot Ah\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=\iint g\cdot D\left\{\frac{Dh}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{Dh(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=$$

$$=-\iint\left\{\frac{Dh}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{Dh(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}\cdot Dg\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=$$

$$=-\iint\frac{Dh\cdot Dg}{\frac{dF}{dE}}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}-mG\iiiint\frac{Dg(\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot Dh(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'.$$

Точно так же получаем

$$\iint h\cdot Ag\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=-\iint\frac{Dg\cdot Dh}{\frac{dF}{dE}}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}-mG\iiiint\frac{Dh(\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot Dg(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'$$

$$\iint g\cdot Ah\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=\iint h\cdot Ag\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}\qquad(g,h\in\mathfrak{M}),$$

что и требовалось доказать.

Используя свойство самосопряженности, легко доказать по обычному плану вещественность k^2. Для этого перейдем в (22) к комплексно-сопряженным величинам

$$\frac{\bar{k}^2\cdot\bar{\varphi}_2}{\frac{dF}{dE}}=A\bar{\varphi}_2.\tag{23}$$

Умножаем (22) на $\bar{\varphi}_2$, а (23) на φ_2, вычитаем и интегрируем по всему фазовому пространству:

$$(k^2-\bar{k}^2)\iint\frac{|\varphi_2|^2}{\frac{dF}{dE}}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=0.$$

Но выше мы предположили, что $\frac{dF}{dE}<0$. Отсюда $k^2=\bar{k}^2$. Следовательно, k может быть действительным (в том числе нулем) или чисто мнимым, но не может быть комплексным. Естественно, что действительным k соответствуют действительные частные решения уравнения (17), а мнимым – комплексные.

Пусть теперь двум различным характеристическим числам k_1 и k_2 соответствуют функции φ_{k_1} и φ_{k_2}

$$\frac{k_1^2\cdot\varphi_{2,k_1}}{\frac{dF}{dE}}=A\varphi_{2,k_1};\qquad\frac{k_2^2\cdot\bar{\varphi}_{2,k_2}}{\frac{dF}{dE}}=A\bar{\varphi}_{2,k_2}$$

Умножаем первое равенство на $\bar{\varphi}_{2,k_2}$, а второе на φ_{2,k_1}, вычитаем, интегрируем и получаем свойство обобщенной ортогональности

$$\iint\frac{\varphi_{2,k_1}\cdot\bar{\varphi}_{2,k_2}}{\frac{dF}{dE}}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=0.\tag{24}$$

Возьмем теперь частное решение уравнения (17), имеющее вид второй строчки (11). Подставим его в (17)

$$\frac{\varphi+k\alpha}{\frac{dF}{dE}}+D\left\{\frac{\alpha}{\frac{dF}{dE}}+mG\iint\frac{\alpha(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}=0.\tag{25}$$

Функцию $\alpha(r,v)$ также разложим на два слагаемых: симметрическое и антисимметрическое:

$$\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})=\alpha_1(\mathbf{r},\mathbf{v})+\alpha_2(\mathbf{r}',\mathbf{v}').$$

Подставляем в (25), учитываем (19) и разделяем симметрическую и антисимметрическую части:

$$\varphi_1+k\alpha_1+D\alpha_2=0;\tag{26}$$

$$\frac{\varphi_2 + k\alpha_2}{\frac{dF}{dE}} + D\left\{\frac{\alpha_1}{\frac{dF}{dE}} + mG\iint \frac{\alpha_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\} = 0. \qquad (27)$$

Опять не касаемся пока случая $k=0$. Из (26) находим α_1 и подставляем его в (27). Далее подставляем туда же значение φ_1 из (20) и получаем

$$\frac{k^2\varphi_2 + k^3\alpha_2}{\frac{dF}{dE}} + A\varphi_2 - k\cdot A\alpha_2 = 0.$$

Учитываем (22)

$$\frac{2k\varphi_2 + k^2\alpha_2}{\frac{dF}{dE}} = A\alpha_2. \qquad (28)$$

Умножаем (23) на α_2, а (28) на $\bar{\varphi}_2$, вычитаем и интегрируем

$$2k\iint \frac{|\varphi_2|^2}{\frac{dF}{dE}}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = 0.$$

Отсюда $\varphi_2 = 0$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что частные решения уравнения (17), соответствующие отличным от нуля характеристическим числам, не могут группироваться по два или более. Заметим, что если среди характеристических чисел есть равные, то выполнения (24) можно добиться линейным преобразованием.

Несколько иные соотношения получаются при $k=0$. Из (20) имеем $D\varphi_2 = 0$, следовательно, $A\varphi_2 = 0$. (21) и (26) получают такой вид:

$$D\left\{\frac{\varphi_1}{\frac{dF}{dE}} + mG\iint \frac{\varphi_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\} = 0, \qquad \varphi_1 = -D\alpha_2.$$

Отсюда $A\alpha_2 = 0$, (27) принимает вид:

$$\frac{\varphi_2}{\frac{dF}{dE}} + D\left\{\frac{\alpha_1}{\frac{dF}{dE}} + mG\iint \frac{\alpha_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\} = 0.$$

Умножаем на φ_2 и интегрируем

$$\iint \frac{\varphi_2^2}{\frac{dF}{dE}}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = -\iint \varphi_2\cdot D\left\{\frac{\alpha_1}{\frac{dF}{dE}} + mG\iint \frac{\alpha_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} =$$

$$= \iint \left\{\frac{\alpha_1}{\frac{dF}{dE}} + mG\iint \frac{\alpha_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\}\cdot D\varphi_2\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = 0.$$

Таким образом, если число решений в группе $m \geqslant 2$, то $\varphi_2 = 0$, следовательно, φ_1 отлично от нуля. Если $m \geqslant 3$, то для β_2 легко получить уравнение $\alpha_1 + D\beta_2 = 0$, вместе с (27) дающее $A\beta_2 = 0$. Докажем, что не может представиться случай $m \geqslant 4$. Действительно, тогда были бы справедливы следующие равенства:

$$\beta_1 + D\gamma_2 = 0, \qquad \frac{\alpha_2}{\frac{dF}{dE}} + D\left\{\frac{\beta_1}{\frac{dF}{dE}} + mG\iint \frac{\beta_1(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{v}'\right\} = 0.$$

отсюда следует $\frac{\alpha_2}{\frac{dF}{dE}} = A\gamma_2$. Умножаем на α_2 и интегрируем, имея в виду, что $A\alpha_2 = 0$

$$\iint \frac{\alpha_2^2}{\frac{dF}{dE}}d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = \iint \alpha_2\cdot A\gamma_2\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = -\iint \gamma_2\cdot A\alpha_2\cdot d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = 0.$$

Следовательно, $\alpha_2 = 0$. Но тогда из (26) $\varphi_1 = 0$, что невозможно. Перейдем к общему решению уравнения (17), полагая $t=0$. Начальным можно, очевидно, считать любой выбранный момент

$$f(r,v,0) = c'\varphi' + c_1'\alpha' + c_2'\beta' + c''\varphi'' + c_1''\alpha'' + c_2''\beta'' + \ldots + C_{k_1}\varphi_{k_1} + C_{k_2}\varphi_{k_2} + \ldots \qquad (29)$$

В (29) все c – произвольные постоянные. Штрихами отмечены члены, соответствующие $k=0$, остальные члены соответствуют характеристическим числам k_1, $k_2, \ldots$

Выделим в (29) антисимметрическую составляющую и составим выражение

$$\iint \bar{f}_2 \cdot A f_2 \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} = L[f_2].$$

Некоторые члены при этом обращаются в нуль согласно доказанным выше равенствам $A\varphi_2' = A\alpha_2' = A\beta_2' = 0$.

Например,

$$\iint \bar{\varphi}_2' \cdot A\varphi_{2,k_1} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} = \iint \varphi_{2,k_1} \cdot A\bar{\varphi}_2' \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} = 0.$$

Для функции φ с разными индексами

$$\iint \bar{\varphi}_{2,k_1} \cdot A\varphi_{2,k_2} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} = k_2^2 \iint \frac{\bar{\varphi}_{2,k_1} \cdot \bar{\varphi}_{2,k_2}}{\frac{dF}{dE}} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v},$$

что обращается в нуль согласно (24). Остается

$$\begin{aligned} L[f_2] &= |c_{k_1}|^2 \iint \bar{\varphi}_{2,k_1} \cdot A\varphi_{2,k_1} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} + |c_{k_1}|^2 \iint \bar{\varphi}_{2,k_2} \cdot A\varphi_{2,k_2} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} + \ldots = \\ &= |c_{k_1}|^2 \cdot k_1^2 \iint \frac{|\varphi_{2,k_1}|^2}{\frac{dF}{dE}} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} + |c_{k_2}|^2 \cdot k_2^2 \iint \frac{|\varphi_{2,k_2}|^2}{\frac{dF}{dE}} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} + \ldots \end{aligned} \qquad (30)$$

Будем теперь придавать величинам c различные значения, подобранные так, чтобы в конечном итоге функция f оказывалась вещественной. Могут представиться три взаимоисключающих случая.

1) Допустим сначала, что среди характеристических чисел есть действительные, не равные нулю, например $k = k_1$. Возьмем $f = \varphi_{k_1}$. Тогда

$$L[f_2] = k_1^2 \iint \frac{\varphi_{2,k_1}^2}{\frac{dF}{dE}} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} < 0$$

2) Пусть теперь нет действительных характеристических чисел, за исключением $k = 0$, которому соответствует группа более чем из одного решения основного уравнения (17). Из (30) следует $L[f_2] \geqslant 0$. Возьмем $f = \alpha'$. Тогда $Af_2 = A\alpha_2' = 0$; $L[f_2] = 0$. При этом $Df_2 = D\alpha_2' = -\varphi_1' \neq 0$.

3) Пусть все характеристические числа – чисто мнимые и нули, но групп более чем из одного решения нет. Из (30) видно, что $L[f_2] > 0$, за исключением случая $c_{k_1} = c_{k_2} = \ldots = 0$. Но в этом последнем случае из (29) следует $f_2 = c'\varphi_2' + c''\varphi_2'' + \ldots$ и значит, $Df_2 = 0$.

Но доказанные предложения можно сформулировать и при обратном порядке.

1) Если $L[f_2]$ может принимать отрицательные значение, то среди характеристических чисел есть действительные, не равные нулю.

Но пусть $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ удовлетворяет (18) с характеристическим числом k. Тогда $\varphi(\mathbf{r}, -\mathbf{v})$ удовлетворяет тому же уравнению (18), но с заменой k на $-k$. Это значит, что среди действительных характеристических чисел есть как положительные, так и отрицательные.

2) Если $L[f_2]$ не принимает отрицательных значений, но принимает нулевые, причем эти нулевые значения достигаются при таких f_2, что $Df_2 \neq 0$, то имеется характеристическое число $k = 0$, которому соответствует группа более чем из одного решения.

3) Если $L[f_2]$ не принимает отрицательных значений, а нулевые принимает только тогда, когда одновременно $Df_2 = 0$, то все характеристические числа – чисто мнимые и нули, а групп более чем из одного решения нет.

Легко видеть, что случаи 1 и 2 отвечают неустойчивым состояниям, случай 3 – устойчивым.

Выполним также следующее преобразование.

$$\begin{aligned} L[f_2] &= \iint f_2 \cdot D \left\{ \frac{Df_2}{\frac{dF}{dE}} + mG \iint \frac{Df_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d\mathbf{r}' \, d\mathbf{v}' \right\} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} = \\ &= -\iint \frac{(Df_2)^2}{\frac{dF}{dE}} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} - mG \iiiint \frac{Df_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot Df_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{r}' \, d\mathbf{v}' \end{aligned}$$

По своему смыслу f_2 – антисимметрическая компонента начального отклонения от стационарного состояния. Однако если мы прибавим к f_2 произвольную антисимметрическую функцию f_3 и подставим эту сумму вместо f_2, то значение $L[f_2]$ от этого может только увеличиться. Такое увеличение не затрагивает формулировку предыдущих пунктов 1, 2 и 3.

Резюмируя, получаем следующую теорему:

Теорема: Пусть для некоторой звездной системы, находящейся в стационарном состоянии, фазовая плотность отлична от нуля на фазовом объеме γ, но обращается в нуль на его границе и за его пределами. Пусть также фазовая плотность имеет вид $\Psi = F(E)$, причем $F(E)$ – убывающая функция от E. Рассмотрим совокупность функций $\eta(\mathbf{r},\mathbf{v})$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) η имеет вид $\eta = Df$, где f – непрерывная функция, равная нулю на границе фазового объема γ и за его пределами.

2) η – не тождественный нуль. Тогда для устойчивости звездной системы необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$-\iint \frac{\eta^2}{\frac{dF}{dE}} d\mathbf{r}\, d\mathbf{v} - mG \iiiint \frac{\eta(\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot\eta(\mathbf{r}',\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{v}'$$

было положительным при любом выборе $\eta(\mathbf{r},\mathbf{v})$.

Однако необходимо сделать следующее примечание.

Изменение фазовой плотности не всегда означает реальное физическое изменение звездной системы. Действительно, перейдем от системы координат, в которой звездная система стационарна и неподвижна, к новой системе координат, движущейся со скоростью ε по отношению к старой.

Новая фазовая плотность:

$$\Psi(x,y,z,u,v,w,t) = \Psi_0(x+\varepsilon t, y, z, u+\varepsilon, v, w) = \Psi_0 + \varepsilon\left(t\frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_0}{\partial u}\right) + \ldots \qquad (31)$$

$$f = t\frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_0}{\partial u}.$$

Из (31) следует, что в данном случае $\varphi = \varphi_1 = \frac{\partial\Psi_0}{\partial x}$, $k = 0$. Поэтому, пользуясь только что сформулированной теоремой, не следует включать в число функций η функции $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ и их линейные комбинации. Развитый в этой главе метод, вероятно, может быть распространен на стационарные системы других видов.

1. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. – М., 1958.
2. *Чандрасекар С.* Принципы звездной динамики. – М., 1948.
3. *Шноль Э.Э., Хазин Л.Г.* // Доклады АН СССР. – 1969. – **185**. – С. 1018–1021.

Комментарий. Данная статья оказалась первой вообще публикацией с более или менее строгим анализом глобальной устойчивости звездных систем, в отличие от ориентировочных наметок К.Ф.Огородникова и локальных пробных расчетов Б.Линдблада. В нашей стране почти одновременно сходные идеи высказал Э.Шноль; подробнее его точка зрения изложена в совместной с Л.Г.Хазиным публикации [3]. Вообще в ту эпоху данная тематика стала бурно развиваться различными группами авторов.

В представленной статье еще не затронуты тонкости, связанные с наличием у звездных систем, как правило, непрерывного спектра и обсужденные потом (Л.С.Марочник, P.Sweet, C.Hunter и др.).

Поступила в редакцию 16.12.2002