

УДК. 520.16

Естественный предел разрешающей силы оптических систем

В.Ю. Теребиж

Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга, Московский университет
Крымская астрофизическая обсерватория

Теоретический анализ и результаты моделирования методом Монте-Карло показывают, что существует естественный предел разрешающей силы оптических систем, обусловленный квантовой природой света. Этот предел значительно глубже дифракционного предела Рэлея, и тем не менее, он может быть достигнут в условиях обычного эксперимента.

ПРИРОДНА МЕЖА РОЗДІЛЬНОЇ СИЛИ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ, Теребиж В.Ю. – Теоретичний аналіз і результати моделювання методом Монте-Карло показують, що існує природна межа роздільної сили оптичних систем, обумовлена квантовою природою світла. Ця межа значно глибша від дифракційної межі Релея, проте він може бути досягнутий в умовах звичайного експерименту.

NATURAL LIMIT OF RESOLVING POWER OF THE OPTICAL SYSTEMS, by Terebizh V.Yu. – Both theoretical analysis and Monte Carlo simulations show that the natural limit of resolving power is existing, which is defined by quantum nature of light. The natural limit is much deeper than the known Rayleigh's diffraction limit, nevertheless, it can be attained in a frame of usual experiment.

1. ВВЕДЕНИЕ

Угловое разрешение глаза человека составляет около 100 секунд дуги¹, что позволяет видеть детали размером 0.1 мм с расстояния наилучшего зрения 250 мм. Этого вполне хватает в обыденной жизни, но совершенно недостаточно для изучения микробов, атомов и звезд. Так, Иоганн Кеплер полагал угловой диаметр наиболее ярких звезд превосходящим 300", в то время как действительная величина гораздо меньше – примерно 0.05"; эта ошибка имела далеко идущие последствия для картины Мира, созданной Кеплером в начале 17-го века. Практически в то же время, когда Кеплер завершал "Новую астрономию", Галилей направил на небо первый телескоп. Его разрешение составляло лишь 10", однако открытия Галилея радикальным образом изменили астрономические воззрения: были обнаружены диски планет, спутники Юпитера, лунные кратеры и пятна на Солнце; Млечный путь разрешен на звезды, которые "... избегают нашего взора из-за малой своей величины или колоссальной отдаленности от нас".

С тех пор идет постоянная борьба за повышение разрешающей силы оптических приборов. Что касается телескопов, то прогресс здесь связан с увеличением апертуры, совершенствованием технологии, улучшением условий наблюдения и применением адаптивной оптики, позволяющей быстро отслеживать изменения атмосферных условий. Успехи последних лет особенно велики. Разрешение наземных телескопов – величина порядка 0.2"; во внеатмосферных наблюдениях достигнут предел Рэлея, обусловленный дифракцией света на апертуре прибора (см. ниже). Для космического телескопа имени Хаббла диаметром 2.4 м этот предел в оптическом диапазоне равен 0.06". Как полагают, дальнейшее

¹ Секунда дуги (1") равна 1/3600 части углового градуса; это примерно угол, под которым видна монета диаметром 1 см с расстояния 2 км.

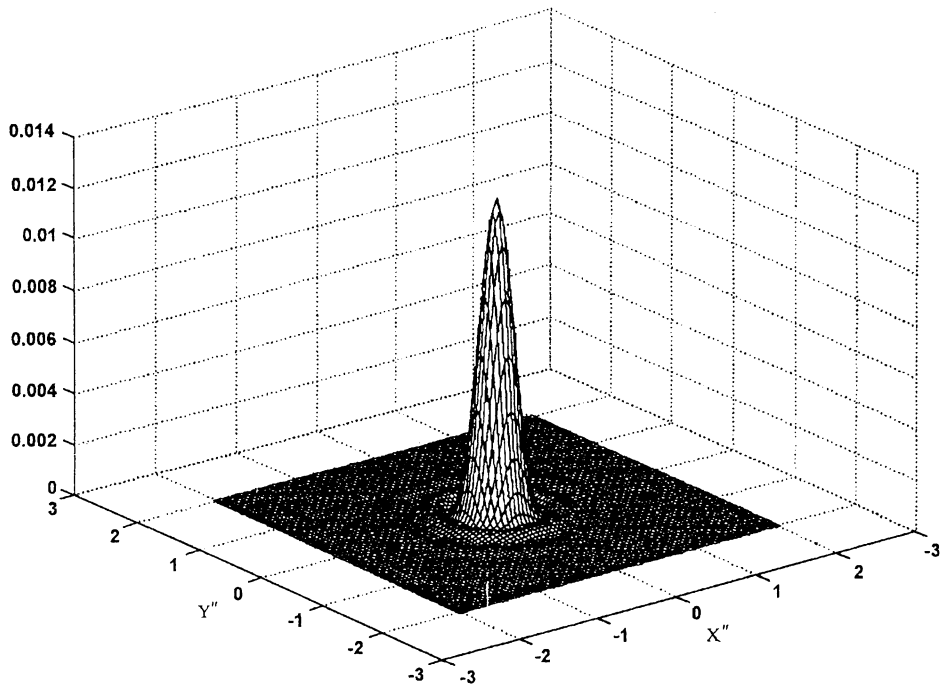


Рис.1. Картина Эйри – дифракционное изображение точечного источника телескопом с открытой апертурой диаметром 254 мм при относительном отверстии 1/10. Масштаб по осям X и Y – в секундах дуги, полная яркость источника нормирована к 1.

продвижение будет определяться только увеличением диаметра телескопов или, что по сути дела эквивалентно, увеличением расстояния между разнесенными апертурами при интерферометрических измерениях. Оказывается, эти шаги далеко не исчерпывают возможностей исследователя: при наличии определенных сведений об изучаемом объекте достижимо разрешение, на порядки величины превосходящее дифракционный предел.

По возможности более простому описанию соответствующих результатов последних лет и посвящен этот доклад. Обсуждение проводится на примере классической задачи о разделении двойных звезд и в контексте астрономических наблюдений в видимом участке спектра, но все принципиальные черты сохраняются при анализе более сложных объектов и для других условий эксперимента.

2. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИЛЫ

Вопрос о наивысшем достижимом разрешении возник уже после первых наблюдений с телескопом, однако на серьезную почву его поставила только работа Эйри 1835 г. В ней был выяснен характерный размер дифракционного изображения точечного источника света при наблюдении в узкой спектральной полосе вблизи длины волны λ с идеальным телескопом диаметром D . Для круговой апертуры дифракционная картина Эйри (рис.1) включает в себя центральный максимум, содержащий около 84 % света, и ряд перемежающихся темных и светлых колец. Угловой радиус первого темного кольца

$$\theta_A \cong 1.22 \frac{\lambda}{D} \text{ радиан} \cong \frac{140''}{D_{MM}}. \quad (1)$$

Во втором из этих равенств мы приняли $\lambda = 0.555 \text{ мкм}$ – значение вблизи максимума спектральной чувствительности глаза, диаметр D выражен в миллиметрах, а радиус θ_A – в секундах дуги. Если оптическая система отягощена аберрациями, то изображение точечного источника — функция рассеяния точки – отличается от картины Эйри. Именно по этой причине разрешение глаза в несколько раз хуже, чем можно было ожидать на основании формулы (1). Мы ограничимся обсуждением идеальной системы, к

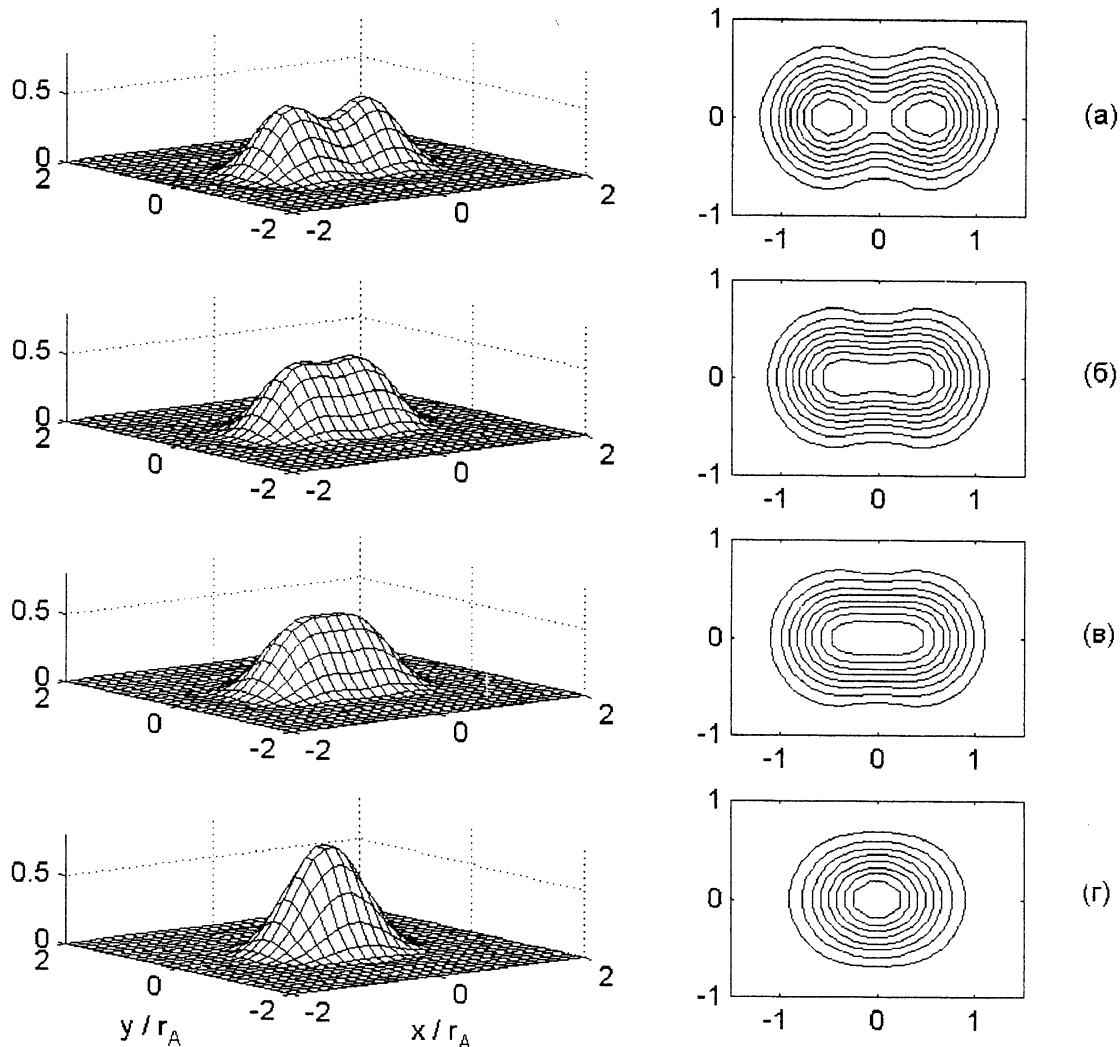


Рис.2. Трехмерные (слева) и двумерные распределения интенсивности света в изображении двойной звезды с компонентами одинаковой яркости, отвечающие пределам разрешения: Рэлея (а), Дэйвса, Данжона и Кудэ (б), Спэрроу (в) и визуальному пределу (г).

которой очень близки современные телескопы; при не слишком больших абберациях численные результаты мало изменятся, если диаметр диска Эйри $\Delta = 2\theta_A$ заменить угловым диаметром Δ_{80} , в пределах которого содержится 80 % энергии в изображении звезды.

В середине 19-го века английский астроном Уильям Дэйвс суммировал результаты своих многолетних наблюдений с небольшим рефрактором, целью которых была оценка углового расстояния между компонентами двойных звезд θ_{\min} , при котором двойственность ещё различима². Он пришел к выводу, что для открытой апертуры $\theta_{\min} \cong 0.85 \theta_A$ (рис.2). Через 30 лет лорд Рэлей, принимая во вниманиис "...неизбежную неопределенность относительно того, что понимается под разрешением", предложил

² Вследствие неспокойствия земной атмосферы визуальные наблюдения в данном случае предпочтительнее фотографических. Любопытно, что Дэйвс тщательно изучил предложение Джона Гершеля использовать при наблюдениях двойных звезд центральное экранирование объектива в пределах от 1/6 до 1/5 его диаметра (в современных терминах – один из видов *аподизации*). Признавая некоторое увеличение "separating power", Дэйвс все же отказался от аподизации ввиду заметного возрастания яркости дифракционных колец в картине Эйри.

просто считать θ_{min} равным радиусу (1) диска Эйри. Последующие определения, исходящие из аналитического вида дифракционной функции рассеяния точки, не меняют существа дела. Что же касается возможностей эксперимента, то в начале 20-го века Данжон и Кудэ, считая минимально обнаружимым 5%-ый контраст в области провала между изображениями компонент, вновь пришли к значению, найденному Дэйвсом. Наконец, наш современник Поль Куто полагает, что опытные наблюдатели двойных звезд, используя слабую вытянутость их изображений, способны достичь значений θ_{min} порядка $0.5 \theta_d$.

При обсуждении этих результатов нужно иметь в виду два обстоятельства: 1) мерой разрешения считается наименьшее обнаружимое угловое расстояние между точечными компонентами двойного источника примерно одинаковой яркости и 2) конечным "судьей" является человек. Фактически они показывают, что *визуальный предел разрешения, понимаемого в смысле Дэйвса-Рэля, составляет величину порядка ширины функции рассеяния точки.*

Очевидно, столь сложное понятие, как *разрешение*, нельзя охарактеризовать значением единственного параметра. Имея дело непосредственно с функцией рассеяния точки, трудно представить себе вид изображения протяженного объекта, поэтому в оптике перешли к *частотно-контрастной характеристике*, фактически считающейся сейчас "паспортом" оптической системы. Эта функция описывает амплитудное пропускание оптической системой гармоник разных пространственных (или угловых) частот, и в этом отношении вполне аналогична понятиям, широко используемым в технике. Вследствие дифракции света максимальная угловая частота, пропускаемая идеальной оптической системой диаметром D , равна D/λ . Соответствующий наименьший угол – *дифракционный предел* – равен обратной величине: $\theta_d = \lambda/D$ радиан (θ_d отличается от θ_A лишь множителем 1.22, обусловленным частным выбором формы апертуры). Величину θ_d и следует считать предельным разрешением при наблюдении протяженного объекта в отсутствие априорной информации относительно его структуры.

Между тем, подход Дэйвса-Рэля предполагает как раз наличие весьма обширной такой информации, ибо возможны только два заданных вида изучаемого объекта. В этих условиях можно продвинуться дальше дифракционного предела, а тот факт, что наблюдения дают значения порядка θ_d , обусловлен лишь несовершенством приёмника света и системы анализа изображений. Не умаляя замечательных свойств мозга и глаза человека, любопытно выяснить, насколько удастся продвинуть предел разрешающей силы, если использовать современный приемник излучения, близкий к идеальному счетчику фотонов, а размытое и зашумленное изображение объекта проанализировать с помощью наиболее эффективных систем распознавания образов.

Удобнее оперировать с безразмерными величинами, так что масштабируем минимально различимое расстояние между точечными компонентами шириной функции рассеяния точки:

$$\mathfrak{R} = \frac{\theta_{min}}{\Delta}. \quad (2)$$

Для краткости будем называть далее параметр \mathfrak{R} просто *разрешением*. Визуальным наблюдениям отвечают значения $\mathfrak{R} \cong 1$, а термину *сверхразрешение* – область $\mathfrak{R} \ll 1$. Принципиальная возможность сверхразрешения следует из того факта, что при *полном отсутствии шума* не составит труда отличить друг от друга пусть и сильно размытые, но совершенно гладкие изображения конкурирующих объектов – одиночной звезды и сколь угодно тесной двойной звезды с точечными компонентами. Таким образом, только стохастичность изображений препятствует достижению неограниченно высокого разрешения. Существует много сторонних видов шума: темновой ток и шум считывания приемника излучения, дробовой и фликкер-шум усилителя и пр. Все эти помехи контролируются исследователем и в принципе могут быть неограниченно уменьшены. Однако свет состоит их обнаруженных Планком и Эйнштейном отдельных порций – фотонов, которые при больших энергиях, в коротковолновом диапазоне спектра, ведут себя подобно каплям дождя (*фотонный шум*). При малых энергиях фотонов наглядное описание даётся волновой моделью; флуктуации интенсивности света понимаются в ней как результат интерференции электромагнитных волн со случайными амплитудами и фазами. Так или иначе, именно неизбежные флуктуации, сопутствующие регистрации света, ставят естественный предел разрешающей

силе оптических приборов.

Проблеме предельного разрешения посвящена огромная литература. Обсуждение ранних исследований можно найти в обзоре Раутиана [3]. Современный этап начался около полувека тому назад; отчасти он освещён в обзоре ден Деккера и ван ден Боса [1]. Последующее изложение основано на работах автора (см. ссылки в статьях Теребижа [5, 6, 7]). В них введено понятие естественного предела разрешающей силы и получено аналитическое решение задачи в рамках общей теории Неймана–Пирсона проверки статистических гипотез, дополненное затем численным моделированием с учетом ряда факторов, встречающихся в реальном эксперименте.

3. АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

Рассматриваемая нами проблема относится к обширному кругу т.наз. *обратных задач* математической физики, в которых требуется выяснить истинные свойства явлений по их наблюдаемым проявлениям. Подразделение задач на прямые и обратные обусловлено глубокой асимметрией между причинами явлений и их следствиями. Если Джеймс Джинс был прав, и Великий Архитектор Вселенной – чистый математик³, то нужно признать также, что Великий Архитектор ограничился решением прямой задачи, оставив нам гораздо более сложную – обратную задачу восстановления исходной картины.

Как свидетельствует практика, качество обратного решения в первую очередь зависит от априорной информации относительно изучаемого объекта, и лишь затем от других факторов: его формы, вида функции рассеяния точки, свойств шума и пр. Если мы имеем дело с анализом размытых изображений, то в случае, когда априорная информация скудна, уместно использовать термин *восстановление изображений*. В противоположном случае, который нас сейчас интересует, априорная информация настолько обширна, что проблема предельного разрешения в постановке Дэйвса–Рэлея сводится к принятию *оптимального решения* или *проверке статистической гипотезы* о типе изучаемого объекта на основании его наблюдаемого изображения. Еще один термин, используемый при данных обстоятельствах – *распознавание образов*. Очевидно, здесь достигается максимальная разрешающая сила.

Точное решение задачи при произвольной форме альтернативных объектов имеет довольно громоздкий вид, поэтому здесь мы ограничимся обсуждением трех простых видов альтернативных объектов. Единственная цель отступлений от основной версии – показать чувствительность результатов к типу априорной информации.

Итак, в случае “А” двойной звезде противопоставлялся протяженный объект с гауссовым распределением яркости. В основной версии задачи “В” противопоставлялись одиночная и двойная звезда той же суммарной яркости с точечными компонентами, отстоящими друг от друга на некоторое расстояние $\theta \geq 0$. Наконец, в случае “С” произвольному заданному объекту противопоставлялся тот же объект, сдвинутый как целое на некоторое расстояние (проблема предельно обнаружимого сдвига).

Средний уровень фона всюду считался известным, в качестве плотности распределения фотонного шума и случайного фона использовался известный закон Пуассона. Строго говоря, статистика фотособытий описывается распределением Кокса–Мандела (см. Теребиж [4]), но заметное отличие этого распределения от закона Пуассона проявляется только в очень специфических условиях. При моделировании вид функции рассеяния точки чаще всего предполагался полностью известным, но были рассмотрены и такие важные для практики ситуации, когда форма этой функции задана, и лишь несколько структурных параметров подлежат оцениванию, или когда функция рассеяния точки совершенно неизвестна. Был изучен также случай, когда суммарная яркость двойного источника и относительная яркость его компонент априори неизвестны.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При любом подходе к проблеме выбора между альтернативными объектами, порождающими наблюдаемую картину, возможны ошибки двух видов. В нашей задаче 1) одиночная звезда может быть

³ The Great Architect of the Universe now begins to appear as a pure mathematician", Джинс (1948), стр. 165.

неправильно квалифицирована как двойная, 2) двойная звезда может быть принята за одиночную. Нейман и Пирсон обратили внимание на тот факт, что на практике ошибки первого и второго рода несравненны. Так, если мы слишком часто будем принимать одиночные звезды за двойные, то создастся иллюзия чрезмерно высокой разрешающей силы прибора. Поэтому разумно наперед фиксировать вероятность ошибки первого рода α с тем, чтобы иметь представление о "жесткости" принятого критерия двойственности. Скажем, при $\alpha = 0.80$ критерий представляется неоправданно мягким: в среднем лишь одна из пяти одиночных звезд будет правильно классифицирована. Более уместным в рассматриваемой задаче кажется уровень $\alpha \cong 0.20$. Конечно, после того, как значение α фиксировано, желательно так выбрать решающее правило, чтобы вероятность ошибки второго рода β была минимальна.

Эти две черты – фиксация вероятности ошибки первого рода и последующая минимизация ошибки второго рода – и составляют суть подхода Неймана–Пирсона, ставшего в последнее время доминирующим в прикладных исследованиях. В математической статистике α принято называть *уровнем значимости* критерия, а $1-\beta$ – его *мощностью*, так что, более мощному решающему правилу отвечает меньшая ошибка второго рода. Нейман и Пирсон указали также процедуру, которая иногда позволяет найти *наиболее мощный* критерий проверки статистической гипотезы; именно такой критерий удаётся построить в рассматриваемой задаче. Тем самым мы получаем теоретически наилучшее правило классификации изображений.

Ввиду важности этого факта поясним еще раз, что разыскивается не какая-то, возможно, вполне действенная, процедура разделения двойных и одиночных звезд, но *в принципе наилучшая из множества таких процедур*. Только наличие наиболее мощного критерия и позволяет говорить о достижении предела разрешающей силы.

Обозначим через F среднее количество фотособытий, обусловленных объектом, а через B – среднее количество фоновых и темновых событий в пределах изображения звезды. Тогда отношение сигнала к шуму на указанном участке детектора будет равно

$$\Psi = \frac{F}{\sqrt{F+B}}. \quad (3)$$

Для относительно ярких объектов ($F \gg B$, $\Psi \cong \sqrt{F}$) главную роль играет фотонный шум. На рис.3

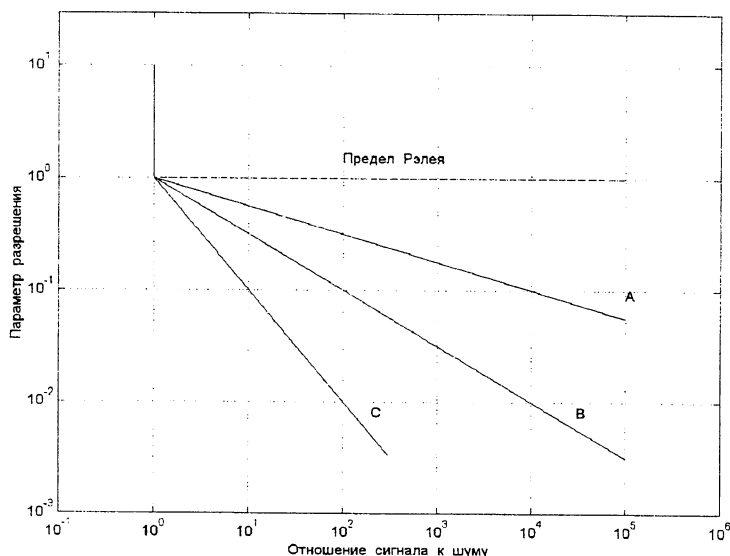


Рис.3. Схематическое представление зависимости параметра разрешения \mathcal{R} от величины отношения сигнала к шуму Ψ . Линия А отвечает разделению двойного источника при гауссовом альтернативном объекте, В – тому же, при одиночном точечном источнике в качестве альтернативы, С – сдвигу объекта.

показана зависимость параметра разрешения (2) от величины ψ , которую дает применение наилучшего решающего правила. Сходные результаты получаются и при функции рассеяния точки, отличной от дифракционной. Конечно, разрешение зависит и от других факторов, но мы сосредоточили внимание на доминирующей зависимости. Трём указанным выше версиям задачи отвечают приближенные соотношения

$$\mathcal{R} \cong \begin{cases} \psi^{-1/4} & \text{(A);} \\ \psi^{-1/2} & \text{(B);} \\ \psi^{-1} & \text{(C).} \end{cases} \quad (4)$$

Как видно, труднее всего выяснить природу объекта в совокупности двойных звезд и туманных пятен близкого эффективного размера (версия "А"). Весьма малые значения \mathcal{R} для версии "С" о сдвиге неувидительны, по сути дела на этом основаны точные астрометрические измерения координат звезд по их размытым изображениям на фотопластинках. Что же касается основной версии "В", то обращает на себя внимание принципиальная возможность достижения весьма глубокого разрешения. Поэтому прежде всего хотелось бы выяснить, представляет ли эта возможность чисто академический интерес или она реализуема на практике.

Пусть, например, наблюдения ведутся в видимом диапазоне спектра с телескопом любительского уровня диаметром 60 см, время экспозиции составляет 10 сек, ширина регистрируемого спектрального диапазона равна 0.04 мкм, в качестве детектора используется серийный прибор с зарядовой связью (ПЗС), компоненты двойной звезды видимых величин 9^m и 10^m принадлежат к спектральному классу А0. При этом среднее количество фотособытий, зарегистрированных за время экспозиции, $F \cong 5 \cdot 10^5$, так что $\psi \cong 700$ и $\mathcal{R} \cong 0.04$. Если ширина звездных изображений обусловлена преимущественно атмосферой и $\Delta_{80} = 1.5''$, то предельное разрешение будет $\theta_{\min} = \mathcal{R} \cdot \Delta_{80} \cong 0.06''$ – это лишь немного превосходит видимый диаметр красной звезды Бетельгейзе. Показательно, что θ_{\min} заметно меньше не только ширины функции рассеяния точки, но и радиуса диска Эйри $\theta_A \cong 0.23''$. Таким образом, сверхразрешение достижимо уже при обычных астрономических наблюдениях, не говоря об исследованиях с телескопами типа хаббловского (при тех же условиях наблюдения он позволил бы разрешить в 20 раз меньший угол). То же справедливо и для физических экспериментов иного типа.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Чтобы понять механизм образования радуги, Рене Декарт рассчитал прохождение в капле воды множества лучей света⁴. В наше время численное моделирование широко распространено. Именно так изучают сложные процессы типа ядерных взрывов, химических реакций и обтекания воздухом самолетов. Конечно, сами по себе результаты вычислений представляют вторичный интерес, ибо "цель расчетов – понимание, а не числа" (Р.Хемминг).

Моделирование заключается в многократной реализации прямой задачи с тем, чтобы изучить следствия, не поддающиеся аналитическому анализу. В задаче о предельном разрешении каждую реализацию прямой задачи, т.е. формирование очередного случайно размытого изображения одиночной или тесной двойной звезды, можно дополнить процедурой анализа этого изображения, основанной на описанном выше критерии максимальной мощности.

Имевшиеся в нашем распоряжении несколько лет тому назад компьютеры позволяли провести моделирование только в одномерной версии задачи и для достаточно идеализированных предположений. Тем не менее, полученные результаты оказались столь прозрачны, что мы бегло остановимся сначала на них.

⁴ Нетривиальность проблемы связана не с объяснением цветов: почему вообще образуется узкая яркая полоса на какой-либо фиксированной длине волны?

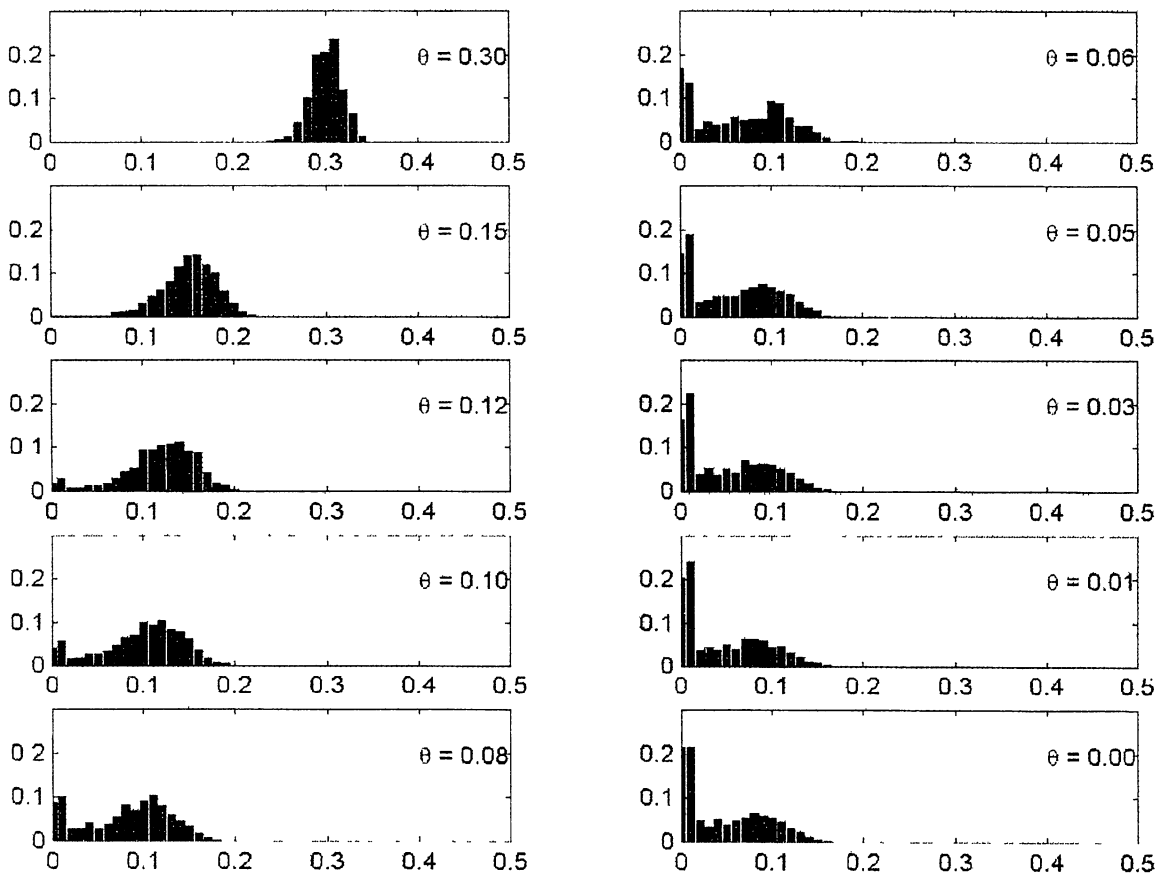


Рис.4. Выборочные плотности распределения максимально правдоподобной оценки расстояния между компонентами $\hat{\theta}$ для разных значений истинного расстояния θ . Обе величины выражены в долях ширины функции рассеяния точки

При формировании изображения исходный объект случайно размывался "фотон за фотоном" по достаточно мелким пикселям⁵ в соответствии с заданной функцией рассеяния точки, а затем к размытому изображению добавлялась реализация случайного фона. Таким путем была получена выборка, состоящая из сотен тысяч случайных реализаций изображения. Для каждой из реализаций не только оценивался порождающий объект, но и вычислялась т.н. *максимально правдоподобная оценка* $\hat{\theta}$ истинного расстояния θ между компонентами двойного источника (обе величины выражены в долях ширины функции рассеяния точки). При этом имелось в виду следующее. Если мы еще далеки от предела разрешения, то оценки $\hat{\theta}$ (по необходимости случайные, ибо они получены по случайным реализациям изображения) будут тесно группироваться около соответствующего истинного значения θ . Постепенно уменьшая последнее, мы приближаемся к пределу $\theta \cong \mathcal{R}$, и относительный разброс оценок должен возрастать. Вблизи предела разброс $\sigma(\hat{\theta})$ должен стать порядка самого значения θ , т.е. ошибка в оценивании расстояния между компонентами становится настолько велика, что мы вынуждены полагать этот двойной источник одиночным. Последнее решение заставляет принять принцип Оккама, на котором вообще основана наука: *если данные наблюдений можно объяснить более простой моделью, исследователь обязан выбрать именно эту модель*⁶.

⁵ Pixel (от picture element) – дискретный элемент изображения

⁶ В оригинале «плезие Оккама» формулируется так “Plurality is not to be assumed without necessity” (Не следует умножать сущностей сверх надобности).

Один из экспериментов проводился при следующих значениях параметров: суммарная яркость компонент $F = 10^4$ фотособытий, средний уровень фона 10 событий в пикселе, ширина функции рассеяния точки $\Delta = 100$ пикселям. В этих условиях доминирует фотонный шум, и отношение сигнала к шуму (3) порядка 100. Теоретическое соотношение (4В) предсказывает для параметра разрешения значение $\mathcal{R} \cong 0.10$. Обратимся к результатам моделирования. рис.4 показывает нормированные гистограммы *выборочных оценок* $\hat{\theta}$ при различных значениях истинного разделения компонент θ . Ожидаемый характер распределений полностью подтверждается. По мере сближения компонент гистограммы "расплываются", и после достижения критического значения $\theta \cong 0.08$ они уже практически не меняются, так что сколь-нибудь надежное восстановление типа объекта становится невозможным. Стало быть, это относительное расстояние между компонентами и является предельным в данных условиях. При точности, с которой мы сейчас анализируем задачу, оно удовлетворительно согласуется с предсказанным значением.

Проведенное позднее двумерное моделирование учитывало реальный размер пикселей детектора, вариации средней чувствительности от пиксела к пикселу и несколько видов шума. В частности, имитировались наблюдения двойной звезды в условиях, описанных в конце п.4. Теоретическое рассмотрение задачи показывает, что вид функции рассеяния точки, если только она не относится к "патологическим" распределениям, в меньшей степени сказывается на результатах, чем другие факторы. По этой причине задавался сравнительно простой вид функции рассеяния: двумерная гауссиана с неравными диаметрами изображения вдоль двух осей ($\Delta_{x,80} = 1.5''$, $\Delta_{y,80} = 1.0''$). Для сохранения информации при дискретизации картины ее радиусе располагалось не менее двух пикселей, как того требует известная *теорема отсчетов* Котельникова–Шеннона. Угловой размер пиксела составлял 248 мсек дуги, то есть превосходил наибольшее из трех выбранных значений расстояния между компонентами: 200, 100 и 50 мсек дуги. Тем не менее, это обстоятельство не служит препятствием для оценивания расстояний, существенно меньших размеров пиксела – индикаторами положения звезд служат "крылья" их изображений, простирающиеся на несколько пикселей. Нужно только, чтобы эти крылья были достаточно ярки, что и учитывается такой общей характеристикой условий наблюдения, как отношение сигнала к шуму.

Типичное изображение двойной звезды с разделением компонент 100 мсек дуги, как оно выглядит на основании отсчетов приемника излучения, показано на рис.5. Он наглядно демонстрирует трудности, с которыми сталкиваются попытки визуального обнаружения двойственности объекта.

При решении обратной задачи рассматривались три ситуации. В случае I все структурные параметры функции рассеяния точки считались известными, как и её аналитический вид. Случай II отвечал ситуации, когда аналитическое представление этой функции по-прежнему известно, но значения свободных параметров оцениваются по изображению сторонней, определенно одиночной звезды. Наконец, в случае III функция рассеяния полагалась совершенно неизвестной; её численное представление также находилось из "наблюдения" сторонней одиночной звезды.

Для каждой реализации изображения оценивались 6 параметров: полная яркость объекта, а также относительная яркость и 4 декартовы координаты компонент. Параметры подбирались таким образом, чтобы достичь наиболее точного описания всей наблюдаемой картины в пределах достаточно большого формата, включающего и звездное изображение. Другими словами, проводилась *оптимизация* в

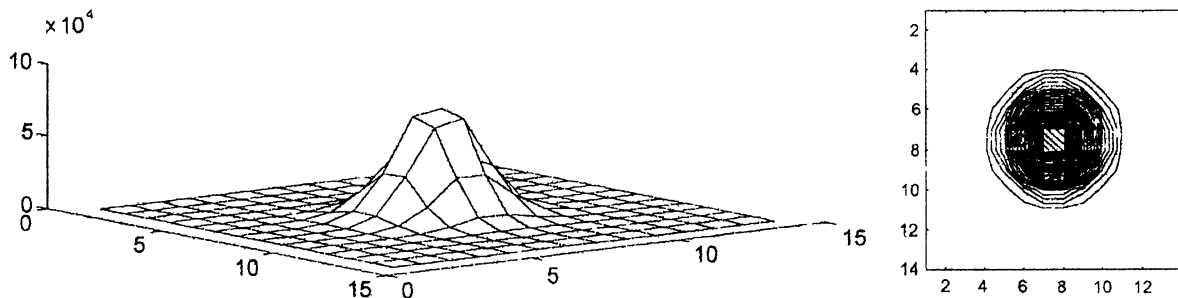


Рис.5. Участок приемника света размерами 14x14 пикселей с изображением двойной звезды при разделении компонент $\theta = 100$ мсек. дуги (вверху) и соответствующие изофоты изображения.

6-мерном пространстве параметров, дающая их оценки максимального правдоподобия.

В конце предыдущего пункта мы вычислили предельно обнаружимое расстояние между компонентами для указанных там условий наблюдения: $\theta_{\min} \cong 60$ мсек. дуги. Как показывает рис.6, при $\theta = 200$ мсек дуги разделение компонент выполняется уверенно во всех трех версиях задачи. В случае $\theta = 100$ мсек дуги оценки положения компонент также группируются в отдельные облака вокруг истинных значений, причем облака вытягиваются вдоль линии, соединяющей компоненты (направление общей вытянутости двойного изображения гораздо легче выявить, чем оценить расстояние между компонентами и их относительную яркость). Наконец, при $\theta = 50$ мсек дуги оценки координат либо совпадают, либо выходят за пределы рассматриваемой области детектора, и разделение компонент становится практически невозможным. Таким образом, можно вновь констатировать удовлетворительное согласие теоретических и модельных расчетов.

Мы имели возможность привести здесь результаты моделирования лишь для одного значения отношения сигнала к шуму, однако и для других условий наблюдения моделирование подтверждает предсказания теории.

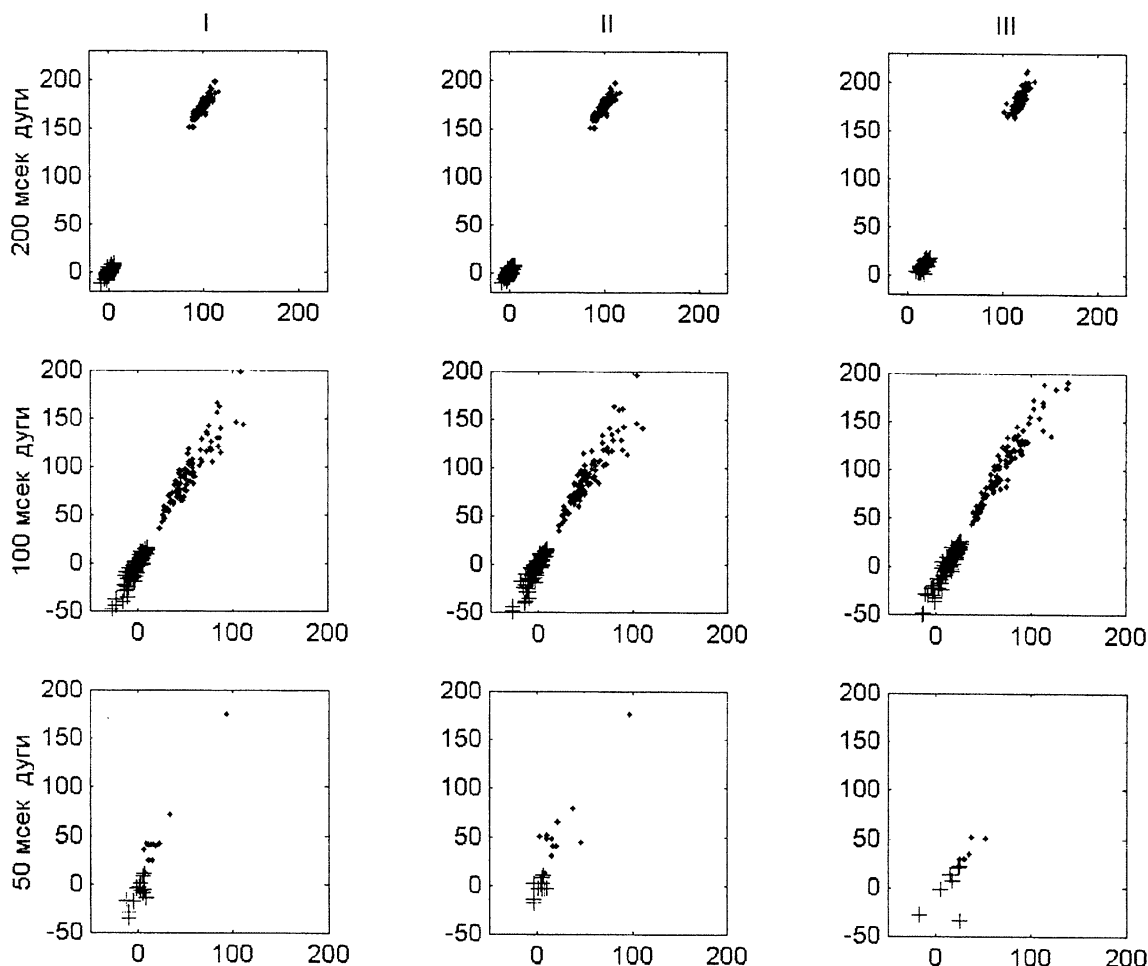


Рис.6. Оценки координат яркой (крестики) и слабой (точки) компонент двойной звезды при указанных в п. 4 условиях наблюдения. По осям отложены мсек. дуги, размеры квадратов соответствуют угловым размерам пикселей детектора. Горизонтальные ряды отвечают трем значениям истинного расстояния между компонентами: $\theta = 200, 100$ и 50 мсек. дуги, вертикальные ряды – различному объему сведений о функции рассеяния точки. В каждом из 9 вариантов анализировалось 100 независимых случайных изображений двойной звезды.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если для теоретика важен, прежде всего, сам факт существования принципиального ограничения наших возможностей в каком-либо отношении, то практик более интересуется возможностью непосредственного использования нового результата. По-видимому, описанная выше методика разделения тесных двойных источников будет скорее всего реализована в космических экспериментах и в радиоастрономии. В обоих случаях устраняется нестабильность изображений, обусловленная земной атмосферой. Впрочем, при надлежащей постановке эксперимента достижение сверхразрешения при наземных наблюдениях также не представляется бесперспективным делом; соответствующая программа наблюдений проводится В.В.Бирюковым и автором.

Что касается других применений, то нужно иметь в виду то обстоятельство, что задача распознавания образов была решена для объектов произвольного вида, а случай двойных звезд выделен лишь историческими причинами. Как это обычно бывает при рассмотрении результатов общего характера, их следствия весьма многообразны. В качестве примера можно указать на проблему выделения сигналов заданной формы из шума при радиофизических измерениях (и вообще при поиске ожидаемой реакции экспериментальной установки в потоке случайных событий). Другой пример – спектральный анализ лабораторных образцов и астрономических объектов. Поскольку одномерная обратная задача решается гораздо проще и быстрее двумерной, существенное повышение спектрального разрешения при наличии какой-либо предварительной информации представляется вполне реальным.

Автор искренне признателен В.В.Бирюкову (Московский университет), И.С.Саванову (Крымская астрофизическая обсерватория) и П.Джанссону (P.A.Jansson, DuPont Corporation, U.S.A.) за полезные предложения, высказанные при чтении статьи.

Исследования по данной теме поддержаны грантами РФФИ 96–02–17296 и 99–02–18040.

1. *den Dekker A.J., van den Bos A.*, Journ. Optical Soc. Amer. – 1997. – **A14**. – P.547–557.
2. *Jeans J.* The Mysterious Universe. – Mac Millan, New York, 1948.
3. *Раутиан С.Г.*, Успехи физических наук. – 1958. – **66**. – P.475–517.
4. *Теребиж В.Ю.* Анализ временных рядов в астрофизике. – М.: Наука, 1992.
5. *Теребиж В.Ю.*, Успехи физических наук. – 1995. – **165**. – P.143–176.
6. *Terebizh V.Yu.*, Int. Journ. of Imaging Systems and Technology. – **6**. – P.358–369.
7. *Теребиж В.Ю.*, Астрон. ж. – 1999. – **76**. – С.49–67.

Поступила в редакцию 25.05.2001