Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 4 • № 1 • 2003 С. 14 – 24

УДК 542

Преобразование эллипсоида ошибок при движении материальной точки *

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково

Движение точечной массы в произвольном силовом поле изучается посредством деформации фазового пространства. Точки, представляющие многообразие начальных условий, заполняют в фазовом пространстве малый эллипсоид. Можно подобрать такие комбинации параметров этого эллипсоида, которые во время движения остаются неизменными независимо от конкретного вида силового поля. Количество таких инвариантов всегда равно числу степеней свободы. Один из инвариантов может совпадать с размером фазового объема.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕЛІПСОЇДА ПОМИЛОК ПРИ РУСІ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ, Антонов В.А.— Рух точкової маси в довільному силовому полі вивчається за допомогою деформації фазового простору. Точки, що представляють многовид початкових умов, заповнюють у фазовому просторі малий еліпсоїд. Можна підібрати такі комбінації параметрів цього еліпсоїда, які під час руху залишаються незмінними незалежно від конкретного виду силового поля. Кількість таких інваріантів завжди дорівнює числу ступенів вільності. Один з інваріантів може збігатися з розміром фазового об'єму.

MODIFICATION OF THE ERROR ELLIPSOID UNDER MASS POINT MOTION, by Antonov V.A.— The motion of a mass point in an arbitrary force field is studied by means of the deformation of the phase space. Points which represent the variety of initial conditions fill a small ellipsoid in the phase space. One can select such combinations of ellipsoid parameters which remain invariant during the motion, independent of the particular kind of the force field. The number of such invariants is always equal to the number of degrees of freedom. One of the invariants can coincide with the size of the phase volume (Liouville's theorem).

§ 1. Будем рассматривать движение, описываемое системой канонических уравнений

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{1}$$

Функция H предполагается непрерывной и дифференцируемой. В остальном ее конкретный вид для предмета настоящей статьи (см. §.2) несуществен. Предварительно мы хотим напомнить один из вариантов представления канонических преобразований [1] переменных q и p

$$\begin{aligned} Q_i&=Q_i(q_1,q_2,\dots,q_n,p_1,p_2,\dots,p_n),\\ P_i&=P_i(q_1,q_2,\dots,q_n,p_1,p_2,\dots,p_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Именно, если d и δ – символы двух рядов дифференциалов, то

$$\sum_{i=1}^{n}(dQ_i\delta P_i-\delta Q_i dP_i)=\sum_{i=1}^{n}(dq_i\delta p_i-\delta q_i dp_i). \tag{3}$$

Геометрически тождество (3) можно истолковать так. Возьмем в $2n$-мерном фазовом пространстве три близкие между собой точки: A, A_1 и A_2. Компоненты вектора $\overrightarrow{AA_1}$ отождествим с дифференциалами dq_i, dp_i, а компоненты вектора $\overrightarrow{AA_2}$ – соответственно с дифференциалами $\delta q_i, \delta p_i$. Подвергнем теперь наше фазовое пространство преобразованию (2), в результате чего точки A, A_1 и A_2 перейдут соответственно в точки B, B_1 и B_2. Теперь dQ_i, dP_i являются компонентами вектора $\overrightarrow{BB_1}$, а $\delta Q_i, \delta P_i$ – компонентами вектора $\overrightarrow{BB_2}$.

*Впервые опубликована в Вестник. Ленингр. ун-та., серия мат., мех., астрон. – 1965. – № 13. – С. 136–148.

В раскрытом виде

$$dQ_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} dp_i \right), \qquad \delta Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \delta p_i \right), \tag{4}$$

$$dP_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial P_i}{\partial p_i} dp_i \right), \qquad \delta P_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \delta p_i \right) \tag{5}$$

Таким образом, (3) эквивалентно следующей системе условий:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) = 1, \\
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) = 0 \qquad (i \neq k), \\
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) = 0, \\
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Напомним также основные свойства канонических преобразований [2].

1) Обращение канонического преобразования есть также каноническое преобразование.

2) Последовательное применение двух канонических преобразований дает снова каноническое преобразование.

3) Выразим решение системы (1) с данной функцией H как функцию начальных условий

$$\begin{aligned}
q_i(t) &= q_i(q_1(0), \ldots, q_n(0); p_1(0), \ldots, p_n(0); t) \\
p_i(t) &= p_i(q_1(0), \ldots, q_n(0); p_1(0), \ldots, p_n(0); t).
\end{aligned} \tag{7}$$

(t играет роль параметра). Тогда преобразование $q(0), p(0)$ в $q(t), p(t)$ является каноническим. И наоборот, любое каноническое преобразование может быть представлено как результат движения, с подходящей H.

4) Если дано каноническое преобразование, не зависящее от t, причем этому преобразованию подвергается какое-либо определенное решение системы (1) $q(t), p(t)$, то преобразованные величины $Q(t), P(t)$ удовлетворяют системе уравнений такого же типа

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \tag{8}$$

причем предполагается, что равенства (2) разрешены относительно q, p и посредством этого H выражены через Q, P.

5) Якобиан канонического преобразования равен 1.

§ 2. Пусть теперь начальные данные являются случайными величинами. Сделаем следующие предположения:

1) «Вектор ошибки», т.е. отклонение начальных данных от их среднего значения, мал в сравнении с характерными длинами и скоростями физической системы.

2) Распределение ошибки подчиняется закону Гаусса.

В любой момент времени t координаты и импульсы будут также случайными величинами. Предположение 1) означает, что мы линеаризуем все соотношения, в которые входят ошибки. В частности, для ошибок справедливы соотношения типа (4) и (5), где значения производных берутся для средних значений q и p.

Как известно из теории вероятностей, линейное преобразование аргументов переводит гауссово распределение снова в гауссово. Если мы отвлекаемся от средних значений и интересуемся только поведением ошибок, то всякое гауссово распределение однозначно характеризуется отнесенной к началу координат поверхностью, на которой плотность распределения достигает, например, половины своего максимального значения. В нашем случае указанная поверхность – эллипсоид в $2n$-мерном фазовом пространстве. Этот эллипсоид для краткости будем называть эллипсоидом ошибок (или вероятностей).

Чтобы написать в общем виде уравнение эллипсоида вероятностей, введем единые обозначения ошибок координат

$$x_i = q_i - \bar{q}_i, \qquad x_{i+n} = p_i - \bar{p}_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

после чего искомое уравнение представляется в виде

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} x_i x_j = 1 \quad (c_{ij} = c_{ji}) \quad \text{или} \quad K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1. \tag{9}$$

Так как эллипсоид ошибок определен как поверхность равной плотности распределения, то, согласно теореме Лиувилля, он деформируется вместе с фазовым пространством. При этом нельзя, однако, провести полную аналогию между деформацией эллипсоида ошибок и деформацией самого фазового пространства: последняя возможна и без первой. Аналогично при поворотах обычного трехмерного пространства вокруг начала координат поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ остается неизменной.

Возникает вопрос: какие комбинации коэффициентов c_{ij} являются инвариантами? Инвариантность мы понимаем как независимость от t, какова бы ни была функция Гамильтона $H(q, p, t)$. Ответ на поставленный вопрос оказывается следующим. Примем левую часть (9) (t фиксировано) формально за некоторую новую функцию Гамильтона, отождествляя x_i с q_i и x_{i+n} с p_i. Введя также переменное τ, не имеющее физического значения времени, напишем канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial x_{i+n}}, \qquad \frac{dx_{i+n}}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial x_i}. \tag{10}$$

Уравнения (10) линейны. Их общее решение должно представлять собой линейную комбинацию элементарных решений типа

$$x_j = \alpha_j e^{i\mu\tau}. \tag{11}$$

(В (11) $i = \sqrt{-1}$, α_j – комплексные числа, μ вещественно).

Элементарных решений иного типа, например, $x_j = \alpha_j e^{(r+i\mu)\tau}$ $(r \neq 0)$ или $x_j = (\alpha_j \tau + \beta_j) e^{i\mu\tau}$ система (10) не может иметь ввиду знакоопределенности функции K. Подставим теперь (11) в (10). Получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$i\mu\alpha_j = \sum_{k=1}^{2n} c_{j+n,k} \alpha_k \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \qquad -i\mu\alpha_{j+n} = \sum_{k=1}^{2n} c_{jk}\, \alpha_k. \tag{12}$$

Легко видеть, что μ должно быть корнем характеристического уравнения

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & \ldots & c_{1n} & c_{1,n+1} + i\mu & \ldots & c_{1,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} & c_{n,n+1} & \ldots & c_{n,2n} + i\mu \\ \hline c_{n+1,1} - i\mu & \ldots & c_{n+1,n} & c_{n+1,n+1} & \ldots & c_{n+1,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2n,1} & \ldots & c_{2n,n} - i\mu & c_{2n,n+1} & \ldots & c_{2n,2n} \end{array} \right| = 0. \tag{13}$$

Короче говоря, величины $i\mu$ прибавляются к одной из «побочных диагоналей» и вычитаются из другой. Выясним некоторые свойства уравнения (13). Оно не меняется при замене μ на $-\mu$, так как эта операция сводится к замене столбцов определителя строками и наоборот. Поэтому в раскрытом виде левая часть (13) содержит только четные степени μ, причем все мнимости исчезают. Следовательно, уравнение (13) имеет n пар корней. Мы возьмем только положительные корни, расположив их в порядке убывания: $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \mu_n$. Величины μ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ как функции коэффициентов c_{ij} являются искомыми инвариантами.

В исключительных случаях некоторые из величин μ могут исчезать. Вместо величин μ в качестве инвариантов можно, конечно, брать коэффициенты уравнения (13) в раскрытом виде. Таким путем мы тоже получим n инвариантов. Заметим, что свободный член в (13) не равен нулю, о чем еще скажем позже.

Для доказательства свойства инвариантности величин μ обратим вначале внимание на тот легко проверяемый факт, что линеаризация канонического преобразования (2), а именно:

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial q_k} x_k + \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial p_k} x_{k+n} \right), \qquad X_{j+n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{P}_j}{\partial q_k} x_k + \frac{\partial \bar{P}_j}{\partial p_k} x_{k+n} \right) \tag{14}$$

также является каноническим преобразованием.

В качестве канонического преобразования (2) мы берем преобразование, переводящее начальные данные в координаты фазового пространства, взятые в момент t. Применив линеаризацию этого преобразования к уравнениям (10), мы, по свойству канонических уравнений, получим уравнения того же типа

$$\frac{dX_j}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial X_{j+n}}, \qquad \frac{dX_{j+n}}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial X_j} \tag{15}$$

с элементарными решениями, очевидно,

$$\begin{aligned} X_j &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial q_k} \alpha_k + \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial p_k} \alpha_{k+n} \right) e^{i\mu\tau} = \alpha'_j e^{i\mu\tau}, \\ X_{j+n} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{P}_j}{\partial q_k} \alpha_k + \frac{\partial \bar{P}_j}{\partial p_k} \alpha_{k+n} \right) e^{i\mu\tau} = \alpha'_{j+n} e^{i\mu\tau}, \end{aligned} \tag{16}$$

где μ вычислены по коэффициентами c_{ij} для $t=0$. Но в (15) K есть не что иное, как левая часть (9), преобразованная подстановкой (14), т.е. левая часть уравнения эллипсоида ошибок в момент t. Поэтому, если мы будем вычислять величины μ непосредственно для момента t, то согласно (16) придем к тем же самым $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, как и для $t=0$, что и требовалось доказать.

Но необходимо еще доказать, что не существует иных инвариантов, независимых от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Заметим вначале, что линейность системы (10) позволяет в инварианте Пуанкаре заменить дифференциалы конечными значениями переменных. Получаем, что величина

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j x'_{j+n} - x_{j+n} x'_j), \tag{17}$$

где x_j и x'_j – два решения системы (10), не зависит от τ. Применим этот результат, в частности, к элементарным решениям, которые мы сейчас берем в вещественном виде

$$\begin{aligned} x_j^{(m)} &= \beta_j^{(m)} \cos \mu_m \tau - \gamma_j^{(m)} \sin \mu_m \tau \quad (1 \leqslant m \leqslant n), \\ \alpha_j^{(m)} &= \beta_j^{(m)} + i \gamma_j^{(m)}, \\ x_j^{(m+n)} &= \gamma_j^{(m)} \cos \mu_m \tau + \beta_j^{(m)} \sin \mu_m \tau \end{aligned} \tag{18}$$

(верхний индекс – номер решения). Так как элементарные решения должны быть линейно независимы, то определитель

$$\begin{vmatrix} \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(1)} & \ldots & \beta_{2n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_1^{(1)} & \gamma_2^{(1)} & \ldots & \gamma_{2n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \tag{19}$$

не равен нулю. Подставим теперь в (17) два различных элементарных решения с номерами m и k $(1 \leqslant m \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n}\Bigg[\left(\beta_j^{(m)}\beta_{j+n}^{(k)}-\beta_j^{(k)}\beta_{j+n}^{(m)}\right)\cos\mu_m\tau\cos\mu_k\tau+\left(\beta_j^{(m)}\gamma_{j+n}^{(k)}-\beta_{j+1}^{(m)}\gamma_j^{(k)}\right)\cos\mu_m\tau\sin\mu_k\tau-$$
$$-\left(\beta_j^{(k)}\gamma_{j+n}^{(m)}-\beta_{j+n}^{(k)}\gamma_j^{(m)}\right)\cos\mu_k\tau\sin\mu_m\tau+\left(\gamma_j^{(m)}\gamma_{j+n}^{(k)}-\gamma_j^{(k)}\gamma_{j+n}^{(m)}\right)\sin\mu_m\tau\sin\mu_k\tau\Bigg]=\mathrm{const}. \tag{20}$$

Допустим, что среди величин μ_m нет равных. Выразив (20) через тригонометрические функции сумм и разностей, получим линейную комбинацию членов с множителями $\cos(\mu_m\pm\mu_k)\tau$, $\sin(\mu_m\pm\mu_k)\tau$. Эта комбинация членов может быть постоянной только в том случае, когда обращается в нуль. Отсюда следует равенство нулю отдельно всех коэффициентов:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{(m)}\beta_{j+n}^{(k)}-\beta_j^{(k)}\beta_{j+n}^{(m)}\right)=0, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\gamma_j^{(m)}\gamma_{j+n}^{(k)}-\gamma_j^{(k)}\gamma_{j+n}^{(m)}\right)=0, \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{(m)}\gamma_{j+n}^{(k)}-\beta_{j+n}^{(m)}\gamma_j^{(k)}\right)=0, \quad (m\neq k). \tag{23}$$

Заметим теперь, что ни одно выражение

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{(m)}\gamma_{j+n}^{(m)}-\beta_{j+n}^{(m)}\gamma_j^{(m)}\right) \tag{24}$$

не равно нулю. В противном случае для некоторого m с учетом соотношений (21) и (23) мы получили бы систему $2n$ линейных однородных уравнений относительно подчеркнутых величин

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{\beta}_j^{(m)}\gamma_{j+n}^{(k)}-\beta_{j+n}^{(m)}\gamma_j^{(k)}\right)=0\\&\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{\beta}_j^{(m)}\beta_{j+n}^{(k)}-\underline{\beta}_{j+n}^{(m)}\gamma_j^{(k)}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(k=1,2,\dots,n) \tag{25}$$

Но определитель системы (25), отличающийся от (19) только перестановками строк и столбцов, не равен нулю. Следовательно,

$$\beta_j^{(m)}=0 \qquad (j=1,2,\dots,2n)$$

Аналогично из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{(m)}\underline{\gamma}_{j+n}^{(m)}-\beta_{j+n}^{(k)}\gamma_j^{(m)}\right)=0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\gamma_j^{(m)}\underline{\gamma}_{j+n}^{(m)}-\gamma_{j+n}^{(k)}\underline{\gamma}_j^{(m)}\right)=0,$$

заключаем, что $\gamma_j^{(m)}=0$, таким образом, $x_j^{(m)}=0$ $(j=1,2,\dots,2n)$, что невозможно.

Но остается еще вопрос о знаках выражений (24). Разберем вначале случай положительности всех n выражений (24). Умножая каждое элементарное решение на подходящий коэффициент, можно в этом случае добиться выполнения условий

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{(m)}\gamma_{j+n}^{(m)}-\beta_{j+n}^{(m)}\gamma_j^{(m)}\right)=1. \tag{26}$$

В своей совокупности условия (21), (22), (23), (26) показывают, что подстановка с постоянным коэффициентами

$$x_j = \sum_{m=1}^{n} \left(\beta_j^{(m)} X_m - \gamma_j^{(m)} X_{m+n}\right) \tag{27}$$

является канонической. Она должна переводить уравнения (10) в уравнения (15). Элементарными решениями системы (15) являются следующие:

$$\left.\begin{array}{lll} X_m = \cos\mu_m\tau, & X_j = 0, & (i \neq m) \\ X_{m+n} = -\sin\mu_m\tau, & X_{j+n} = 0 & \end{array}\right\} \quad (m = 1,2,\ldots,n) \tag{28}$$

и

$$\left.\begin{array}{lll} X_m = \sin\mu_m\tau, & X_j = 0, & (i \neq m) \\ X_{m+n} = \cos\mu_m\tau, & X_{j+n} = 0 & \end{array}\right\} \quad (m = 1,2,\ldots,n)$$

как легко проверить по (18).

Уравнения (15) должны удовлетворяться и функциями, полученными линейной композицией решений (28), например,

$$X_j = \cos\mu_j\tau, \qquad X_{j+n} = -\sin\mu_j\tau \qquad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{29}$$

Подставив (29) в (15), получаем

$$-\mu_j \sin\mu_j\tau = \frac{\partial K}{\partial X_{j+n}}; \qquad \mu_j \cos\mu_j\tau = \frac{\partial K}{\partial X_j} \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$

Ввиду линейного характера правых частей и независимости тригонометрических функций должно быть

$$\frac{\partial K}{\partial X_j} = \mu_j X_j, \qquad \frac{\partial K}{\partial X_{j+n}} = \mu_j X_{j+n}, \tag{30}$$

откуда легко получается конкретный вид K:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j (X_j^2 + X_{j+n}^2). \tag{31}$$

Если бы среди выражений (24) были отрицательные, то их все же можно было бы привести к $+1$ или -1. Канонической была бы подстановка

$$x_i = \sum_{m=1}^{n} \left(\beta_j^{(m)} X_m \pm \gamma_j^{(m)} X_{m+n}\right)$$

с эквивалентным выбором знаков. Тот же выбор знака перейдет в(31):

$$K = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \pm\mu_j (X_j^2 + X_{j+n}^2). \tag{32}$$

Но переход знакоопределенной квадратичной формы в форму вида (32) невозможен, так что этот случай следует исключить.

Итак, мы доказали, что любой эллипсоид ошибок с заданным набором инвариантов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ подходящим каноническим преобразованием можно перевести во вполне определенный эллипсоид

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j (X_j^2 + X_{j+n}^2) - 1 = 0, \tag{33}$$

а, значит, любые два эллипсоида с одним и тем же набором величин μ – друг в друга. Это свидетельствует об отсутствии инвариантов, независимых от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Между прочим, рассмотрение эллипсоидов вида (33) показывает, что μ_j могут быть любыми числами, они, действительно, – независимые друг от друга инварианты.

Наконец, коснемся того случая, когда некоторые из величин μ_m равны между собой. Если мы слегка деформируем такой эллипсоид ошибок, то получим эллипсоид с уже различными μ_m. Применим еще преобразование подобия, чтобы получить два новых эллипсоида: один, охватывающий исходный эллипсоид, а второй, заключенный внутри него, и оба близкие к исходному. Пусть инварианты обоих сопутствующих эллипсоидов равны $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_n'$ у внешнего и $\mu_1'(1+\varepsilon), \ldots, \mu_n'(1+\varepsilon)$ у внутреннего (все μ – однородные функции первого порядка от коэффициентов c_{ij}). Определенным ранее каноническим преобразованием переведем внешний эллипсоид в эллипсоид

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j'(x_j^2+x_{j+n}^2)-1=0,$$

тогда внутренний превратится соответственно в

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j'(x_j^2+x_{j+n}^2)-\frac{1}{1+\varepsilon}=0.$$

Резюмируя, получаем, что исходный эллипсоид можно подходящим каноническим преобразованием превратить в эллипсоид, как угодно мало отличающийся от (33). Отсюда опять вытекает отсутствие непрерывного инварианта, независимого от величин μ.

Свободный член уравнения (13) равен определителю

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,2n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2n,1} & c_{2n,2} & \ldots & c_{2n,2n} \end{vmatrix} = \mu_1^2\mu_2^2\ldots\mu_n^2, \tag{34}$$

для которого геометрия дает выражение

$$\frac{\pi^{2n}}{V^2(n!)^2},$$

где V – объем эллипсоида ошибок. Таким образом, инвариантность определителя (34) очень просто связана с теоремой Лиувилля.

§ 3. Допустим теперь, что в начальный момент мы рассматриваем одновременно два эллипсоида ошибок:

$$\sum_i\sum_j c_{ij}x_ix_j=1 \quad \text{и} \quad \sum_i\sum_j c_{ij}'x_ix_j=1,$$

причем второй эллипсоид целиком охватывает первый. Докажем, что каждый инвариант μ_m второго эллипсоида меньше соответственного инварианта первого эллипсоида. Для доказательства заметим вначале, что квадратичная форма

$$\sum_i\sum_j (c_{ij}'-c_{ij})x_ix_j$$

отрицательна на поверхности первого эллипсоида и, значит, является отрицательной всюду. Обозначим $c_{ij}-c_{ij}'$ через q_{ij} и вставим между нашими эллипсоидами еще семейство эллипсоидов, зависящее от параметра ε,

$$\sum_i\sum_j (c_{ij}-\varepsilon q_{ij})x_ix_j=1. \tag{35}$$

Все эллипсоиды семейства расположены так, что охватывают один другой. Очевидно, достаточно доказать теорему для бесконечно близких эллипсоидов семейства.

Продифференцируем равенства (12) по ε, учитывая, что в данном случае $\frac{dc_{ij}}{d\varepsilon}=-q_{ij}$. Получаем

$$i\mu\frac{d\alpha_j}{d\varepsilon}+i\alpha_j\frac{d\mu}{d\varepsilon}=\sum_{k=1}^{2n}\left(c_{j+n,k}\frac{d\alpha_k}{d\varepsilon}-\alpha_kq_{j+n,k}\right), \tag{36}$$

$$-i\mu\frac{d\alpha_{j+n}}{d\varepsilon}-i\alpha_{j+n}\frac{d\mu}{d\varepsilon}=\sum_{k=1}^{2n}\left(c_{jk}\frac{d\alpha_k}{d\varepsilon}-\alpha_kq_{jk}\right). \tag{37}$$

Умножим каждое из уравнений (36) на $\overset{\times}{\alpha}_{j+n}$, а (37) – на $\overset{\times}{\alpha}_j$ и сложим все уравнения. Члены, содержащие коэффициенты c_{ij}, при этом собираем согласно (12) ($\times$ – значок комплексного сопряжения):

$$i\mu\sum_{j=1}^{n}\left(\overset{\times}{\alpha}_{j+n}\,\frac{d\alpha_j}{d\varepsilon}-\overset{\times}{\alpha}_j\,\frac{d\alpha_{j+n}}{d\varepsilon}\right)+i\left(\overset{\times}{\alpha}_{j+n}\,\alpha_j-\overset{\times}{\alpha}_j\,\alpha_{j+n}\right)\frac{d\mu}{d\varepsilon}=$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{d\alpha_k}{d\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{jk}\,\overset{\times}{\alpha}_j\right)-\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k\,\overset{\times}{\alpha}_j\,q_{jk}$$

Но $\sum\limits_{j=1}^{n}c_{jk}\,\overset{\times}{\alpha}_j=\overbrace{\sum\limits_{j=1}^{n}c_{kj}\alpha_j}^{\times}=i\mu\,\overset{\times}{\alpha}_{k+n}$, если $k\leqslant n$ или $\sum\limits_{j=1}^{n}c_{j,k+n}\,\overset{\times}{\alpha}_j=\overbrace{\sum\limits_{j=1}^{n}c_{k+n,j}\alpha_j}^{\times}=-i\mu\,\overset{\times}{\alpha}_k$ так что

$$i\sum_{j=1}^{n}\left(\overset{\times}{\alpha}_{j+n}\,\alpha_j-\alpha_j\,\overset{\times}{\alpha}_{j+n}\right)\frac{d\mu}{d\varepsilon}=-\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k\,\overset{\times}{\alpha}_j\,q_{ik}$$

Отделив вещественную и мнимую части у α_j, $\alpha_j=\beta_k+i\gamma_j$, получаем

$$\frac{d\mu}{d\varepsilon}=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(\beta_k\beta_j+\gamma_k\gamma_j)q_{jk}}{2\sum\limits_{j=1}^{n}(\beta_j\gamma_{j+n}-\gamma_j\beta_{j+n})}.$$

Положительность знаменателя нами уже была продемонстрирована ранее, а в числителе стоит сумма положительно определенных форм. Следовательно, $\frac{d\mu}{d\varepsilon}<0$ для любой непрерывной ветви функции $\mu(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Докажем еще одно свойство коэффициентов c_{ij}, которое понадобится в дальнейшем. Если даны инварианты $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, то, не ограничивая общности, мы можем считать, что данный эллипсоид ошибок получился из эллипсоида (33) посредством некоторого канонического преобразования

$$X_j=\sum_{k=1}^{2n}\varphi_{jk}x_k. \tag{38}$$

Подставив (38) в (33), получаем, в частности,

$$c_{kk}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j(\varphi_{jk}^2+\varphi_{j+n,k}^2)\qquad(k=1,2,\ldots,n). \tag{39}$$

Вспомним, что через μ_n мы обозначили наименьшее из чисел μ_j, тогда из (39) следует

$$c_{kk}\geqslant\frac{\mu_n}{2}\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{jk}^2+\varphi_{j+n,k}^2). \tag{40}$$

Теперь воспользуемся элементарными соотношениями:

$$\begin{gathered}
(\varphi_{jk}^2+\varphi_{j+n,k}^2)(\varphi_{j,k+n}^2+\varphi_{j+n,k+n}^2)=(\varphi_{jk}\varphi_{j+n,k+n}-\varphi_{j+n,k}\varphi_{j,k+n})^2+\\
+(\varphi_{jk}\varphi_{j,k+n}+\varphi_{j+n,k}\varphi_{j+n,k+n})^2,\\
\left|\varphi_{jk}\varphi_{j+n,k+n}-\varphi_{j+n,k}\varphi_{j,k+n}\right|\leqslant\sqrt{(\varphi_{jk}^2+\varphi_{j+n,k}^2)(\varphi_{j,k+n}^2+\varphi_{j+n,k+n}^2)},\\
\left|\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{jk}\varphi_{j+n,k+n}-\varphi_{j+n,k}\varphi_{j,k+n})\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\varphi_{j+n,k+n}-\varphi_{j+n,k}\varphi_{j,k+n}\right|\leqslant\\
\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sqrt{(\varphi_{jk}^2+\varphi_{j+n,k}^2)(\varphi_{j,k+n}^2+\varphi_{j+n,k+n}^2)}\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{jk}^2+\varphi_{j+n,k}^2)\cdot\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{j,k+n}^2+\varphi_{j+n,k+n}^2)}
\end{gathered}\tag{41}$$

Но сумма, стоящая в начале (41), равна 1 в силу каноничности преобразования (38). Поэтому

$$\sum_{j=1}^{2n} \varphi_{jk}^2 \cdot \sum_{j=1}^{2n} \varphi_{j,k+n}^2 \geqslant 1,$$

откуда с учетом (40) следует нужное нам неравенство

$$c_{kk} \cdot c_{k+n,k+n} \geqslant \frac{\mu_n^2}{4}. \tag{42}$$

§ 4. Обратимся теперь к моментам ошибок (в смысле теории вероятностей). Как известно, моменты второго порядка можно рассматривать как коэффициенты уравнения эллипсоида, взаимного по отношению к эллипсоиду ошибок, а именно:

$$\sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} u_k u_j \mathsf{M}(x_k x_j) = 1 \qquad \text{(эллипсоид моментов)}. \tag{43}$$

В (43) M – символ математического ожидания. Через u_j мы обозначаем координаты точек эллипсоида моментов, во избежание смешения их с самими ошибками.

Напомним, что свойство взаимности эллипсоидов означает следующее. Возьмем произвольную точку $R(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ на поверхности эллипсоида ошибок, и проведем плоскость Π_R, в нашем случае $(2n-1)$-мерную:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_{2n} u_{2n} = S, \tag{44}$$

причем $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ рассматриваются как текущие координаты плоскости, а S – некоторая постоянная. Тогда на поверхности эллипсоида моментов имеется одна и только одна точка L, общая с плоскостью Π_R. Положение точки L, конечно, зависит от R.

Что касается постоянной S, то ее числовое значение можно определить, рассмотрев простейший случай, когда оба эллипсоида приведены к главным осям (они у взаимных эллипсоидов совпадают).

Пусть эллипсоид ошибок дан уравнением

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{x_j^2}{\lambda_j^2} = 1 \qquad (\lambda_j\text{– полуоси}), \tag{45}$$

тогда плотность распределения должна быть равна

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^n \frac{\exp\left[-\ln 2 \sum\limits_{j=1}^{2n} \dfrac{x_j^2}{\lambda_j^2}\right]}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{2n}}, \tag{46}$$

откуда получаются моменты

$$\mathsf{M} x_j^2 = \frac{\lambda_j^2}{2 \ln 2} \tag{47}$$

Но, с другой стороны, полуоси моментов должны быть равны $\frac{S}{\lambda_j}$, так что уравнение этого эллипсоида имеет вид

$$\sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\lambda_j x_j}{S}\right)^2 = 1.$$

Сравнив с (47), получаем

$$\frac{\lambda_j^2}{2 \ln 2} = \frac{\lambda_j}{S}, \qquad S = \sqrt{2 \ln 2}$$

При движении эллипсоид моментов меняется, но он не обязан следовать за деформацией фазового пространства ошибок. Требуется найти специальный закон преобразования координат точек поверхности эллипсоида моментов $(u_1, u_2, \ldots, u_{2n})$. Этот закон оказывается следующим. Вектор $(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{2n}; -u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ подвергается все время тому же линейному преобразованию, как и вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots x_{2n})$ самого фазового пространства. Для доказательства надо только заметить, что при указанном законе преобразования величин u левая часть (44) имеет вид инварианта Пуанкаре (3) или (17) и поэтому инвариантна. Если точка R перешла в точку R_1, а L – в L_1, то L_1 остается на плоскости Π_R, а другие точки поверхности эллипсоида моментов на Π_R не попадают. Таким образом, взаимность обоих эллипсоидов сохраняется, что и требовалось доказать.

Мы убедились, что эллипсоид моментов подвергается той же группе деформаций, что и эллипсоид ошибок, если координаты эллипсоида моментов писать в следующем порядке: $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{2n}; -u_1, -u_2, \ldots, -u_n$. Впрочем, последнее замечание несущественно, если вектор $(u_1, u_2, \ldots, u_{2n})$ подвергается каноническому преобразованию. Это следует хотя бы из того, что инвариант Пуанкаре (3) в сущности не меняется при замене q_i на p_i и p_i на $-q_i$. Из вышесказанного следует, что должны существовать инварианты $h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_n$, выражающиеся через $\mathsf{M}x_ix_j$ совершенно так же, как $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ выражаются через c_{ij}. Инварианты h_m, как мы знаем, являются функциями от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Эту функциональную зависимость достаточно определить на примере эллипсоида (33). Уравнение взаимного по отношению к нему эллипсоида имеет вид

$$2\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j^2 + X_{j+n}^2}{S^2\mu_j} - 1 = 0, \tag{48}$$

откуда по аналогии следует

$$h_j = \frac{4}{S^2\mu_{n+1-j}}$$

(порядок следования, конечно, обращается при взятии обратной величины).

§ 5. Поставим еще вопрос, в какой мере найденные нами инварианты ограничивают возможные изменения средних квадратичных ошибок $\sigma(x_j)$.

Прежде всего, всегда можно подобрать режим движения, делающий ошибку по координате сколь угодно малой. Это получается при каноническом преобразовании

$$q_1 \to wq_1, \quad q_2 \to q_2, \quad p_1 \to \frac{1}{w}p, \quad p_2 \to p_2 \qquad \text{и т.д.}, \tag{49}$$

если взять достаточно малое значение параметра w. Можно даже сколь угодно снизить ошибки всех координат одновременно, написав преобразования (49) для всех j сразу.

Аналогично (когда w — большое) нет нижней границы для ошибок одного импульса или всех импульсов.

Также можно сделать одновременно малыми ошибки координаты и «чужого» импульса, например, $\sigma(x_1)$ и $\sigma(x_{n+2})$ посредством канонического преобразования

$$q_1 \to wq_1, \quad q_2 \to \frac{1}{w}q_2, \quad p_1 \to \frac{1}{w}p, \quad p_2 \to wp_2, \qquad w \text{ – малое.}$$

Иная картина наблюдается для соответствующих друг другу координаты и импульса. Как пояснялось, формула (42) останется справедливой, если заменить c_{kk} на $\mathsf{M}x_k^2 = (\sigma(x_k))^2$ и μ_n на $\frac{4}{S^2\mu_n}$. Получается

$$\sigma(x_k)\sigma(x_{k+n}) \geqslant \frac{2}{S^2\mu_1} \tag{50}$$

а это соотношение не позволяет неограниченно уменьшать x_k и x_{k+n} одновременно (см. также (3)).

§ 6. Допустим теперь, что имеются ошибки, происходящие от двух независимых причин, и что ошибки обоего рода геометрически складываются. Распределение ошибки каждого рода будем считать гауссовым.

Пусть x'_m означает ошибку от одной причины, x''_m – от другой, а x_m – суммарную ошибку. Аналогичные обозначения примем для инвариантов. Известно, что эллипсоид ошибок для суммарной ошибки больше, чем для каждой составляющей. Отсюда, по доказанному ранее, следует $\mu_m < \mu'_m$. Но для μ_1 можно доказать более сильное неравенство (54).

Для доказательства перейдем посредством канонического преобразованиям к таким координатам, в которых эллипсоид суммарной ошибки имеет уравнение типа (33). Тогда согласно (47)

$$\mathsf{M}X_j^2 = \mathsf{M}X_{j+n}^2 = \frac{1}{\mu_j \ln 2}, \qquad \mathsf{M}X_j^2 \cdot \mathsf{M}X_{j+n}^2 = \frac{1}{(\mu_j \ln 2)^2} = \frac{4}{S^4 \mu_j^2}. \tag{51}$$

Но известно, что при сложении независимых случайных величин центральные моменты второго порядка складываются:

$$\mathsf{M}X_j^2 = \mathsf{M}X_j'^2 + \mathsf{M}X_j''^2. \tag{52}$$

Воспользуемся следующим неравенством, справедливым для положительных a_1, a_2, b_1, b_2:

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \geqslant \left(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2}\right)^2. \tag{53}$$

Применим неравенство (53) к (51), откуда, учитывая (50), получаем искомое неравенство, связывающее инварианты эллипсоида суммарной ошибки с инвариантами для отдельных составляющих

$$\frac{1}{\mu_1} \geqslant \frac{1}{\mu_1'} + \frac{1}{\mu_1''}. \tag{54}$$

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т.2 – М.: Физматгиз, 1960.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Физматгиз, 1963.
3. *Борн М.* // Успехи физ. наук. – 1959. – **69**. – С. 173.

Комментарий. Соотношения, представленные в данной работе, при сохранении одной и той же внешней формы допускают различную физическую интерпретацию.

1) Интерпретация в терминах возможных положений и движений одного тела или системы тел, но в заданном силовом поле. Эта интерпретация в статье принята за основную. На практике она может относиться к предсказанию траекторий движения естественных и искусственных тел Солнечной системы.

2) Интерпретация в терминах реальных положений мелких тел, отделившихся от какого-то относительно крупного объекта, но движущихся близко к нему. Получается так называемый эллипсоид рассеяния. Наиболее важными для астрономии примерами, по-видимому, является отделение метеорных частиц от кометного родительского тела и отдельных звезд от звездного скопления. Надо полагать, в звездной астрономии найдутся и другие примеры.

3) Интерпретация применительно к эллипсоидальным или плоским эллиптическим звездным системам. Выведенные соотношения, вообще говоря, носят приближенный характер, но для некоторых моделей оказываются и точными. Все это верно, однако, только для определенного класса т.наз. аффинных деформаций системы в фазовом пространстве.

В вариантах 2) и 3), когда подразумеваются реальные различные тела, инварианты удобнее составлять на основе моментов, т.е. в терминах данной статьи использовать величины h_j, а не μ_j. Фазовая плотность f может и отличаться от гауссианы, но если поверхности $f = \text{const}$ остаются подобными и подобно расположенными эллипсоидами, то конкретный ход f не играет особой роли: во все моменты второго порядка просто входит дополнительный числовой коэффициент, сокращающийся при нахождении инвариантов.

Заметим еще, что известные инварианты Пуанкаре-Картана отличаются от наших тем, что частицы все время как бы помечены – у нас они неразличимы.

Фазовая плотность может быть вырожденной, тогда координаты и импульсы удовлетворяют ν определенным независимым линейным соотношениям, тогда и среди инвариантов h_j появляются нули. В случае $n = 3$, например, таких нулевых инвариантов один при $\nu = 1$, один или два при $\nu = 2$, два или три при $\nu = 3$ или 4, все три при $\nu = 5$ или 6.

Поступила в редакцию 16.12.2002