

УДК 524.355; 52–423.4; 532.5

## Об эволюции самогравитирующего тороидального вихря

Е.Ю. Банникова<sup>1,2</sup>, К.Ю. Блюх<sup>2</sup>, В.М. Конторович<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина

<sup>2</sup> Радиоастрономический институт НАН Украины

*Рассмотрены эволюция и коллапс газового самогравитирующего тороидального вихря. Показано, что вначале происходит сжатие по малому радиусу к квазиравновесному состоянию тонкого вихря, потом более медленное сжатие по большому радиусу к компактному вихревому объекту. В последнем обнаружена возможность формирования джета вдоль оси вихря, приводящая к его коллапсу. При учете теплового давления для достаточно больших масс сохраняется устойчивость вихря даже при показателе политропы  $\gamma < \frac{4}{3}$ . В случае вырожденного газа эволюция компактного вихря существенно отличается для электронов и нейтронов. В ультрарелятивистском пределе в нейтронном газе возникает интервал устойчивых масс, зависящий от циркуляции скорости в вихре.*

*ПРО ЕВОЛЮЦІЮ САМОГРАВІТУЮЧОГО ТОРОЇДАЛЬНОГО ВИХОРУ, Баннікова О.Ю., Блюх К.Ю., Конторович В.М. — Розглянуті еволюція і колапс газового самогравітуючого тороїдального вихору. Показано, що спочатку тонкий вихор стискається за малим радіусом до квазірівноважного стану, потім повільніше стискається за великим радіусом до компактного вихревого об'єкта. У цьому останньому виявлена можливість формування джета вздовж осі вихору, що призводить його до колапсу. З урахуванням теплового тиску для досить великої маси сталість вихору зберігається навіть з показником політропи  $\gamma < \frac{4}{3}$ . У разі виродженого газу еволюція компактного вихору істотно відрізняється для електронів і нейтронів. В ультрарелятивістській межі в нейтронному газі виникає інтервал стійкої маси, що залежить від циркуляції швидкості у вихорі.*

*ON EVOLUTION OF SELF-GRAVITATING TOROIDAL VORTEX, by Bannikova E.Yu., Bliokh K.Yu., Kontorovich V.M. — The evolution and collapse of a gas self-gravitating toroidal vortex are considered. The thin vortex is shown to first contract along the small-radius to a quasi equilibrium condition, then the slower large-radius contraction to a compact vortex object follows. This latter reveals the capability of forming a jet along the vortex axis that results in its collapse. With the thermal pressure considered for sufficiently large masses the vortex still remains stable even for a polytropic exponent of  $\gamma < \frac{4}{3}$ . In the degenerate gas case the compact vortex evolution essentially differs for electrons and neutrons. In the ultra relativistic limit the neutron gas reveals the vortex velocity circulation dependent interval of steady masses.*

### 1. Введение

Открытие затеняющих торов в центрах активных галактик [10] возродило интерес к исследованию устойчивости тороидальных конфигураций<sup>1</sup>.

Особую роль, на наш взгляд, должны играть тороидальные вихри с циркуляцией скорости по малому контуру, самогравитирующие аналоги которых до последнего времени<sup>2</sup> не рассматривались. Мы ограничимся здесь простейшим случаем газового вихревого кольца, наглядным образом

<sup>1</sup>Мы не касаемся классической проблемы устойчивости вращающихся как целое тором, восходящей к Пуанкаре и Дайсону. Современное состояние проблемы в рамках ОТО и ссылки (в т.ч. и на работы по моделированию вращающимися торами толстых аккреционных дисков) см. в [11].

<sup>2</sup>По-видимому, первая попытка такого рода предпринята в [12]. В астрофизических приложениях важную роль играет сжимаемость подобных объектов, в то время как обычно вихри (в том числе все классические решения — вихри Максвелла, Хилла, Ламба и др.) описываются в рамках гидродинамики несжимаемой жидкости. Отметим также возросший в последнее время интерес к вихрям, как родственным солитонам локализованным образованиям (см. ссылки в [2, 7]).

которого могут служить дымовые кольца курильщиков. Мы покажем, что эволюция таких вихрей обладает рядом особенностей, отличающих их как от диска, так и от сферы, и позволяющих достаточно эффективно (в предположении плотности, не зависящей от координат) использовать простые аналитические подходы и явно получать критерии устойчивости.

Другой вопрос, чрезвычайно актуальный для современной астрофизики, связан с происхождением космических струй (джетов), возникающих, как принято считать, в аккреционных дисках различной природы и масштабов — от галактических [8] до звездных [13]. Объяснение таких струй представляет собой весьма нетривиальную задачу, в разрешении которой в рамках МГД достигнуты в последние годы значительные успехи [14]. Как мы покажем ниже, возникновение (однаправленных) джетов является естественным следствием эволюции самогравитирующих вихрей и непременным условием их коллапса. При этом джеты возникают и в отсутствие магнитного поля. Трудности решения гидродинамической задачи в сжимаемом случае заставляют искать различные подходы и методы. Мы существенно используем гамильтоново описание движения частицы в самосогласованном поле вихря, используем различные способы получения дисперсионного уравнения при учете давления газа. Особое внимание уделяется случаю его вырождения, приводящего к необычным условиям устойчивости для релятивистского вырожденного нейтронного газа.

## 2. Первая стадия: эволюция тонкого вихря

Предположим, что на начальной стадии форма рассматриваемого вихря представляет собой тонкий тор (рис. 1), радиусы которого удовлетворяют неравенству

$$r \ll R. \quad (1)$$

(примером такого вихря в гидродинамике может служить вихрь Максвелла [3, 4]). Далее, будем

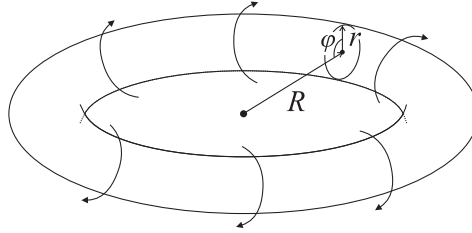


Рис. 1. Тонкий тороидальный вихрь типа вихря Максвелла.

считать, что эволюция вихря на начальной стадии происходит без изменений тороидальности формы. Будем следить за движением пробной частицы на поверхности тора. В данной системе помимо одной вращательной степени свободы, будут две поступательных: им отвечают изменения  $r$  и  $R$  (мы не рассматриваем здесь поступательного движения вихря как целого). Заметим, что в силу (1) движение по  $r$  и вращение представляют собой локально сжатие вращающегося цилиндра, а движение по  $R$  представляет собой коллапс тонкого кольца.

Запишем гамильтониан системы в виде

$$H = \frac{1}{2M} \left[ p_r^2 + p_R^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right] + U(r, R). \quad (2)$$

Здесь  $M$  — полная масса вихря,  $p_s$  — импульсы, соответствующие координатам  $s$ ,  $\varphi$  — циклическая координата вращения, а  $U$  — гравитационная потенциальная энергия системы. Гамильтоновыми уравнениями, отвечающими (2), являются:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{M}, \quad \dot{R} = \frac{p_R}{M}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{Mr^2}; \quad \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{Mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \dot{p}_R = \frac{\partial U}{\partial R}, \quad \dot{p}_\varphi = 0. \quad (3)$$

Отсюда следуют уравнения движения для поступательных степеней свободы:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - \frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial r} & a); \\ \ddot{R} &= -\frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial R} & b). \end{aligned} \quad (4)$$

и интеграл движения для вращательной:

$$p_\varphi = M r^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (5)$$

Последний представляет собой закон сохранения момента импульса (величина  $2\pi p_\varphi M$  соответствует циркуляции скорости  $\Gamma$ ). Для определения функции  $U(r, R)$  рассмотрим сначала уравнение (4 а). Оно описывает эволюцию вращающегося цилиндра радиуса  $r$ . Гравитационная сила, действующая на пробную частицу на поверхности цилиндра, равна

$$F_r = -G \frac{2\chi m}{r}, \quad (6)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $\chi$  — масса единицы длины цилиндра, а  $m$  — масса пробной частицы. Таким образом, сила гравитационного притяжения, стоящая в правой части первого уравнения (4 а)

$$-\frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial r} = -G \frac{2\chi}{r}. \quad (7)$$

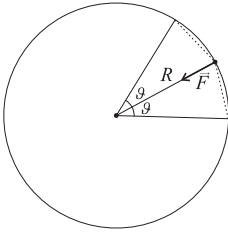
В рассматриваемом случае тонкого тора  $\chi = M/2\pi R$ , откуда

$$U(r, R) = G \frac{M^2}{\pi R} \ln \frac{r}{R} + c_1(R). \quad (8)$$

Чтобы определить зависимость потенциальной энергии  $U$  от большого радиуса  $R$ , рассмотрим второе уравнение движения (4 б). Оно должно описывать гравитационное сжатие тонкого кольца радиуса  $R$ . Сила, действующая на пробную частицу, находящуюся на бесконечно тонком кольце равна

$$F_R = -G \frac{Mm}{2\pi R^2} \int_{\vartheta \rightarrow 0}^{\pi} \frac{d(\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)} \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Эта формула получается прямым интегрированием вкладов от взаимодействий частицы со всеми элементами кольца (рис. 2).



**Рис. 2.** К вычислению самогравитации бесконечно тонкого кольца.

Чтобы избежать расходимости при  $\vartheta \rightarrow 0$ , необходимо учитывать конечную толщину кольца. Для этого обрежем расходящуюся часть (9), заменив интервал интегрирования  $(0, \pi)$  на  $(\vartheta_c, \pi)$ , где  $\vartheta_c = \alpha r/R$  ( $\alpha \sim 1$  — числовой множитель). В результате получим

$$U(r, R) = G \frac{M^2}{2\pi R} \ln \frac{\tilde{\alpha} r}{R} + c_2(r), \quad (10)$$

где  $\tilde{\alpha} = \alpha/e$ . Полагая в (10)  $c_2 = 0$ , а в (8)  $c_1(R) = (GM^2/\pi R) \ln \tilde{\alpha}$ , замечаем, что формулы (8) и (10) могут быть приведены к одному виду, отличаясь лишь коэффициентом  $1/2$ , что для нашего рассмотрения не существенно.

Теперь мы можем выписать гамильтониан (2) тонкого тороидального вихря:

$$H = \frac{1}{2M} \left[ p_r^2 + p_R^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right] + G \frac{M^2}{\pi R} \ln \frac{\tilde{\alpha} r}{R}. \quad (11)$$

Уравнения движения (4) при этом примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - G \frac{M}{\pi R r} & a), \\ \ddot{R} &= -G \frac{M}{\pi R^2} \ln \frac{\alpha r}{R} & b). \end{aligned} \quad (12)$$

Вследствие (1)  $(r/R) \ln r/R \ll 1$ . Тогда сила гравитационного притяжения по  $r$  (12 а) много больше силы гравитационного сжатия по  $R$  (12 б). Это дает основание разделить эволюцию системы по разным масштабам: быстрому по  $r$  и медленному по  $R$ . Естественнo считать, что быстрая эволюция (при практически неизменном  $R$ ) приведет к установлению равновесия в уравнении (12 а). Сила гравитационного притяжения при этом будет скомпенсирована центробежной силой вращения:

$$\frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - G \frac{M}{\pi R r} = 0, \quad \text{откуда} \quad r_{eq} = \sqrt{\frac{\pi p_\varphi^2 R}{GM^3}}. \quad (13)$$

Это выражение определяет равновесный малый радиус как функцию большого:  $r_{eq} = r(R)$ , а неравенство  $r > r_{eq}$  соответствует критерию гравитационной неустойчивости (ср. [6]) с джинсовым масштабом  $r_{eq}$ . Последнее становится очевидным, если учесть, что масса тора  $M \propto \rho \cdot \pi r^2 R$ , где  $\rho$  — его плотность.

Как видно из (12 а) в качестве грубой оценки времени сжатия вихря к квазиравновесному состоянию можно принять кеплеровское время, соответствующее малому радиусу  $r$

$$t_r \sim \frac{R\Gamma}{GM} \sim \frac{r^2}{\Gamma}. \quad (14)$$

Если неравенство (1) имеет место, то, согласно уравнению движения (12б) и соотношению (13), будет происходить медленное сжатие тора-вихря по обоим радиусам до тех пор, пока они не станут величинами одного порядка:

$$r_{eq} \sim R = R_c = \frac{\pi p_\varphi^2}{GM^3} = \frac{r_e^2 q}{R} \ll r_0. \quad (15)$$

На этом этапе уже нет возможности разделять эволюцию вихря по двум поступательным степеням свободы  $r$  и  $R$ , и следует описывать вихрь как единый компактный объект с достаточно сложной внутренней структурой. Аналогом подобного вихря может служить сферический вихрь Хилла, но в нашем случае мы имеем дело с топологией тора, а не сферы.

Определим некоторые параметры вихря, с которыми он придет ко второй стадии (15). Для скорости частиц на поверхности вихря, используя закон сохранения момента импульса (5) и (13), получим

$$v = \frac{p_\varphi}{Mr} \sim \sqrt{\frac{GM}{\pi R}} \sim \frac{GM^2}{\pi p_\varphi} \frac{r}{R}. \quad (16)$$

Видно, что скорость вращения равновесного по  $r$  вихря определяется только его массой и большим радиусом и растет при сжатии по  $R$ . Когда вихрь подойдет к концу первой стадии, скорость достигнет значения

$$v_{fin} \sim \frac{GM^2}{\pi p_\varphi}. \quad (17)$$

и будет много больше начальной  $v_0$ :

$$\frac{v_{fin}}{v_0} \sim \sqrt{\frac{R_0}{R_c}} \sim \frac{r_0}{R_c} \sim \frac{R_0}{r_0} \gg 1. \quad (18)$$

Аналогично (15) время сжатия вихря по большому радиусу можно оценить как соответствующее ему кеплеровское время  $t_R \sim \sqrt{R^3/GM}$ .

Посмотрим, как распределяется приобретаемая вихрем кинетическая энергия по степеням сво-

боды. Будем считать, что в начале сжатия вещество в вихре было практически свободным

$$\left| \frac{GM^2}{\pi R_{in}} \ln \frac{\tilde{\alpha} r_{in}}{R_{in}} \right| \sim \frac{1}{2M} \left[ p_r^2 + p_R^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right] \Big|_{in} \ll \frac{GM^2}{\pi R_c}. \quad (19)$$

В согласии с теоремой вириала для  $U \sim R^{-1}$  имеем  $E = -K < 0$ . Поскольку полная энергия есть интеграл движения, а начальное ее значение близко к нулю, то заключаем, что и кинетическая энергия поступательного движения  $K$  будет того же порядка. Таким образом, высвобожденная при сжатии энергия по порядку величины равномерно распределяется между вращательной и поступательными степенями свободы. Этот факт будет использован в дальнейшем; в частности, он означает, что случайного увеличения скорости вращательного движения частицы менее чем в два раза достаточно для ее отрыва и выхода из системы.

### 3. Вторая стадия: эволюция компактного вихря

Попробуем представить, как может происходить сжатие гравитирующего вихря, когда он является компактным объектом, топологически эквивалентным тору. Можно ожидать, что под действием гравитационных сил он будет приближаться к некоторой конфигурации, напоминающей вихрь Хилла [3, 4] (рис. 3). Если рассматривать, как мы это делаем, такой объект на уровне оценок, то можно считать, что у него есть одна вращательная степень свободы и одна поступательная. Последняя определяется изменением его радиуса  $R$ . Радиус вращения частиц (который в предыдущем пункте был независимой величиной  $r$ ) теперь примерно равен  $R/2$ . Гамильтониан такого вихря можно представить как

$$H = \frac{p_R^2}{2M} + \frac{2p_\varphi^2}{MR^2} - \frac{GM^2}{R}. \quad (20)$$

Здесь вид второго слагаемого мы приняли таким, как в (11) с  $r = R/2$ , а в качестве потенциальной энергии взяли потенциальную энергию шара. Гамильтониану (20) отвечает уравнение движения

$$\ddot{R} = \frac{4p_\varphi^2}{M^2 R^3} - \frac{GM}{R^2}. \quad (21)$$

Это уравнение движения имеет положение равновесия, когда

$$\frac{4p_\varphi^2}{M^2 R^3} - \frac{GM}{R^2} = 0 \quad \text{или} \quad R_{c1} = \frac{4p_\varphi^2}{GM^3}, \quad (22)$$

где  $R_{c1}$  опять играет роль джинсова масштаба. Таким образом, равновесие этого объекта находится при таком же по порядку радиусе, как и тот, на котором заканчивается первая стадия эволюции (ср. с (15)). Это означает, что в задаче о сжатии тонкого кольца нам нет необходимости рассматривать отдельно эволюцию компактного вихря. Можно считать, что равновесие наступает почти сразу, как только кольцо приходит к параметрам (15)–(18).

С другой стороны, можно рассматривать задачу о сжатии вихря, который сразу напоминает собой вихрь Хилла, но вначале далек от равновесного состояния. Тогда мы также, в конце концов, приходим к равновесному компактному вихрю с радиусом того же порядка (22). Скорость вращения частиц при этом будет порядка (16):

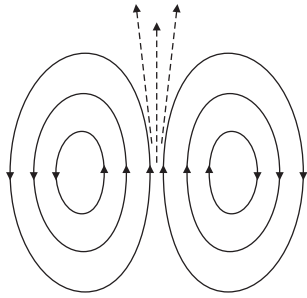
$$v_{fin} \sim \frac{GM^2}{2p_\varphi}, \quad \text{причем} \quad \frac{v_{fin}}{v_{in}} \sim \frac{R_{in}}{R_{c1}} \gg 1. \quad (23)$$

Аналогично, несложно показать, что при установлении равновесия (22), по крайней мере, половина высвободившейся потенциальной энергии перейдет в кинетическую энергию вращения (оставшаяся часть при этом перейдет в тепло).

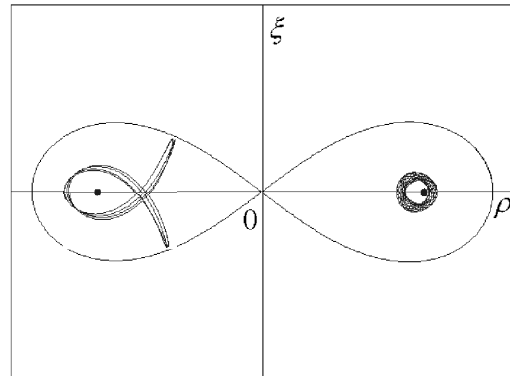
Можно обобщить приведенный анализ на случай, когда в системе имеется центральное массивное тело, или если вихрь вращается вокруг своей оси. Эти факторы приведут к появлению дополнительных слагаемых в уравнении (12) и, разумеется, изменят обсуждаемую динамику.

#### 4. Рассеяние и отрыв частиц

Итак, после различных возможных стадий эволюции тороидальный вихрь превращается в компактный объект с характерными параметрами (15), (17), (18) (или (22)–(23)) (рис. 3). При этом скорость вращения вещества в нём значительно больше скоростей в исходном вихре.



**Рис. 3.** Разрез компактного сферообразного вихря типа вихря Хилла.



**Рис. 4.** Характерные финитные траектории частицы в гравитационном поле кольца.

Обратим внимание на потоки вещества, текущие сквозь вихрь возле его оси. В этом месте возможно эффективное рассеяние частиц. Такое рассеяние будет приводить к увеличению скорости у значительной доли частиц. При этом, как следует из приведенных выше рассуждений, увеличения вращательной скорости частиц менее чем в два раза достаточно, чтобы набрать нужную для отрыва кинетическую энергию. Следовательно, можно ожидать, что определенная доля частиц будет в результате рассеяния выбрасываться из вихря в виде направленной струи, уносящей вещество из центра вихря. Напомним, что для вращающейся сферы (или диска) отрыв частиц наиболее вероятен на экваторе, и должен приводить к образованию диска, а не струи.

Проиллюстрируем предложенный выше сценарий на движении пробной частицы в гравитационном поле кольца (тонкого тора) фиксированного радиуса (рис. 4).

При небольших энергиях частица вращается на орбите малого радиуса, обвивая кольцо (рис. 4, справа). Это движение соответствует тонкому вихрю (возможная первая стадия эволюции). С увеличением энергии частицы появляются различные сложные траектории (рис. 4, слева), которые однако своей ориентацией не могут соответствовать вихревому движению, и поэтому для нас не важны. Наконец, начиная с некоторого значения энергии, частица переходит на почти замкнутые траектории типа «восьмёрка» (рис. 4). При этом радиус вращения частиц становится порядка радиуса кольца, что соответствует как раз конечной стадии сжатия вихря (15). Кинетическая энергия частицы на таких траекториях уже близка к энергии, необходимой для отрыва частиц. Движение частиц по «восьмёркам» приведет к эффективному их столкновению и рассеянию вблизи оси вихря.<sup>3</sup>

Можно сказать, что для движущихся частиц фиксированной энергии сжатие тора качественно приводит к тем же последствиям, что и увеличение их энергии при фиксированном размере тора. В итоге должна возникнуть осевая струя (односторонний джет), уносящая энергию, массу и момент вихря. Как следствие, сжатие вихря будет продолжаться (коллапс), причем темп сжатия  $dR/dt$  определяется темпом потери массы вихря (потоком частиц в джете, см. ниже). Таким образом, коллапс вихря и возникновение джета однозначно связаны между собой.

<sup>3</sup>Существование потоков вещества типа «восьмёрка» следует и из гидродинамической модели вихря Максвелла (см., например, [3]).

## 5. Коллапс вихря

Рассмотрим, к каким последствиям может привести выброс частиц из вихря, обсуждавшийся в предыдущем разделе. Поток частиц вблизи от оси вихря будет уносить с собой массу, энергию и момент импульса вихря. Последние величины оценим как

$$E \sim -\frac{Mv^2}{2}, \quad p_\varphi \sim \frac{MRv}{2}, \quad (24)$$

где все величины берутся для равновесного компактного вихря (пункт 3), и, как было отмечено выше,  $E = -T$ . Из (24) имеем

$$R \sim \frac{p_\varphi}{\sqrt{-ME}}. \quad (25)$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{R} \sim \frac{1}{\sqrt{-ME}} \dot{p}_\varphi - \frac{p_\varphi}{2(-ME)^{3/2}} (M\dot{E} + E\dot{M}). \quad (26)$$

Будем считать, что поток частиц сравнительно невелик и этот процесс проходит гораздо медленнее, чем устанавливается равновесие компактного вихря. Тогда оценить изменение характеристик вихря, уносимых потоком частиц можно как

$$\dot{M} = -J, \quad \dot{E} \sim J \frac{v^2}{2} \sim -\frac{J}{M} E, \quad \dot{p}_\varphi \sim -J \frac{Rv}{2} \sim -\frac{J}{M} p_\varphi, \quad (27)$$

где  $J$  - поток массы в выбрасываемой струе вещества. Подставляя (27) в (26) и учитывая (25), получим

$$\dot{R} \sim -R \frac{J}{M} = R \frac{\dot{M}}{M}. \quad (28)$$

Решением этого уравнения является

$$R(t) = R(0) \left( \frac{M(t)}{M(0)} \right)^\beta. \quad (29)$$

Здесь  $\beta \sim 1$  — некоторая положительная константа (которая появляется из-за того, что все параметры вихря мы оценивали выше лишь по порядку), а отсчет времени начинается с момента когда вихрь пришел к компактному равновесному состоянию и началось эффективное рассеяние и отрыв частиц. Зависимость от времени массы вихря  $M(t)$ , определяется для конкретного механизма рассеяния частиц. В общем случае поток массы вещества  $J = -\dot{M}$  зависит от основных характеристик вихря: массы, энергии и момента. Если в простейшем случае предположить, что поток вещества пропорционален массе вихря и слабо зависит от других величин:  $J = kM$ , то уравнения (27)–(29) приведут к экспоненциальным законам

$$M(t) = M(0)e^{-kt}, \quad R(t) = R(0)e^{-\beta kt}. \quad (30)$$

Таким образом, уравнения (28)–(30) показывают, что рассеяние частиц и выброс вещества действительно могут приводить к коллапсу компактного вихря.

Характерный временной масштаб коллапса определяется как

$$t_{col} \sim |M/\dot{M}|. \quad (31)$$

В рассмотренном примере коллапс должен быть медленным по сравнению с характерным временем сжатия вихря к равновесному состоянию, что соответствует  $t_{col} \gg t_2$ .

## 6. Влияние теплового давления

Как мы видели, в отсутствие давления при практически неизменном большом радиусе  $R$  вначале установится равновесное значение малого радиуса тора  $r(R)$ , определяемое его массой  $M$  и циркуляцией скорости  $\Gamma$ , а затем в результате сжатия по большому радиусу оба радиуса становятся одного порядка, и вихрь превращается в компактный. На этой стадии число параметров уменьшилось настолько, что равновесное значение радиуса  $R$  может быть найдено из одних только сообра-



жений размерности. Действительно, из  $M$ ,  $\Gamma$  и  $G$  (гравитационная постоянная) можно построить только одну величину размерности длины

$$\lambda = \frac{\Gamma^2}{GM} \quad (32)$$

которая точно совпадает с вычисленным выше равновесным радиусом тора  $R$ , если под  $\Gamma$  понимать циркуляцию, делённую на  $2\pi$ .

Поскольку циркуляция, умноженная на массу есть сохраняющаяся компонента импульса  $I = p_\varphi$ , из баланса гравитационных ( $GM/R$ ) и центробежных ( $I^2/2Mr^2$ ) слагаемых в энергии следуют корневая зависимость  $r \propto \sqrt{R}$  и, соответственно, условие равновесия тонкого вихря  $r \simeq \sqrt{\lambda R}$ , более последовательно полученное<sup>4</sup> в пункте 2.

Рассмотрим теперь влияние теплового давления на условия устойчивости компактного вихря, что является основной целью данного раздела. Для того чтобы ввести силы теплового давления в уравнения движения (12) заметим, что виртуальная работа, совершаемая внешними силами против силы давления, равна

$$\delta A = -\delta E = p\delta V, \quad (33)$$

где  $p$  — давление в вихре,  $V$  — объем вихря (здесь и далее мы не учитываем распределение вещества и давления по малому радиусу тора, пренебрегая при этом множителями порядка единицы в формулах). Учитывая, что объем тора равен  $V = 2\pi^2 r^2 R$ , из (33) получим

$$-\delta E = 4\pi^2 r R p \delta r + 2\pi^2 r^2 p \delta R. \quad (34)$$

Отсюда найдем силы, действующие по  $r$ - и  $R$ -измерениям  $F_r = -\delta E/\delta r$  и  $F_R = -\delta E/\delta R$  и, соответственно, добавочные слагаемые сил давления в (12):

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - G \frac{M}{\pi R r} + \frac{p}{M} 4\pi^2 R r, \\ \ddot{R} &= -G \frac{M}{\pi R^2} \ln \frac{\alpha r}{R} + \frac{p}{M} 2\pi^2 r^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Чтобы связать давление с параметрами вихря, необходимо привлечь уравнение состояния вещества и процесса эволюции вихря. Предположим, что мы имеем дело с идеальным газом и политропным процессом сжатия (расширения). Тогда, вводя начальную температуру вещества  $T_0$ , начальные параметры вихря  $r_0$  и  $R_0$ , и массу одной частицы газа  $m_0$ , получаем

$$p = \frac{p_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} = \frac{M T_0}{m_0} \frac{(2\pi^2 r_0^2 R_0)^{\gamma-1}}{(2\pi^2 r^2 R)^\gamma}. \quad (36)$$

Подставляя это выражение в (35) имеем вместо (12):

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - G \frac{M}{\pi R r} + \frac{T_0}{m_0} \frac{2 (r_0^2 R_0)^{\gamma-1}}{r^{2\gamma-1} R^{\gamma-1}}, \\ \ddot{R} &= -G \frac{M}{\pi R^2} \ln \frac{\alpha r}{R} + \frac{T_0}{m_0} \frac{(r_0^2 R_0)^{\gamma-1}}{r^{2\gamma-2} R^\gamma}. \end{aligned} \quad (37)$$

Величина равновесного радиуса  $R = \lambda$  (32) представляет собой джинсову длину для вихря при нулевой температуре. Величина  $\Gamma^2 \propto v^2$ , где  $v \equiv v_\varphi$  — регулярная скорость в вихревом кольце. Учтем тепловую скорость заменой  $v^2 \rightarrow v^2 + v_T^2$ . (Последующее уточнение будет состоять лишь в том, что вместо  $v_T$  войдет скорость звука  $c_s$ , умноженная на безразмерный геометрический фактор  $j_1 \sim 1$ , роль которого играет значение нуля бесселевой функции для тонкого тора, либо функции Лежандра для сферического вихря и т.п.). Таким образом, при учете теплового движения выражение для джинсового масштаба (32) видоизменяется:

$$\lambda \rightarrow \lambda_T = \frac{\Gamma^2 + R^2 v_T^2}{GM}. \quad (38)$$

<sup>4</sup>Отметим, что для определения внутреннего радиуса компактного тора, представляющего собой разность величин одного порядка, используемого качественного подхода недостаточно.



Условие равновесия  $R = \lambda_T$  превращается в уравнение для  $R_J$ , выражающее радиус равновесного тора через  $M$ ,  $\Gamma$  и  $v_T$ . Его решение

$$R_{\pm} = \frac{GM \pm \sqrt{(GM)^2 - 4\Gamma^2 v_T^2}}{2v_T^2} \quad (39)$$

при  $v_T \rightarrow 0$  переходит в  $R_- \rightarrow \lambda$ , а  $R_+ \simeq GM/v_T^2$  представляет собой равновесное значение радиуса в отсутствие циркуляции.

Возводя (39) в куб и умножая на  $4\pi\rho/3$ , где  $\rho$  — плотность вихря, получаем уравнение для джинсовой массы  $M_J = 4\pi\rho R_J^3/3$  (в сферическом варианте <sup>5</sup>) как функции плотности и температуры  $T$ :

$$2(GM)^{4/3} - \left(\frac{6}{\pi G}\right)^{1/3} \frac{v_T^2}{\rho^{1/3}} (GM)^{2/3} - 4\Gamma^2 \left(\frac{\pi G}{6}\right)^{1/3} \rho^{1/3} = 0. \quad (40)$$

Представляя  $v_T^2$  в виде  $\zeta_1 T$ , где  $\zeta_1 \sim 1/m$  ( $m$  — масса частицы газа) содержит также геометрический фактор и множитель, в соответствии со сделанным замечанием, отличающий квадрат скорости звука  $c_s^2$  от  $v_T^2$ , запишем выражение для положительного корня уравнения (40)

$$4(GM)^{2/3} = \zeta \left(\frac{6}{\pi G}\right)^{1/3} \frac{T}{\rho^{1/3}} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 32 \frac{\rho}{T^2} \Gamma^2 \frac{\pi G}{6 \zeta^2}} \right\}. \quad (41)$$

Или, вводя  $\tilde{\xi} \equiv 16\pi G/(3\zeta_1^2)$  и  $\tilde{\mu} = \frac{4G}{\zeta_1} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3}$ , где

$$\tilde{\mu} M^{2/3} = \tilde{F}, \quad \tilde{F} = \frac{T}{\rho^{1/3}} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \tilde{\xi} \frac{\rho}{T^2} \Gamma^2} \right\}. \quad (42)$$

Описывая процесс сжатия политропой  $T = \tau \rho^{\gamma-1}$ , перепишем (42) в виде

$$\mu M^{2/3} = F_{\gamma} \equiv \rho^{\gamma-\frac{4}{3}} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \xi \rho^{3-2\gamma} \Gamma^2} \right\}, \quad (43)$$

Здесь

$$\mu = \tilde{\mu}/\tau, \quad \xi = \tilde{\xi} \tau^2 \quad (44)$$

При  $\gamma > 3/2$  член с циркуляцией существен на малых плотностях ( $F_{\gamma} \rightarrow \rho^{1/6} \Gamma \sqrt{\xi}$  для  $\rho \rightarrow 0$ ). Функция  $F_{\gamma}$  монотонно возрастает с ростом плотности, имеется единственное устойчивое решение уравнения (43). При  $4/3 < \gamma < 3/2$  вклад  $\Gamma$  растет с ростом плотности ( $F_{\gamma} \rightarrow \rho^{1/6} \Gamma \sqrt{\xi}$  при  $\rho \rightarrow \infty$ ),  $F_{\gamma}$  по-прежнему монотонно возрастает с ростом  $\rho$ , решение (43) существует и устойчиво.

При  $\gamma < 4/3$   $F_{\gamma} \rightarrow \rho^{\gamma-\frac{4}{3}} \rightarrow +\infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $F_{\gamma} \rightarrow \rho^{1/6} \Gamma \sqrt{\xi} \rightarrow +\infty$  при  $\rho \rightarrow \infty$ , функция  $F_{\gamma}$  немонотонна. Из условия  $\frac{\partial F_{\gamma}}{\partial \rho} = 0$  находим единственную точку минимума  $F_{\gamma}$

$$\rho_c^{3-2\gamma} = \frac{36(\gamma-4/3)(\gamma-5/3)}{\xi \Gamma^2}, \quad \gamma < 4/3. \quad (45)$$

(Кажущаяся возможность  $\gamma > 5/3$  соответствует лишнему корню уравнения для экстремума). Значение

$$F_{\gamma}(\rho_c) = \rho_c^{\gamma-\frac{4}{3}} \left( 1 + \sqrt{1 + 36(\gamma-4/3)(\gamma-5/3)} \right) \quad (46)$$

в минимуме определяет зависящую от  $\Gamma$  критическую массу

$$M_{\gamma}(\Gamma) = \frac{1}{\mu^{3/2}} F_{\gamma}^{3/2}(\rho_c), \quad (47)$$

ограничивающую область устойчивых решений по массам снизу. Результат весьма необычен и ранее в подобных задачах, насколько нам известно, не встречался. Устойчивости отвечает восходящая ветвь функции  $F_{\gamma}$ , т.е. наличие циркуляции скорости в компактном вихре стабилизирует вихри достаточно больших масс ( $M > M_{\gamma}(\Gamma)$ ) и плотностей ( $\rho > \rho_c$ ) относительно гравитационного сжатия.

<sup>5</sup>Вместо этого можно выбрать численные коэффициенты, соответствующие тору. Как уже отмечалось выше, истинная форма компактного вихря здесь не может быть найдена, и вычисления справедливы лишь с точностью до коэффициентов порядка единицы и носят качественный характер.

В случае тонкого вихря стабилизация всегда возможна при  $\rho < \rho_*(\gamma, \Gamma)$ , на чем мы здесь за недостатком места не останавливаемся. Основное уравнение в этом случае — выражение для джинсова равновесного радиуса:

$$r_+^2 = \frac{\Gamma^2/2\pi^2}{\frac{2GM}{\pi R} - c_s^2 j_1^2}, \quad (48)$$

где  $j_1$  — упоминавшийся выше геометрический фактор. Это соотношение является прямым обобщением корневой зависимости (13)  $r(R)$  (см. пункт 2). Но оно представляет собой явное выражение для джинсова радиуса только в изотермическом случае в силу зависимости скорости звука в газе только от его температуры  $T$ . Для всех остальных процессов сжатия вихря соотношение (48) является уравнением. Умножая (48) на  $2\pi^2 R \rho$  получим для джинсовой массы тора  $M_J = \pi r_+^2 2\pi R \rho$  уравнение:

$$M_J = \frac{\rho R \Gamma^2}{\frac{2GM_J}{\pi R} - c_s^2 j_1^2}. \quad (49)$$

Его решение дает нам для линейной (погонной) массы  $\chi = (M_J)/2\pi R$

$$8G\chi = (c_s j_1)^2 + \sqrt{(c_s j_1)^4 + 32\pi G \rho \Gamma^2}. \quad (50)$$

Приведенные выше уравнения для джинсового радиуса и массы строго следуют из гамильтоновых уравнений для частицы, движущейся в самосогласованном гравитационном поле на поверхности тороидального вихря. Они следуют также из дисперсионного соотношения для (однородных по образующей тора) радиальных колебаний плотности, определяющего условия равновесия (см. ниже).

Заметим, что постоянство циркуляции  $\Gamma$  в вихревом кольце, т.е. условие  $2\pi r v_\varphi = \text{const}$ , означает, что угловая скорость  $\Omega(r) \propto 1/r^2$ , и следовательно, в тороидальном вихре отсутствуют эпициклические колебания, квадрат частоты которых пропорционален  $\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \Omega)$  и играет существенную роль для самогравитирующих дисков. С этим, наряду с фундаментальным допущением о независимости плотности вихря от координат, в значительной мере, связана и продемонстрированная выше возможность аналитического рассмотрения поставленной задачи.

Нам представляются весьма перспективными также релятивистские обобщения рассмотренной проблемы, которые могут оказаться, так же как и приведенные результаты, полезными при анализе различных астрофизических приложений, в том числе, к ядрам (активных) галактик, проблеме сверхновых, молодым звездным объектам — всюду, где актуальна проблема гравитационного коллапса в сочетании с вращением.

## 7. Эволюция самогравитирующего тороидального вихря вырожденного газа

Ниже обсудим поздние стадии эволюции вихревого кольца, когда газ в нём можно считать вырожденным, а тепловые источники исчерпанными. Исходным выражением мы по-прежнему будем считать соотношение (48). Найдём его независимым способом. Получим вначале дисперсионное уравнение для звуковых волн в тонком самогравитирующем газовом кольце, заменив его цилиндром с периодическими граничными условиями на торцах. Исходными являются гидродинамические уравнения в самосогласованном гравитационном поле:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \Delta \phi = 4\pi G \rho. \quad (51)$$

Будем считать невозмущенную плотность  $\rho_0$  не зависящей от координат, то есть пренебрежём, что представляется вполне оправданным для тонкого тора, влиянием невозмущенного потенциала  $\phi_0$ . Тогда для чисто радиальных мод получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}_r) + \frac{\omega^2 + \omega_J^2}{c_s^2} \tilde{v}_r = 0. \quad (52)$$

Здесь  $\tilde{v}_r$  — возмущенная радиальная скорость,  $\omega$  — частота колебаний,  $\omega_J = \sqrt{4\pi G \rho_0}$  — джинсова частота,  $c_s$  — скорость звука. Заменой  $r \cdot \sqrt{\omega^2 + \omega_J^2}/c_s \rightarrow z$  уравнение (52) сводится к уравнению

Бесселя

$$z^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + z \frac{\partial v}{\partial z} + (z^2 - 1)v = 0$$

для  $v(z) = \tilde{v}_r(r(z))$ . Нулевым граничным условиям на поверхности цилиндра соответствует решение  $J_1(z)$  при выполнении условия

$$\frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_J^2}}{c_s} r_0 = j_1,$$

где  $j_1$  — первый нуль функции  $J_1(z)$ , а  $r_0$  — радиус цилиндра. Таким образом, дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega^2 = \frac{c_s^2}{r_0^2} j_1^2 - \omega_J^2. \quad (53)$$

(Мы опустили индекс моды у частоты: очевидно, может быть выбрана и другая мода колебаний. Но в силу неравенств для собственных значений задачи Штурма–Лиувилля при исследовании устойчивости существен вклад лишь основной безузельной моды.)

Дисперсионное уравнение (53) учитывает наличие конечной температуры, но без вихревого движения вещества в торе. Полученные ранее условия равновесия по малому радиусу в тонком вихре (уравнение (13)) напротив, учитывают только регулярное вихревое движение. Чтобы учесть оба эти фактора, заметим, что условие (13) можно переписать в виде

$$\frac{\Gamma^2}{2\pi^2 r^4} - \omega_J^2 = 0. \quad (54)$$

Таким образом, сравнивая (53) и (54), нетрудно записать условие равновесия  $\omega^2 = 0$  с учетом теплового давления в общем интересующем нас случае

$$\frac{\Gamma^2}{2\pi^2 r^4} + \frac{c_s^2}{r^2} j_1^2 - \omega_J^2 = 0. \quad (55)$$

Соответствующее «дисперсионное» уравнение вместо нуля содержит  $\omega^2$  в правой части. Поэтому неустойчивости ( $\omega^2 < 0$ ) отвечает отрицательность левой части (55).

Если выразить  $\omega_J^2$  через массу и радиусы вихря, то из (55) после ряда несложных преобразований можно получить искомое выражение для равновесного малого радиуса тора (48).

Для вырожденного газа скорость звука  $c_s$  есть функция плотности, которую мы в данном рассмотрении считаем не зависящим от координат параметром, отслеживающим, как это принято, процесс сжатия (ср. [6]). Домножая  $r_+^2$  на  $2\pi^2 R\rho$  получим уравнение для линейной джинсовой массы  $\chi$  тонкого вихря, решая которое приходим к (50). Всегда существует квазиравновесное решение (50). При этом плотность  $\rho < \rho_*(M, \Gamma) = (f_*/2)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ .

Для компактного вихря<sup>6</sup> (с точностью до коэффициентов порядка 1) мы приходим из (48), полагая  $r = \varepsilon R$  ( $\varepsilon < 1$ ) к уравнению для джинсовой массы, решение которого имеет вид:

$$\tilde{\mu} M^{2/3} = \frac{c_s^2}{\rho^{1/3}} \left( 1 + \sqrt{1 + \tilde{\xi} \frac{\rho}{c_s^4} \Gamma^2} \right), \quad (56)$$

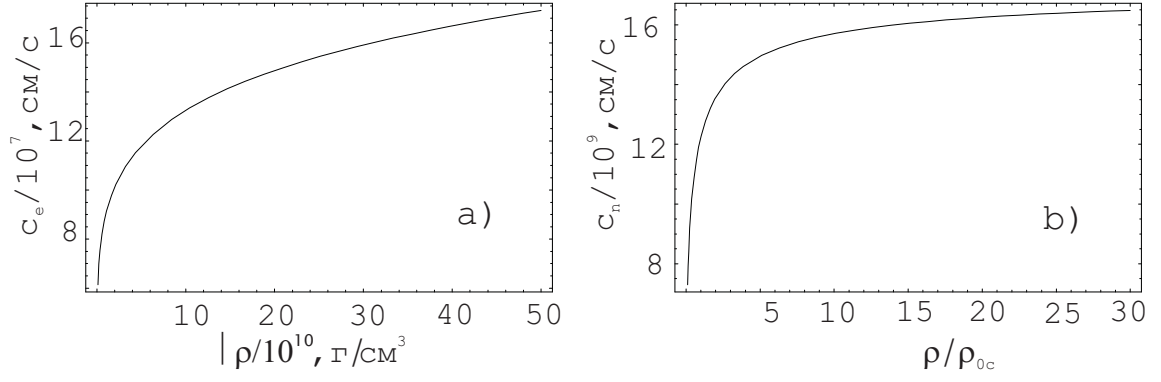
где  $\tilde{\mu} = \frac{4(2\pi^2 \varepsilon^2)^{1/3} G}{\pi \zeta} \sim G$ ;  $\tilde{\xi} = \frac{8G}{\pi \zeta^2} \sim G$  и  $\zeta \sim 1$  возникло из множителя  $j_1^2$  для тонкого тора.

Поведение (56) существенно регулируется зависимостью  $c_s(\rho)$  и разительно отличается для случая вырожденного электронного газа, когда массовая плотность определяется нерелятивистскими частицами (нуклонами – протонами и нейтронами) и случаем вырожденного нейтронного газа, когда ими же определяется и давление и плотность.

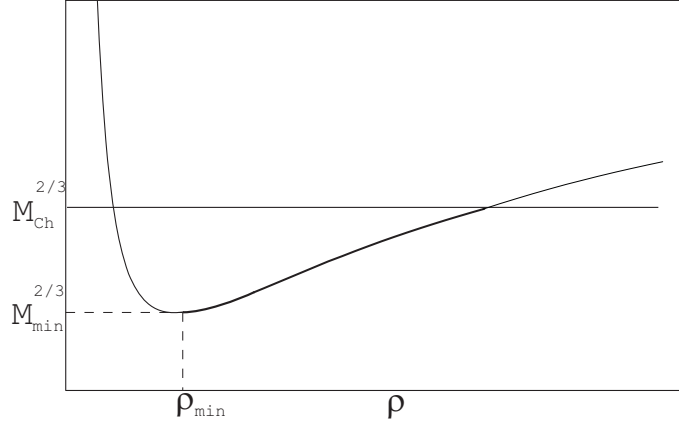
Для электронов, как следует из [1, 9] (рис. 5а)

$$c_e^2(\rho) = \eta_1 \frac{\rho^{2/3}}{\sqrt{1 + \eta_2^2 \rho^{2/3}}}, \quad \text{где} \quad \eta_1 = \frac{m_e c^2 l_c^2}{9\pi^2} \left( \frac{3\pi^2}{\mu_e m_H} \right)^{5/3}, \quad \eta_2 = l_c \left( \frac{3\pi^2}{\mu_e m_H} \right)^{1/3}, \quad (57)$$

<sup>6</sup>Для определённости мы рассмотрим тор в качестве фигуры равновесия компактного вихря, хотя истинная форма равновесия при данной топологии неизвестна.



**Рис. 5.** Зависимость скорости звука от плотности для электронного (а) и нейтронного (б) вырожденного газа



**Рис. 6.** Зависимость  $\tilde{\mu}M^{2/3}$  от плотности  $\rho$  для вырожденного нейтронного газа

$l_c$  — комптоновская длина. Скорость звука монотонно растёт с ростом плотности, претерпевая излом на  $\rho \approx 1/\eta_2^3$ . Эффективный показатель политропы изменяется от  $\gamma = 5/3$  для нерелятивистского до  $\gamma = 4/3$  для релятивистского газа. Поскольку остаётся выполненным условие  $\gamma \geq 4/3$ , срыва в коллапс не происходит.

Иная ситуация в случае нейтронного газа. Как следует из уравнения состояния [1] скорость звука равна (рис. 5b):

$$c_n^2(\rho) = \frac{c^2}{3} \frac{\rho^{2/3}}{(\rho_{0c}^{2/3} + \rho^{2/3})}, \quad (58)$$

где  $\rho_{0c} = m_H^4 c^3 / (2\pi^2 \hbar^3) = 5.25 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$ . В этом случае с ростом плотности и переходом к ультра-релятивистскому случаю  $c_n^2 \rightarrow c^2/3 = \text{const}$ . Постоянство скорости звука означает, что эффективный показатель политропы  $\gamma \rightarrow 1 < 4/3$ !

И действительно, решение уравнения (56) в релятивистском пределе имеет вид (см. рис. 6)

$$\rho^{1/3}(\Gamma, M) = \frac{\tilde{\mu}^2 M^{4/3}}{2\tilde{\xi}\Gamma^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8c^2\tilde{\xi}}{3\tilde{\mu}^3 M^2} \Gamma^2} \right) \quad (59)$$

и описывает две ветви, одна из которых становится неустойчивой (как и должно быть при  $\gamma < 4/3$ ), а другая сохраняет устойчивость из-за вклада циркуляции.

Джинсова масса проходит через минимум при  $\rho = \rho_{min}(\Gamma)$

$$\rho_{min} = \frac{8c^4}{9\tilde{\xi}\Gamma^2}, \quad M_{min} = \sqrt{\frac{\zeta}{6}} \cdot \frac{c}{\varepsilon G} \cdot \Gamma. \quad (60)$$

Условие  $v \leq c$ , приводящее к предельной массе Ландау–Чандрасекара, переходит в

$$M_{Ch}^{2/3}(\Gamma) = \frac{1}{2} M_{Ch}^{2/3}(0) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{72}{\pi\zeta^2} \left( \frac{m_H}{m_{pl}} \right)^2 \left( \frac{1}{cl_c} \right)^2 \Gamma^2} \right), \quad (61)$$

где

$$M_{Ch}^{2/3}(0) = \frac{\pi\zeta}{6(2\pi^2\varepsilon^2)^{1/3}} \frac{m_{pl}^2}{m_H^{4/3}}. \quad (62)$$

Таким образом, для тороидального вихря в случае вырожденного газа возникает конечный интервал устойчивых масс, определяемый циркуляцией скорости

$$M_{min}(\Gamma) \leq M \leq M_{Ch}(\Gamma). \quad (63)$$

Заметим, что существование подобного интервала является следствием ультрарелятивистского предела и не привязано именно к нейтронному газу.

Данная работа частично поддержана фондом Интас, грант 00-00292.

1. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971. — 484 с.
2. Конторович В.М. // Радиофизика и Радиоастрономия. — 2001. — **6**. — № 3. — С. 165–211.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
4. Ламб Г. Гидродинамика. — М.–Л., Огиз, Гостехиздат, 1947. — 928 с.
5. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединённые волны в плазме и атмосфере. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 200 с.
6. Происхождение и эволюция галактик и звезд / под ред. С.Б.Пикельнера. — М: Наука, 1976. — 408 с.
7. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. — М: Научный Мир, 2000. — 376 с.
8. Физика внегалактических источников радиоизлучения / под ред. Р.Д.Дагкесаманского. — М: Мир, 1987. — 365 с.
9. Шапиро С., Тьюкольски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. — М.: Мир, 1985. — Том 1 – 256 с., Том 2 – 656 с.
10. Antonucci R. // Ann.Rev.Astron.Astrophys. — 1993. — **31**. — P.473–521.
11. Ansorg M., Kleinwachter A., Meinel R. // ArXiv gr-qc/0211040;  
Spivey R.J. // ArXiv astro-ph/0004051;  
Pomplio F., Harun-ar-Rashid S.M., Roos M. // ArXiv astro-ph/0008475.
12. Bliokh K.Yu., Kontorovich V.M. On the collapse of self-gravitating toroidal vortex // In: Solitons, Collapses and Turbulence. Institute for Theoretical Physics. — Chernogolovka, 2002. — P. 18.
13. Lada C.J. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. — 1985. — **23**. — P. 267–317.
14. Ustyugova G.V., Lavelace R.V.E., Romanova M.M., Li H., Colgate S.A. // Astrophys. J. — 2000. — **541**. — P. 21–24.

Поступила в редакцию 14.10.2002