Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 3 · № 2 · 2002 С. 113 – 117

УДК 524.8

Двухкомпонентные космологические модели в пространствах произвольного числа измерений

Ю.В. Александров

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Рассмотрена метрическая эволюция вселенных с произвольным числом измерений пространства в двух вариантах двухкомпонентной космологической модели — «физический вакуум + пылеподобное вещество» и «физический вакуум + излучение».

ДВОКОМПОНЕНТНІ КОСМОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ В ПРОСТОРАХ ДОВІЛЬНОГО ЧИСЛА ВИМІРІВ, Александров Ю.В. — Розглянута метрична еволюція всесвітів з довільним числом вимірів простору в двох варіантах двокомпонентної космологічної моделі — «фізичний вакуум + пилоподібна речовина» та «фізичний вакуум + випромінювання».

TWO-COMPONENT COSMOLOGICAL MODELS IN SPACES OF ARBITRARY DIMENSION, by Alexandrov U.V. — The metrical evolution of universes with arbitrary dimension space for two version of cosmological model — «physical vacuum + dust matter» and «physical vacuum + radiation» is considered.

В последние годы интерпретация различных наблюдательных данных, прежде всего специальных программ наблюдений сверхновых типа Ia в галактиках с большими красными смещениями [1, 4–6], приводит к представлению о том, что в нашей Вселенной на современном этапе ее эволюции реализуется двухкомпонентная космологическая модель, в которой средняя плотность энергии ε определяется как энергией физического вакуума с уравнением состояния $p = -\varepsilon$, так и энергией пылеподобного вещества с нулевым значением давления p. В то же время развитие квантовой космологии и единой теории поля привело к идее о множественности вселенных, возможно с различными фундаментальными свойствами, в частности, с различным числом пространственных измерений [2].

В этой связи представляет интерес рассмотрение эволюции вселенных с произвольной размерностью пространства N в рамках двухкомпонентных космологических моделей. Ниже рассматриваются две такие модели:

1) «физический вакуум + пылеподобное вещество» с зависимостью средней плотности энергии от масштабного фактора a:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{a_*}{a} \right)^N + 1 \right] \tag{1}$$

(эта модель обобщает известную космологическую модель Леметра) и

2) «физический вакуум + излучение» с зависимостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{a_*}{a} \right)^{N+1} + 1 \right], \tag{2}$$

где a^* — значение масштабного фактора, при котором плотности энергии вакуума и вещества или излучения равны друг другу, а ε_0 — постоянное значение средней плотности энергии вакуума. Соотношение (2) следует из того, что число фотонов изменяется пропорционально a^{-N}, а их энергия, обратно пропорциональная их длине волны, изменяется как a^{-1}.

Зависимость масштабного фактора от времени t может быть представлена в пространстве размерности N в таком виде [3]:

$$ct = \int\limits_{a_1}^{a} \frac{da}{\sqrt{\dfrac{S_N G}{(N-1)c^4}\left(\dfrac{N+1}{N}\varepsilon - (N-3)p\right)a^2 - k}}, \tag{3}$$

где c — скорость света, G — гравитационная постоянная, k — знак кривизны метрики, поверхность единичной N-мерной сферы

$$S_N = \begin{cases} \dfrac{\pi^n N}{n!}, & N = 2n, \\ \dfrac{\pi^n 2^N n!}{(N-1)!}, & N = 2n+1, \end{cases} \tag{4}$$

а нижний предел интегрирования a_1 определяется из условия положительности подкоренного выражения в (3).

Используя уравнения состояния вакуума и вещества и соотношение (1) и вводя параметр с размерностью длины

$$a_0 = \sqrt{\frac{N(N-1)c^4}{S_N G(N+1)\varepsilon_0}}, \tag{5}$$

получим, что

$$ct = a_0 \int\limits_{0}^{a} \frac{a^{N/2-1} da}{\sqrt{a_*^N + A_N a^N - k a_0^2 a^{N-2}}}, \tag{6}$$

где коэффициент

$$A_N = \frac{(N-1)^2}{N+1}. \tag{7}$$

Используя же соотношение (2) и уравнение состояния излучения $p = \varepsilon/N$, вытекающее из вида первого слагаемого в (2), будем иметь, что в случае модели с излучением

$$ct = a_0 \int\limits_{a_1}^{a} \frac{a^{(N-1)/2} da}{\sqrt{\operatorname{sign}(B_N) a_*^{N+1} + |B_N| a^{N+1} - k a_0^2 a^{N-1}}}, \tag{8}$$

где

$$a_0 = \sqrt{\frac{3N(N-1)c^4}{S_N G |12-(N-3)^2| \varepsilon_0}}, \tag{9}$$

а коэффициент

$$B_N = \frac{3(N-1)^2}{12-(N-3)^2} \tag{10}$$

Величина B_N при $N \geqslant 7$ становится отрицательной, поэтому значение $a_1 = 0$ независимо от значений a_* и a_0 возможно лишь для $N \leqslant 6$.

Физический смысл параметров a_0 и a_* следующий: величина a_0 есть мера вклада энергии физического вакуума в полную плотность энергии, а величина a_* — это мера вклада энергии вещества или излучения.

В общем случае (произвольный знак метрики) интеграл (6) может быть найден в элементарных функциях лишь в двумерном случае и сведен к эллиптическому интегралу только при $N = 3$ и 4, а интеграл (8) — при $N = 2$ и 3. Но ряд полезных формул можно найти и в случае произвольного значения N. Используя соотношения (6) и (8), получим, что параметр Хаббла равен в первой модели:

$$H = \frac{c}{a_0}\sqrt{\left(\frac{a_*}{a}\right)^N + A_N - k\left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \tag{11}$$

и во второй:

$$H=\frac{c}{a_9}\sqrt{\mathrm{sign}(B_N)\left(\frac{a_*}{a}\right)^{N+1}+|B_N|-k\left(\frac{a_0}{a}\right)^2}. \qquad (12)$$

А с помощью соотношений (11) и (12) определяем значения критической плотности энергии:

$$\varepsilon_{cr}=\varepsilon_0\left(\frac{a_0^2H^2}{c^2}+A_N-1\right) \qquad (13)$$

и

$$\varepsilon_{cr}=\varepsilon_0\left(\frac{a_9^2H^2}{c^2}+|B_N|-1\right) \qquad (14)$$

соответственно.

Теперь можно найти параметр замедления $q=\ddot{a}/(aH)^2$, выражая его через относительные плотности энергии вакуума Ω_v, вещества Ω_d и излучения Ω_r. Получим для первой модели:

$$q=\left(1+\frac{(A_N-1)c^2}{a_0^2H^2}\right)\left(\frac{N-2}{2}\Omega_d-A_N\Omega_v\right) \qquad (15)$$

и для второй:

$$q=\left(1+\frac{(|B_N|-1)c^2}{a_0^2H^2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\Omega_r-|B_N|\Omega_v\right). \qquad (16)$$

В двумерном мире в модели с веществом

$$\begin{aligned} &\sqrt{3(a_*^2-ka_0^2)}\cdot\mathrm{sh}\frac{\sqrt{3}ct}{a_0}; && k>0 \text{ и } a_*>a_0\\ a=\;&a_*\exp\frac{ct}{a_0\sqrt{3}}; && k>0,\quad a_*=a_0\\ &\sqrt{3(a_0^2-a_*^2)}\cdot\mathrm{ch}\frac{ct}{a_0\sqrt{3}}; && k>0,\quad a_*<a_0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Далее мы рассмотрим плоскую метрику ($k=0$). При этом полезно иметь в виду, что в рассматриваемых моделях метрика с кривизной, не равной 0, при $t\to 0$ и $t\to\infty$ имеет плоскую асимптотику (кроме случая (17)). Интегралы (6) и (7) сводятся при $k=0$ к элементарным функциям заменами $x=\sqrt{A_N}(a/a_*)^{N/2}$ и $x=\sqrt{|B_N|}(a/a_*)^{(N+1)/2}$. В модели с веществом в результате получим, что

$$ct=\frac{2}{N}a_0\sqrt{A_N}\cdot\mathrm{Arsh}\left[\frac{a}{\sqrt{A_N}a_*}\right]^{\frac{N}{2}}. \qquad (18)$$

В модели с излучением при $N\leqslant 6$ найдем, что

$$ct=\frac{2}{N+1}a_0\sqrt{B_N}\cdot\mathrm{Arsh}\left[\frac{a}{\sqrt{B_N}a_*}\right]^{\frac{N+1}{2}}. \qquad (19)$$

Соответственно, явная зависимость масштабного фактора от времени в первой модели будет иметь вид:

$$a=a_*\left[\frac{1}{\sqrt{A_N}}\ \mathrm{sh}\left(\frac{N\sqrt{A_N}}{2}\frac{ct}{a_0}\right)\right]^{\frac{2}{N}}. \qquad (20)$$

В модели с излучением при $N\leqslant 6$, получим, что

$$a=a_*\left[\frac{1}{\sqrt{B_N}}\ \mathrm{sh}\left(\frac{(N+1)\sqrt{B_N}}{2}\frac{ct}{a_0}\right)\right]^{\frac{2}{N+1}}. \qquad (21)$$

Выбором системы единиц, в которой за единицу расстояния принято значение $a*$, а за единицу времени — время, за которое свет проходит расстояние a_0, можно привести (12) и (13) к виду, не содержащему свободных параметров.

Дифференцируя выражения (12) и (13) по времени, найдем, что параметр Хаббла равен в случае плоской метрики в первой модели:

$$H=\sqrt{A_N}\,\frac{c}{a_0}\ \mathrm{cth}\left[\frac{N\sqrt{A_N}}{2}\frac{ct}{a_0}\right] \tag{22}$$

и во второй:

$$H=\sqrt{B_N}\,\frac{c}{a_0}\ \mathrm{cth}\left[\frac{(N+1)\sqrt{B_N}}{2}\frac{ct}{a_0}\right]. \tag{23}$$

Отсюда вытекает смысл постоянной a_0. Она определяет предельное значение параметра Хаббла в ходе неограниченного расширения вселенной.

При $N\geqslant 7$ результат интегрирования (8) оказывается следующим:

$$ct=\frac{2a_0}{(N+1)\sqrt{|B_N|}}\ \mathrm{Arch}\left[\sqrt{|B_N|}\left(\frac{a}{a_*}\right)^{\frac{N+1}{2}}\right], \tag{24}$$

откуда следует, что

$$a=a_*\left[\frac{1}{\sqrt{|B_N|}}\ \mathrm{ch}\left(\frac{(N+1)\sqrt{|B_N|}}{2}\frac{ct}{a_0}\right)\right]^{\frac{2}{N+1}} \tag{25}$$

Во всех случаях, кроме двумерного мира с веществом, расширение вселенной происходит сначала с замедлением, а затем — ускоренно. Замедление сменяется ускорением в точке перегиба, для нахождения координаты которой a_p нужно продифференцировать по времени величины, обратные подынтегральным выражениям в интегралах (6) и (8). В результате найдем, что

$$a_p=a_*\left(\frac{N-2}{2A_N}\right)^{\frac{1}{N}} \quad \text{или} \quad a_p=a_*\left(\frac{N-1}{2|B_N|}\right)^{\frac{1}{N+1}} \tag{26}$$

В соответствии с (18) значение масштабного фактора в точке перегиба растет (в единицах a_*) с ростом размерности пространства N, но в соответствии с (15) и (16) это значение достигается во времени все раньше, так как с ростом размерности требуется все меньший вклад плотности вещества или излучения для изменения знака параметра замедления.

Найдем, наконец, наиболее отклоняющиеся от 1 значения относительной плотности энергии Ω_{ex}, используя соотношения (1), (2) и (11)–(14). Получим, что эти экстремальные значения достигаются в рассматриваемых моделях при

$$\Omega_{ex}=a_*\left(\frac{N-2}{2}\right)^{\frac{1}{N}} \quad \text{и} \quad a_{ex}=a_*\left(\frac{N-1}{2}\right)^{\frac{1}{N+1}} \tag{27}$$

а сами эти значения равны

$$\Omega_{ex}=\left[1-\frac{2k}{N}\left(\frac{N-2}{2}\right)^{\frac{N-2}{N}}\left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{N}\right]^{-1} \tag{28}$$

и

$$a_{ex}=\left[1-\frac{2k}{N+1}\left(\frac{N-1}{2}\right)^{\frac{N-1}{N+1}}\left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{(N+1)}\right]^{-1} \tag{29}$$

соответственно.

Сопоставим общий случай многомерного мира с трехмерным случаем нашей Вселенной. Последний выделяется своей некоторой простотой. В нем отсутствует зависящая от размерности пространства константа в выражениях для критической плотности энергии, упрощаются выражения для параметра замедления и, наконец, значения масштабного фактора в точках перегиба и экстремума относительной плотности энергии совпадают между собой.

И, в заключение, запишем обобщение исходных соотношений для двухкомпонентных моделей на случай «физический вакуум + среда с произвольным уравнением состояния $p=w\varepsilon$». Вместо уравнений (1)–(2) будем иметь, что

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{a_*}{a} \right)^{N(w+1)} + 1 \right]. \tag{30}$$

Связь времени и масштабного фактора приобретает такой вид:

$$ct = a_0 \int\limits_{a_1}^{a} \frac{a^{\frac{N(w+1)-2}{2}}\, da}{\sqrt{\mathrm{sign} A_N(w) a_*^{N(w+1)} + |A_N(w)| a^{N(w+1)} - k a_0^2 a^{N(w+1)-2}}}, \tag{31}$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{N(N-1)c^4}{S_N G(N - N(N-3)w + 1)}}, \tag{32}$$

$$A_N(w) = \frac{(N-1)^2}{N - N(N-3)w + 1}. \tag{33}$$

1. *Апуневич С.Є.* Визначення космологічних параметрів за даними з анізотропії реліктового випромінювання // Вісник Астрономічної школи. — 2000. — **1**, №2. — С. 42–46.

2. *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. — М.: Наука, 1990. — 272 с.

3. *Aleksandrov Yu.V., Tararoyev Ya.V.* Metrical evolution of multdimensial universes // Odessa Astronomical Publications. — 1996.— **9**. — P. 159–160.

4. *Khodyachikh M.F.* Cosmological periodicities and models of Universe // Gravitation, Cosmology and Relativistic Astrophysics. — Kharkov: Kharkov National University, 2001. — P. 133–143.

5. *Riess A.G., Filipenko A.V., Challis P., et al.* Observational evidence from Supernovae for accelerating Universe and a cosmological constant // Astron. J. — 1998. — **116**. — P. 1009–1038.

6. *Perlmuter S., Aldering G., Goldhaber G., et al.* Measurements of Ω and Λ from 42 high-readshift Supernovae // Astrophys. J. — 1999. — **517**. — P. 565–586.

Поступила в редакцию 1.11.2002