



УДК 524.5

Равновесные конфигурации слоев межзвездной среды при учете магнитного поля и гравитации*

В.А. Антонов¹, О.А. Железняк²¹ Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково² Национальный авиационный университет, Киев

Найдена равновесная конфигурация слоя межзвездной среды, который находится во внешнем или собственном гравитационном поле и одновременно подвержен воздействию магнитного поля. Закон изменения поверхностной плотности в обоих случаях оказался одинаковым. Изгиб средней линии равновесной конфигурации в во внешнем гравитационном поле следует синусоидальному закону.

РІВНОВАЖНІ КОНФІГУРАЦІЇ ШАРІВ МІЖЗОРЯНОГО СЕРЕДОВИЩА ПРИ ВРАХУВАННІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ І ГРАВІТАЦІЇ, Антонов В.А., Железняк О.О. — Знайдено рівноважну конфігурацію шару міжзоряного середовища, який знаходиться в зовнішньому або власному гравітаційному полі і одночасно підлягає впливу магнітного поля. Закон зміни поверхневої густини в обох випадках виявився однаковим. Вигин середньої лінії рівноважної конфігурації у зовнішньому гравітаційному полі відповідає синусоїдальному закону.

EQUILIBRIUM CONFIGURATIONS OF THE INTERSTELLAR MEDIUM LAYERS IN THE PRESENCE OF MAGNETIC FIELD AND GRAVITATION, by Antonov V.A., Zheleznyak O.A. — Equilibrium configurations of the interstellar medium layer, which is in an external or its own gravitational field and is simultaneously subjected to a force magnetic field was determined. The law of change of the surface density in both cases is identical. The bend of the equilibrium mean line in an external gravitational field follows the sinusoidal law.

1. Введение

Межзвездная среда в определенных случаях подвержена совместному действию сил гравитации и магнитного поля [1]. Если магнитное поле направлено перпендикулярно силе тяжести, то возможно возникновение изгибов плазменного сгустка за счет провисания силовых магнитных линий. Таким образом, может возникнуть равновесная конфигурация межзвездной среды.

Точное математическое описание возникающей конфигурации сопряжено с большими трудностями: во-первых, плохо известны параметры, характеризующие межзвездную среду; во-вторых, математическая сложность задачи заключается в том, что определение формы равновесной конфигурации и давления в ней взаимосвязаны между собой.

Для того, чтобы задача поддавалась аналитическому решению, сделаем ряд упрощающих предположений. Прежде всего будем считать магнитное поле достаточно сильным, играющим ведущую роль в определении формы сгустка межзвездной среды. Принимая такое предположение, можно считать плазму «раздавленной» в тонкий горизонтальный слой, который незначительно провисает под действием внешнего гравитационного поля. Далее считаем, что нарушение однородности магнитного поля создается только токами в самом слое, а внешнее гравитационное поле полностью однородно. Рассмотрение задачи с учетом самогравитации слоя будет дано в последнем разделе статьи. Предполагаем также, что объемная плотность слоя постоянна в пространстве.

* Впервые опубликована в Астрон. ж. – 1992. – 69, № 6. – С. 1136–1147.

При решении задачи введем следующую систему координат: ось x параллельно невозмущенному магнитному полю, а ось y направлена противоположно силе тяжести. Считаем, что в направлении координаты z никакие параметры не меняются, то есть рассматриваем двумерную задачу (см. рис.1). Очевидно, что конфигурация будет симметрична относительно оси y . Принимаем следующие обозначения: \mathbf{H}_0 – невозмущенная напряженность магнитного поля, $\delta\mathbf{H}$ – возмущение напряженности магнитного поля, g – ускорение силы тяжести, ρ – объемная плотность вещества в слое, $y = u_1(x)$ и $y = u_2(x)$ – уравнения соответственно нижней и верхней границы слоя.

2. Уравнения равновесия

Внутри слоя, состоящего из межзвездного вещества, действует известное условие гидростатического равновесия:

$$P = -g\rho y + P_0$$

На границе слоя с внешним магнитным полем должно соблюдаться равенство газового давления P и магнитного давления $\frac{H^2}{8\pi}$. Указанное равенство после несложной линеаризации дает

$$\frac{H_0}{4\pi} \delta H_x^+ = -g\rho(u_2 - u_0); \quad \frac{H_0}{4\pi} \delta H_x^- = -g\rho(u_1 - u_0); \quad u_0 = \text{const}, \quad (1)$$

где верхние знаки $+$ и $-$ означают соответственно возмущения сверху и снизу слоя. Кроме того, вдоль верхней и нижней границы слоя идут силовые линии, поэтому в том же линейном приближении

$$u'_2 = \frac{\delta H_y^+}{H_0}; \quad u'_1 = \frac{\delta H_y^-}{H_0}. \quad (2)$$

Штрих означает производную по x .

Совместно (1) и (2) дают граничные условия

$$\frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial(\delta H_x^+)}{\partial x} = -\frac{g\rho}{H_0} \delta H_y^+$$

и аналогично для δH^- . Если же использовать условия $\text{div}(\delta\mathbf{H}) = 0$, то получаем

$$\frac{\partial(\delta H_y^+)}{\partial y} = k\delta H_y^+; \quad \frac{\partial(\delta H_y^-)}{\partial y} = k\delta H_y^-, \quad (3)$$

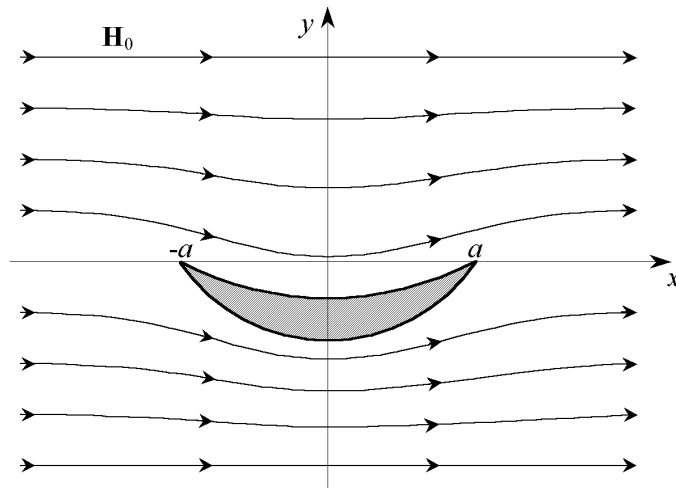


Рис. 1. Слой межзвездной среды во внешнем гравитационном поле с учетом действия магнитного поля

где введен положительный параметр

$$k = \frac{4\pi g\rho}{H_0^2}$$

размерность которого обратна длине. В силу предположенной относительной малости эффекта гравитационных сил

$$k\sqrt{s} \ll 1,$$

где $s = \int_{-a}^a (u_2 - u_1) dx$ – площадь поперечного сечения слоя.

В рассматриваемой задаче существуют только поверхностные токи, поэтому во внешней области δH_y и δH_x – сопряженные гармонические функции, которые можно объединить в одну функцию комплексного аргумента $z = x + iy$:

$$f(z) = \delta H_y + i\delta H_x.$$

Комплексную координату z не следует путать с пространственной координатой z , не входящей в наши формулы.

Дифференцирование вспомогательной функции $f(z)$ с учетом (3) дает

$$if'(z) = \frac{\partial(\delta H_y)}{\partial y} + i\frac{\partial(\delta H_x)}{\partial y} = k\delta H_y + i\frac{\partial(\delta H_x)}{\partial y}.$$

Отсюда на основном отрезке как сверху, так и снизу получаем граничные условия

$$\operatorname{Re} \varphi(z) = \operatorname{Re} \{if' - kf\} = 0. \quad (4)$$

Концы основного отрезка $\{-a < x < a, y = 0\}$ могут играть особую роль. Легко видеть, что слой межзвездной среды в концевых точках не может плавно закругляться. В противном случае, совершенно аналогично задаче об обтекании тела несжимаемой жидкостью [2], магнитное поле на этих закруглениях обращалось бы в нуль. Между тем на близком расстоянии, где слой уже можем считать плоско-параллельным, напряженность магнитного поля почти совпадает с \mathbf{H}_0 . Соответствующее различие магнитного давления $\frac{H_0^2}{8\pi}$ не может быть уравновешено различием гравитационного потенциала, так что предположения о наличии закругления отпадает. Этот отрицательный результат распространяется на любой слой, толщина которого уменьшается к краю, как первая степень расстояния или еще медленнее потому, что сохраняется обращение \mathbf{H} в ноль на концах.

Остается предположить, что $u_2(x) - u_1(x) = O(r)$, где использована малая величина $r = x \pm a$. При учете (1) это эквивалентно

$$\delta H_x^+ - \delta H_x^- = O(r)$$

или

$$\operatorname{Im} [f(x + i0) - f(x - i0)] = O(r). \quad (5)$$

Согласно (1) и (2), функция δH_x в точках $z = \pm a$ остается конечной, а δH_y интегрируемой, так что $f(z)$ может иметь сингулярности только слабее, чем r^{-1} . Определим точнее характер этой сингулярности. Например, если вблизи $z = a$

$$f(z) = b(z - a)^{-\gamma} + \dots,$$

где выписан только старший член, $b \equiv b_1 + ib_2 = \text{const}$, $0 < \gamma < 1$ тогда:

$$\delta H_x = \operatorname{Im} [b r^{-\gamma} \exp(i\gamma\varphi)] + \dots,$$

$$\delta H_x^+ = \operatorname{Im} [b \exp(-i\pi\gamma)](a - x)^{-\gamma} + \dots,$$

$$\delta H_x^- = \operatorname{Im} [b \exp(i\pi\gamma)](a - x)^{-\gamma} + \dots,$$

и в силу требуемой конечности этих величин

$$\operatorname{Im} [b \exp(-i\pi\gamma)] = \operatorname{Im} [b \exp(i\pi\gamma)] = 0,$$

что эквивалентно $b_1 \sin \pi\gamma = b_2 \cos \pi\gamma = 0$ и удовлетворяется нетривиальным образом только при $\gamma = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$.

Таким образом

$$f(z) = iC(z-a)^{-1/2} + \dots, \quad (6)$$

где C – вещественная постоянная. По симметрии вблизи левого конца

$$f(z) = iC(-a-z)^{-1/2} + \dots, \quad (7)$$

Невыписанные явно члены в (6) и (7) должны быть регулярны: легко видеть, что всякие суперпозиции сингулярностей разных степеней или логарифмические особенности входили бы в противоречие с условием конечности δH_x . Для функции $\varphi(z)$, фигурирующей в (4), согласно (6) и (7) получается более сильная сингулярность:

$$\psi(z) = \frac{C}{2}(z-a)^{-3/2} + \dots \quad (8)$$

или

$$\psi(z) = -\frac{C}{2}(-a-z)^{-3/2} + \dots \quad (9)$$

При этом после выписанных главных членов (8) и (9) может быть еще сингулярность, но слабее $(z \pm a)^{-1}$. Введем еще вспомогательную функцию

$$\varphi_1(z) = (a^2 - z^2)^{1/2} \varphi(z),$$

где радикал $(a^2 - z^2)^{1/2}$ считается положительным на верхней стороне отрезка. Из (8) и (9) следует:

$$\psi_1(z) = \frac{iC}{2}(z-a)^{-1/2}(z+a) + \dots = Ca(z-a)^{-1/2} + \dots \quad (10)$$

или

$$\psi_1(z) = \frac{iC}{2}(-z-a)^{-1/2}(z-a) + \dots = -Ca(-z-a)^{-1/2} + \dots, \quad (11)$$

где невыписанные члены регулярны. Кроме того, согласно (4) имеет место граничное условие на основном отрезке

$$\operatorname{Re} \varphi_1(z) = 0. \quad (12)$$

Наконец, установим асимптотику вспомогательной функции $\varphi_1(z)$ на больших расстояниях. Как известно [1],

$$\delta H_x \approx -\frac{2I}{c} \frac{y}{R^2} - \frac{2I_1(y^2 - x^2)}{cR^4}; \quad \delta H_y \approx -\frac{2I}{c} \frac{x}{R^2} + \frac{2I_1xy}{cR^4}, \quad (13)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, I – полный ток, проходящий через сечение слоя, I_1 – аналог дипольного момента для токов. Из (13) следует:

$$f(z) \approx \frac{2I}{cz} + \frac{2iI_1}{cz^2}; \quad \varphi(z) \approx -\frac{2kI}{cz} + \frac{2iQ}{cz^2}; \quad \varphi_1(z) \approx -\frac{2kI}{c}z + \frac{2iQ}{c}, \quad (14)$$

где $Q = -(I - kI_1)$.

Функция $\varphi_1(z)$, которая удовлетворяет условиям (8), (9), (12), (14), имеет вид

$$\varphi_1(z) = Ca(z^2 - a^2)^{-1/2} \sqrt{2a} - \frac{2kI}{c}(z^2 - a^2)^{1/2} + \frac{2iQ}{c}. \quad (15)$$

Докажем, что другого решения, удовлетворяющего всем поставленным условиям, нет. Действительно, если бы была еще другая удовлетворяющая им функция $\tilde{\varphi}_1(z)$, то разность $\varphi_1(z) - \tilde{\varphi}_1(z)$ была бы всюду регулярна, обращаясь в нуль на бесконечности, и имела бы нулевую вещественную часть на основном отрезке. По свойствам гармонических функций [3] вещественная часть $\operatorname{Re} [\varphi_1(z) - \tilde{\varphi}_1(z)] = 0$, соответственно мнимая часть разности функций может быть только постоянной, но по условию на бесконечности эта постоянная должна обращаться в нуль. Таким образом, доказана единственность решения (15).

Зная $\varphi_1(z)$, можем записать обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(z)$:

$$(z^2 - a^2)(if' - kf) = Ca(z^2 - a^2)^{-1/2} \sqrt{2a} - \frac{2kI}{c}(z^2 - a^2)^{1/2} + \frac{2iQ}{c}. \quad (16)$$

Полученное уравнение выражает условия равновесия слоя межзвездной среды в магнитном поле, которое однородно на бесконечности. Используя (16), можем определить форму средней линии слоя и закон изменения его толщины.

3. Уточнение параметров модели

Как видно из (16), при определении $f(z)$ появляются неизвестные параметры C , Q , a , значения которых необходимо найти. Для этого используем условие (5) на поверхностную плотность слоя. Известным приемом решаем линейное дифференциальное уравнение (16) и получаем:

$$f(z) = -\exp(-ikz) \int_{\infty}^z \left[\frac{Ca\sqrt{2a}}{(z^2 - a^2)^{3/2}} - \frac{2kI}{c(z^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{2iQ}{c(z^2 - a^2)} \right] \exp(ikz) dz, \quad (17)$$

где нижний предел относится к удаленной точке верхней полуплоскости для обеспечения сходимости интеграла. При интегрировании (16) постоянная интегрирования равна нулю, так как $f(\infty) = 0$ согласно физическому определению $f(z)$.

Выделение мнимой части (17) позволяет получить значения δH_x , в частности, на обеих сторонах слоя. В данный момент исследуем разность $\delta H_x^+ - \delta H_x^-$, которая пропорциональна поверхностной плотности слоя σ :

$$\sigma(x) = \rho(u_2 - u_1). \quad (18)$$

Составление указанной разности приводит также к соответствующему изменению пути интегрирования: он начинается в точке $z = x$ нижней стороны слоя и заканчивается в противоположной точке верхней стороны слоя (см. рис.2). При этом интеграл от первого члена (17) преобразуется интегрированием по частям, а интеграл от третьего члена берется с помощью теории вычетов. Учитывается также, что $(z^2 - a^2)^{1/2}$ аналитически продолжается как $i(a^2 - x^2)^{1/2}$ сверху и $-i(a^2 - x^2)^{1/2}$ снизу. В результате несложных преобразований получаем

$$\delta H_x^+ - \delta H_x^- = 2kC \sqrt{\frac{2}{a}} \int_x^a \frac{t \cos k(t-x)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt + \frac{4kI}{c} \int_x^a \frac{\sin k(t-x)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt - \frac{2\pi Q}{ac}. \quad (19)$$

Асимптотически при малом r из (19) получается

$$\delta H_x^+ - \delta H_x^- = 2kC\sqrt{2r} - \frac{2\pi Q}{ac} + (r^{3/2}).$$

Сравнение с (5) дает

$$C = Q = 0. \quad (20)$$

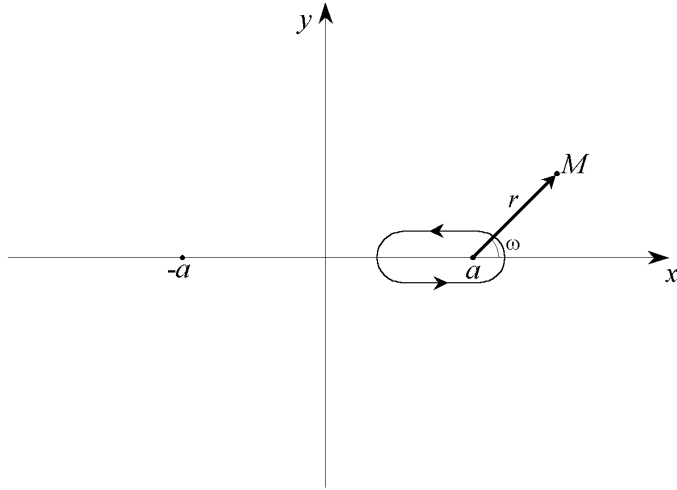


Рис. 2. Путь интегрирования при вычислении $f(z)$

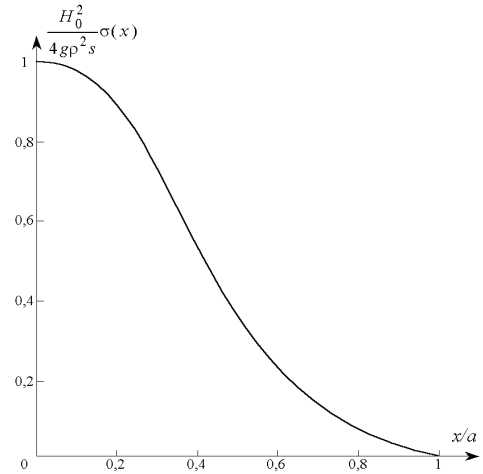


Рис. 3. Изменение поверхностной плотности σ равновесного слоя

Полученное условие (20) значительно облегчает дальнейшее рассмотрение.

Остается определить полуширину слоя a . Функция f однозначна по своей природе во всей внешней области, поэтому контурный интеграл по пути, охватывающему слой, должен обращаться в нуль. Тогда с учетом (20) имеем

$$\oint (z^2 - a^2)^{-1/2} \exp(ikz) dz = 0$$

или

$$J_0(\lambda) = 0, \quad (21)$$

где $J_0(\lambda)$ – функция Бесселя нулевого порядка, а $\lambda = ka$.

Известно, что (21) имеет бесконечное множество корней $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, лежащих в интервалах

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi < \lambda_n < n\pi. \quad (22)$$

Однако не все λ_n удовлетворяют условиям рассматриваемой задачи. Посвятим следующий раздел выделению нижних значений λ_n , опираясь на условие положительности $\sigma(x)$.

4. Форма средней линии и толщина слоя

Условие равновесия слоя как целого в магнитном и гравитационном поле выражается следующим образом:

$$\frac{IH_0}{c} = g\rho s. \quad (23)$$

Как следствие $I > 0$. Комбинируя (19) с (1) и принимая во внимание (20), (23), получаем закон изменения поверхностной плотности слоя:

$$\sigma(x) = \frac{4g\rho^2 s}{H_0^2} \int_x^a (a^2 - t^2)^{-1/2} \sin[k(t-x)] dt. \quad (24)$$

Заметим попутно, что интегрирование (24) с учетом (21) ведет к очевидному тождеству

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = \rho s,$$

что может служить контролем предыдущих расчетов. При малых, но не нулевых значениях $(a-x)$ формула (24) дает положительные значения σ . Напротив, при $x=0$ получается

$$\sigma(0) = \frac{4g\rho^2 s}{H_0^2} \int_0^a (a^2 - t^2)^{-1/2} \sin kt dt. \quad (25)$$

Так как (21) эквивалентно

$$\int_0^a (a^2 - t^2)^{-1/2} \cos kt dt = 0,$$

то (25) преобразуется к виду

$$\sigma(0) = \frac{4g\rho^2 s}{H_0^2 \cos ka} \int_0^a (a^2 - t^2)^{-1/2} \sin(t-a) dt = -\frac{4g\rho^2 s}{H_0^2 \cos \lambda} \int_0^1 \frac{\sin \lambda \xi d\xi}{\sqrt{1-(1-\xi)^2}}. \quad (26)$$

При конкретном λ_n с учетом (22) интеграл, стоящий в (26), преобразуется в сумму интегралов по интервалам

$$\left[0, \frac{\pi}{\lambda_n}\right], \left[\frac{\pi}{\lambda_n}, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right], \dots, \left[\frac{(n-2)\pi}{\lambda_n}, \frac{(n-1)\pi}{\lambda_n}\right], \left[\frac{(n-1)\pi}{\lambda_n}, 1\right].$$

Легко видеть, что интегралы по указанным интервалам имеют чередующиеся знаки (+), (–), ... ,

причем каждый последующий интеграл по модулю меньше предыдущего. Из этого следует, что интеграл (26) положителен и, значит, что $\sigma(0)$ имеет знак, противоположный $\cos \lambda_n$, то есть $\sigma(0) > 0$ при нечетном n и $\sigma(0) < 0$ при четном. Ясно, что из физических соображений все четные n отпадают.

Ниже будет доказано, что *фигура равновесия слоя возможна только при $n = 1$ ($\lambda_1 \approx 2,4$)*. Действительно, в силу неравенства

$$0 < k(t-x) < \lambda_1 < \pi,$$

$\sigma(x)$ положительна при любых x . Напротив, при других нечетных значениях n обнаруживаются отрицательные значения $\sigma(x)$, что физически невозможно. Для доказательства этого утверждения представим интеграл (24) в виде

$$\Psi(\mu, \lambda) = \int_0^\mu \sin[\lambda(\cos \eta - \cos \mu)] d\eta. \quad (27)$$

Функция $\Psi(\mu, \lambda)$ рассматривается для произвольных λ при $0 \leq \mu \leq \pi/2$. В частности, при $\lambda = \lambda_2$ из предыдущего известно, что $\sigma(x) < 0$, то есть $\Psi(\pi/2, \lambda_2) < 0$. Дифференцирование (27) по μ дает

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = \lambda \sin \mu \int_0^\mu \cos[\lambda(\cos \eta - \cos \mu)] d\eta, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2} = \lambda \cos \mu \int_0^\mu \cos[\lambda(\cos \eta - \cos \mu)] d\eta + \lambda \sin \mu - \Psi \lambda^2 \sin^2 \mu. \quad (29)$$

В точке $\mu = \pi/2$ (28) обращается в нуль, а (29) при $\lambda = \lambda_2$ положительно, то есть мы имеем дело с отрицательным минимумом функции $\Psi(\mu, \lambda)$.

Проверим, куда смещается этот минимум при увеличении параметра λ . Свяжем с точкой минимума значение $\mu = q(\lambda)$. По правилам дифференцирования неявных функций

$$q'(\lambda) = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \mu} / \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2}. \quad (30)$$

После некоторых вычислений имеем

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \mu} \right|_{\mu=\pi/2} = \frac{\pi}{2} [J_0(\lambda) - \lambda J_1(\lambda)].$$

При $\lambda = \lambda_2$ это выражение положительно, а это значит, что $q'(\lambda_2) < 0$. Таким образом, рассматриваемый минимум смещается внутрь интервала $[0, \pi/2]$. При дальнейшем увеличении λ минимум может выйти либо на один из концов этого интервала, либо перестать быть отрицательным. Однако при $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_3$ выход точки минимума в $\pi/2$ исключен. Действительно, при $\mu = \pi/2$ из (28) следует

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = \frac{\pi}{2} \lambda J_0(\lambda),$$

так что эта первая производная обращается в нуль только уже при $\lambda = \lambda_3$, но тогда $\Psi(\pi/2, \lambda_3) > 0$. Выход точки минимума к $\mu = 0$ также исключен из-за положительности значения Ψ при малых μ .

Остается еще предположить, что при каком-то λ функция Ψ имеет нулевой минимум, но тогда с учетом (27) и (28) должно быть

$$\int_0^\mu \cos(\lambda \cos \eta) d\eta = \int_0^\mu \sin(\lambda \cos \eta) d\eta = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_0^\mu \sin[\lambda(1 - \cos \eta)] d\eta = 0. \quad (31)$$

Интеграл (31) сводится к

$$\int_0^{1-\cos\mu} [1-(1-\xi)^2]^{-1/2} \sin \lambda \xi d\xi,$$

и совершенно так же, как при анализе (26), доказывается его положительность, вопреки равенству (31).

В результате приведенных рассуждений убеждаемся, что функция $\Psi(\mu, \lambda_3)$ сохраняет отрицательный минимум, то есть приходим к физически невозможным $\sigma(x)$. По аналогии также отбрасываются все оставшиеся нечетные значения n . Доказательство единственности возможного значения λ завершено.

Вид функции $\sigma(x)$ в масштабе параметров задачи показан на рис.3. Важно определить форму средней линии равновесного слоя, что дает представление о прогибе конфигурации под действием внешнего гравитационного поля. Для характеристики этого прогиба введем функцию

$$u^*(x) = \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (32)$$

Опять исходим из (17), но берем полосу интегралов по путям, идущим с нижней и верхней сторон слоя. При этом происходит взаимное уничтожение вкладов в интеграл по отрезку $[x, a]$ и остается

$$\frac{\delta H_x^+ + \delta H_x^-}{2} = -\frac{2kI}{c} \left[\cos kx \int_a^\infty (x^2 - a^2)^{-1/2} \cos kx dx + \sin kx \int_a^\infty (x^2 - a^2)^{-1/2} \sin kx dx \right]. \quad (33)$$

Встречающиеся здесь интегралы снова выражаются через бесселевы функции, причем последний интеграл в (33) согласно (21) обращается в нуль. Используя (1), (33) и (32), находим

$$u^*(x) = -\frac{ks}{4} N_0(\lambda) \cos kx, \quad (34)$$

где $N_0(\lambda)$ – функция Неймана.

В отличие от довольно сложного закона изменения толщины слоя, прогиб средней линии происходит по *синусоидальному закону* согласно (34).

5. Случай самогравитирующего слоя

Исследуем теперь случай, когда вместо внешнего гравитационного поля действует самогравитация. В таком случае модель имеет две оси симметрии, потому можем задать уравнение верхней и нижней границы в виде

$$y = \pm u(x); \quad (-a < x < a). \quad (35)$$

Гравитационное поле слоя характеризуется потенциалом $\Phi(x, y)$. Внутри слоя и на его границах должно действовать известное уравнение равновесия:

$$\frac{P}{\rho} - \Phi = \text{const}. \quad (36)$$

Как и при рассмотрении слоя без самогравитации, учитываем взаимное уравновешивание магнитного и газового давления на границе, что в итоге дает

$$\frac{H_0 \delta H_x}{4\pi\rho} - \Phi = \text{const}. \quad (37)$$

Аналогом (2) является

$$\frac{\delta H_y}{H_0} = \pm u'(x). \quad (38)$$

Далее согласно свойствам тонкого гравитирующего слоя

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=\pm u} = \mp 2\pi G \rho u \quad (39)$$

где G – гравитационная постоянная.

Введем напряженность гравитационного поля во внешней области $F_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Она выражается через функцию комплексной переменной

$$F(z) = F_y + iF_x.$$

Через $F(z)$ можем представить также магнитное поле. Действительно, согласно (38) и (39) при $y = +0$ имеем

$$\delta H_y = -\frac{H_0}{2\pi G\rho} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\frac{H_0}{2\pi G\rho} \operatorname{Re} F'. \quad (40)$$

Таким образом, две гармонические функции δH_y и $\operatorname{Re} F'$ совпадают на основном отрезке с точностью до постоянного коэффициента. На бесконечности обе функции обращаются в нуль, так что различие возможно только за счет сингулярности в особых точках ($x = \pm a$, $y = 0$). Согласно (5) и (39), функция в особых точках, характеризующая магнитное поле, остается регулярной. Смешанная производная Φ также конечна, как показывает несложная проверка. Поэтому тождество (40) справедливо во всей внешней области. Тогда гармоническая функция, сопряженная фигурирующим в (40), связана соотношением

$$\delta H_x = -\frac{H_0}{2\pi G\rho} \operatorname{Im} F'. \quad (41)$$

Дифференцируя граничное условие (37) по x , находим

$$-\frac{H_0}{2\pi\rho} \frac{\partial(\delta H_x)}{\partial x} - F_x = 0,$$

что с учетом (41) представляется в виде

$$\operatorname{Im}(k^{-2}F'' + F) = 0, \quad (42)$$

причем здесь в отличие от п.2

$$k^{-2} = \frac{H_0^2}{8\pi^2 G\rho^2}. \quad (43)$$

Функция F'' связана с третьими производными потенциала Φ и может вблизи особых точек иметь сингулярность $\sim (z \pm a)^{-1}$. Если составить функцию

$$\beta(z) = (a^2 - z^2)(k^{-2}F' + F)$$

то она регулярна на основном отрезке и удовлетворяет на нем условию

$$\operatorname{Im} \beta(z) = 0$$

Остается найти асимптотику $\beta(z)$ на бесконечности. Имеем

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{2G\rho s x}{R^2} + O(R^{-3}); & F_y &= -\frac{2G\rho s y}{R^2} + O(R^{-3}); \\ F(z) &= \frac{2iG\rho s}{z} + O(z^{-3}); & \beta(z) &= 2iG\rho s z + O(z^{-1}). \end{aligned}$$

Легко подобрать функцию $\beta(z)$, которая удовлетворяла бы перечисленным условиям:

$$\beta(z) = 2iG\rho s (z^2 - a^2)^{1/2}. \quad (44)$$

Таким образом, для определения $F(z)$ получаем дифференциальное уравнение

$$k^{-2}F'' + F = -2iG\rho s (z^2 - a^2)^{-1/2}. \quad (45)$$

Уравнение (45) решается аналогично (16). В частности, условие однозначности решения совпадает с (21).

Выделив из (45) вещественную часть и воспользовавшись (39), находим уравнение для $u(x)$

$$k^{-2}u'' + u = \frac{s}{\pi}(a^2 - x^2)^{-1/2}.$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим необходимым граничным условиям $u(a) = u'(a) = 0$, является

$$u(x) = \frac{sk}{\pi} \int_x^a (a^2 - t^2)^{-1/2} \sin[k(t-x)] dt, \quad (46)$$

что с точностью до постоянного коэффициента совпадает с (24). Следовательно, весь анализ допустимых значений $\lambda = ka$, проведенный ранее, переносится на случай с самогравитацией, то есть фигура равновесия может существовать только при $\lambda = \lambda_1 \approx 2,4$.

Интересно отметить, что распределение плотности равновесного слоя в случае внешнего гравитационного поля и в случае самогравитации имеет одинаковую математическую форму, хотя постановка задачи в обоих случаях различна.

6. Заключение

Таким образом, найдена равновесная конфигурация слоя межзвездной среды, который находится во внешнем или собственном гравитационном поле и одновременно подвержен воздействию магнитного поля. Рассмотрение задачи проводится в приближении тонкого слоя, типичном для достаточно сильных внешних магнитных полей. Равновесная конфигурация в обоих случаях получилась единственной с точностью до изменения масштаба. Естественно, что самогравитация стремится стянуть вещество к центру слоя, потому $\sigma(x)$ имеет единственный максимум при $x = 0$. В задаче же с внешним гравитационным полем, слой ведет себя подобно упругой балке под нагрузкой. В этом случае также следует ожидать увеличения плотности вблизи $x = 0$ из-за стекания вещества вдоль магнитных силовых линий в потенциальную яму. Остается необъяснимым примечательный факт, что $\sigma(x)$ в обеих задачах совершенно одинакова.

Вопрос об устойчивости найденной равновесной конфигурации заслуживает отдельного обсуждения, которое авторы намерены дать в последующих работах.

1. Паркер Е. Космические магнитные поля. – М.: Мир, 1982. – 608 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 618 с.

Комментарий. Устойчивость описанных здесь конфигураций была нами доказана несколько позже (Астрон. ж., 1993, т.70, № 3).

Все это относится, конечно, к частному случаю отсутствия магнитного поля в самой газовой среде, т.е. подразумевается, что газ просочился между силовыми линиями из какого-то источника, в котором поле успело угаснуть из-за малого объема или отсутствовало изначально. Если же поле присутствует в самом веществе, постановка задачи становится более сложной и разнообразной.

С другой стороны, по крайней мере для среды, управляемой самогравитацией, благодаря некоторой последующей дискуссии с Б.П.Кондратьевым можно качественно понять, почему вообще должно существовать устойчивое равновесное состояние в условиях данной задачи. Действительно, вклинивание вещества «расталкивает» силовые линии на расстоянии $\sim a$, поэтому H_x получает приращение $\sim H_0 \frac{u}{a}$, относительная прибавка к магнитному давлению также $\sim \frac{u}{a}$. Естественно считать, что в процессе сплющивания общая масса вещества не меняется, тогда толщина u обратно пропорциональна a , вариация магнитного давления вдоль слоя ведет себя как a^{-2} . Но уравновешивающая ее вариация гравитационного потенциала слабо (логарифмически) зависит от a ; поэтому при достаточном сплющивании гравитационная сила перевесит эффект магнетизма, и устойчивое состояние должно достигаться при конечном сплющивании.

В принципе, можно точно так же поставить вопрос о раздавливании магнитным полем объемной, веретенной конфигурации. Относительная вариация магнитного давления вдоль «веретена» убывает при его вытягивании как a^{-3} , а вариация гравитационного потенциала – медленнее, только как a^{-1} (с точностью до логарифмического множителя). Однако найти простую асимптотику для больших H_0 в трехмерном случае не удастся, так как основные уравнения оказываются второй степени, а не линейным, как (45).

Поступила в редакцию 16.12.2002