Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 2 • № 1 • 2001 С. 10 – 16

УДК 629.78:52–13+521.3

Об оценке точности созданного алгоритма определения орбит ИСЗ по данным сети станций наблюдения

Н.Г. Пальцев[1], **С.Я. Колесник**[2]

[1] НИИ Астрономическая обсерватория Одесского национального университета
[2] Одесская государственная Академия холода

Создан высокоточный и надежный алгоритм определения орбит ИСЗ, включающий в себя задачу минимизации функционала и позволяющий вычислять орбиты ИСЗ по данным одного или нескольких прохождений, полученным одной или несколькими станциями. Найдены соотношения, позволяющие сделать оптимальный выбор величины шагов по разным группам параметров минимизации. Сделаны оценки частных производных функционала по параметрам минимизации, которые показывают, что, при использовании данного алгоритма, точность определения большой полуоси орбиты по данным нескольких прохождений примерно на три порядка выше, чем по данным одного прохождения и примерно на четыре порядка выше, чем при использовании адаптированных для этого некоторых известных алгоритмов классической небесной механики.

ПРО ОЦІНКУ ТОЧНОСТІ СТВОРЕНОГО АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ ОРБІТ ШСЗ ЗА ДАНИМИ МЕРЕЖІ СТАНЦІЙ СПОСТЕРЕЖЕННЯ, Пальцев М.Г., Колесник С.Я. – Створено високоточний і надійний алгоритм визначення орбіт ШСЗ, який включає в себе задачу мінімізації функціонала і дозволяє обчислювати орбіти ШСЗ за даними одного або декількох проходжень отриманих однією чи кількома станціями. Знайдено співвідношення, які дають можливість робити оптимальний вибір величини кроків по різним групам параметрів мінімізації. Зроблено оцінки частинних похідних функціонала по параметрам мінімізації, які показують, що, при використанні даного алгоритму, точність визначення великої півосі орбіти за даними декількох проходжень приблизно на три порядки вища, ніж за даними одного проходження і приблизно на чотири порядки вища, ніж при використанні адаптованих для цього деяких відомих алгоритмів класичної небесної механіки.

ON AN ESTIMATION OF ACCURACY OF THE CREATED ALGORITHM OF DEFINITION OF ORBITS AES ON THE DATA OF A NETWORK OF STATIONS OF OBSERVATION, by Paltsev N.G., Kolesnik S.Ja. – The reliable high-precision algorithm is developed to determine Artificial Earth Satellites orbits. This algorithm is based on minimizing some functional and permitting the calculation of AES's orbits from the data of one or several satellites passages registered by one or several observational stations. The relations are found making possible to optimize the value of steps in different groups of minimization parameters. The functional particular derivatives by minimizing parameters are estimated. These estimations show that when using that algorithm the accuracy of the semimajor axes orbit from several passages data is higher at factor about 10^3 *than the accuracy obtained from one passage data and higher at factor about* 10^4 *than that obtained by using specially adapted standard celestial mechanics method.*

ВВЕДЕНИЕ

На основе многолетнего анализа получаемой из наблюдений координатной информации и результатов вычислений орбит ИСЗ было сделано сравнение устойчивости некоторых широко применяемых алгоритмов определения орбит ИСЗ, использующих разное количество позиционных точек той или иной точности. Исследования показали, что с увеличением числа используемых точек растет устойчивость алгоритмов и повышается и надежность результатов вычислений. Из этого был сделан вывод, что при наличии большого числа позиционных измерений, предпочтение нужно отдавать алгоритмам, использующим большее количество положений спутника, ввиду их большей устойчивости и надежности. А так как современные методы позиционных наблюдений ИСЗ позволяют получать большие объемы координатной информации за одно прохождение (десятки и сотни точек), то использование многоточечных алгоритмов становится более эффективным.

Опыт вычислительной работы также показал, что используемое программное обеспечение, разработанное на основе классических алгоритмов, не удовлетворяет постоянно растущим требованиям к повышению точности и надежности вычислений орбит ИСЗ. Дело в том, что координаты спутника, получаемые из наблюдений, зачастую могут иметь сравнительно невысокую точность, составляющую, например, около 2-х минут дуги. Такая точность совершенно недостаточна для надежного определения орбиты ИСЗ, например, с помощью методов Гаусса [1, 5, 12], Гаусса–Баженова [13], Батракова [2, 8] или Киселева [6], использующих небольшое количество позиционных точек, поскольку из-за высокой чувствительности к неточности исходных данных эти методы очень неустойчивы.

Так как при определении и уточнении элементов орбиты ИСЗ одновременно решается задача окончательной идентификации получаемой информации [11] и, следовательно, наблюдаемых объектов, то получение точных и надежных элементов орбит ИСЗ становится одной из важнейших задач системы контроля спутника на орбите, без должного решения которой проведение любого контроля может оказаться невозможным.

Поскольку получение точных и надежных элементов орбит ИСЗ с помощью перечисленных выше методов оказалось невозможным из-за указанных недостатков, то перед авторами, по заказу КБ "Южное", г.Днепропетровск, была поставлена задача создания нового надежного и устойчивого метода определения орбит ИСЗ, лишенного этих недостатков. Так был создан новый алгоритм определения орбит ИСЗ по данным сети станций наблюдения.

1. ХАРАКТЕРИСТИКА СОЗДАННОГО АЛГОРИТМА

Данный алгоритм определения орбит ИСЗ создавался с учетом возможности использования большого количества положений спутника, фиксируемых одной или несколькими станциями наблюдения. В нем используется задача минимизации функционала, представляющего собой взвешенную сумму квадратов отклонений вычисленных положений спутника от наблюденных в каждой точке его траектории. Минимизация функционала дает возможность получить оптимальные значения параметров, используемых для непосредственного определения орбиты, что приводит к существенному снижению влияния ошибок исходных данных на результаты вычислений, повышая тем самым устойчивость и надежность алгоритма. Благодаря этому становится возможным использование исходных данных меньшей точности.

Для минимизации функционала необходимо применение достаточно сильных методов, обладающих высокой сходимостью и хорошо обобщаемых на произвольные функции, в том числе и на функции задаваемые неявно. Это связано с тем, что при использовании данных только одного прохождения, полученных одной станцией, задача может оказаться очень близкой к вырождению, поскольку изменение расстояния до спутника может быть скомпенсировано изменением скорости его движения. По этой причине для минимизации функционала был выбран метод сопряженных направлений [3, 4].

Вырождение может быть снято при использовании данных других, близких по времени прохождений, а также при использовании наблюдений, полученных разными станциями, так как период обращения спутника P при этом определяется с достаточной точностью. Следовательно, для надежного определения орбиты ИСЗ необходимо (при их наличии) использовать данные других его прохождений, а также данные, полученные разными станциями.

Созданный алгоритм определения орбит ИСЗ [14], включает в себя следующие задачи:

а) определение начальной орбиты (круговой орбиты, вычисляемой по двум положениям, или эллиптической орбиты, вычисляемой по трем положениям или по данным лазерных измерений, если они имеются) [1, 5, 9];

б) вычисление функционала (взвешенной суммы квадратов отклонений вычисленных положений спутника от наблюденных в каждой имеющейся точке). Для этого, например, может быть использован

алгоритм вычисления эфемерид ИСЗ [13];
в) минимизация функционала по координатам и скорости [3, 4, 7];
г) определение орбиты ИСЗ по положению и скорости [1, 5].

Созданный алгоритм, реализованный в программе "Орбита–М" [14], многократно использовался при вычислении орбит ИСЗ, проводимых в рамках работ по теме "Баллистика-1" в течение 1996–1997 гг., а также в рамках работ, проводимых на подготовительном этапе исследований по программе "Global Star" (проводились наблюдения КА "Океан-7", "Січ-1", а также аналоги КА, предполагаемых к запуску по программе "Global Star") и получил хорошую оценку со стороны наблюдателей и заказчика.

2. СООТНОШЕНИЕ ШАГОВ ПО РАЗНЫМ ГРУППАМ ПАРАМЕТРОВ МИНИМИЗАЦИИ

Поиск минимума функционала представляет собой итерационный процесс [4], где очень важным является правильный выбор шагов по разным параметрам минимизации, которыми, в данном случае, являются координаты и компоненты вектора скорости спутника в некоторой начальной точке в момент времени t_0.

Рассмотрим сначала, какими должны быть шаги минимизации по координатам и по скорости, исходя из простейшего варианта – круговой орбиты и интеграла энергии

$$V^2 = \frac{GE}{r}, \tag{1}$$

где $GE = 398600.4418 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – геоцентрическая постоянная. Из (1) получим

$$dV = -\frac{GE}{2Vr^2}dr. \tag{2}$$

На орбите радиусом $r \approx 7000$ км скорость движения спутника равна $V \approx 7.546$ км/сек и, следовательно, $dV \approx -0.00054\,dr$. Т.е. изменению радиуса орбиты на 1 км соответствует изменение скорости на -0.54 м/с. Следовательно, необходим измерять шаги по координатам в *км*, а по скорости – в *м/с*, что при указанных изменениях переменных будет оказывать примерно одинаковое по величине действие на орбиту.

Рассмотрим теперь влияние изменения периода обращения спутника P. Из формулы, определяющей период обращения на круговой орбите

$$P = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi}{\mu}r^{3/2}, \ (\mu = \sqrt{GE}), \tag{3}$$

найдем радиус круговой орбиты r и его изменение dr

$$r = \left(\frac{\mu P}{2\pi}\right)^{2/3}, \ dr = \frac{2}{3}\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{2/3}\frac{dP}{P^{1/3}}. \tag{4}$$

Для $dP = 30^s$, при $P = 97.14^m = 5828.517^s$, изменение радиуса составит $\delta x_0 = \dfrac{\sqrt{\delta F}}{3.16}$ км. Следовательно, для рассматриваемой орбиты, начальный шаг по координатам может быть выбран равным $24 \div 25$ км, а по скорости – $12 \div 13$ м/с, при этом полученные выше соотношения сохраняются.

Рассмотрим, наконец, влияние изменения полуоси a, приводящего к изменению тангенциальной составляющей скорости. Так как

$$V^2 = GE\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right) \text{ и } \delta V = \frac{GE}{2Va^2}\delta a, \tag{5}$$

то при той же круговой орбите, величина $\delta V = 0.00054\,\delta a$ км/с.

Сравним теперь влияние шагов по разным параметрам минимизации на величину функционала $F = \sum_i p_i d_i^2 \Big/ \sum_i p_i$ вблизи его минимума.

$$\delta F= \int_{-t/2}^{t/2} \delta V^2 \cdot \tau^2 d\tau = \delta V^2 \frac{t^3}{12}, \tag{6}$$

$$\delta F= \int_{-t/2}^{t/2} \delta x_0^2 \, d\tau = \delta x_0^2 \, t . \tag{7}$$

Подставляя значение δV из (5) в (6), получим

$$\delta V= \frac{\sqrt{\delta F}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{M_j} (t_{i,j}-t_0)^2}} .$$

Приравнивая полученные выражения, найдем соотношения между δV, δx_0 и δa.

$$\delta x_0^2 t=\delta V^2 \frac{t^3}{12}, \text{ откуда } \delta V = \sqrt{\frac{12}{t^2}} \delta x_0 \approx \frac{3.5}{t} \delta x_0 .$$

Принимая, например, $t=6^m=360^s$, получим $\delta V \approx 0.01 \delta x_0$, где δx_0 – в *км*, а δV – в *км/с*. Тогда при $\delta x_0 = 1$ км $\delta V \approx 10$ м/с и, поскольку $\delta x_0^2 t=2.42 \cdot 10^{-8} t^3 \delta a^2$, то $\delta a = \sqrt{\frac{1}{2.42 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{\delta x_0}{t}} \approx \frac{6430}{t} \delta x_0$.

Отсюда следует, что изменению координаты δx_0 на 1 км соответствует изменение большой полуоси δa примерно на 18 км. Следовательно, вводя соответствующие коэффициенты с учетом найденных соотношений, можно добиться того, чтобы поверхности уровня функционала F были близки к сфере. Соразмеренные таким образом величины шагов по разным параметрам минимизации будут вызывать примерно равные изменения функционала, приближая его к квадратичной функции, что существенно упрощает процесс минимизации и ускоряет его сходимость.

3. ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНАЛА В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ПРОХОЖДЕНИЙ

Пусть наблюдались два прохождения спутника, под номерами 1 и 2, разделенные N витками. Оценим изменение функционала F при изменении полуоси a на величину δa от истинного значения.

Из формулы (3), при $r = a$, имеем

$$\delta P = \frac{3\pi}{\mu} \sqrt{a} \cdot \delta a . \tag{8}$$

На круговой орбите с $a = 7000$ *км* $\delta P = 1.25 \delta a$ и за N витков ошибка во времени δt составит $N \, \delta P$ сек, что при $V \approx 7.546$ км/с приводит к изменению положения КА равному $\delta r = 1.25 \cdot 7.546 \cdot N \cdot \delta a$, или $\delta r = 9.42 N \, \delta a$ (δr, δa в *км*). Если число точек во втором прохождении равно M, то функционал изменится на величину $\delta F = M \, \delta r^2$, или $\delta F = 9.42^2 \, N^2 \, \delta a^2 M$.

Если имеются данные k прохождений, (k-е прохождение содержит M_k точек и отделено от 1-го прохождения N_k витками), то

$$\delta F = \delta F_1 + 9.42^2 \, \delta a^2 \sum_{j=2}^{k} M_j N_j^2 = \left((0.00054)^2 \sum_{j=1}^{M_1} (t_j - t_0)^2 + 9.42^2 \sum_{j=2}^{k} M_j N_j^2 \right) \delta a^2 . \tag{9}$$

Здесь δF_1 – изменение функционала за одно первое прохождение, выражаемое формулой (16).

При изменении координат x_0, y_0 или z_0 на δx_0, δy_0, δz_0, (например, x_0 изменяется на δx_0), координаты всех точек орбиты также меняются на δx_0, δy_0, δz_0. Тогда

$$\delta F = \delta x_0^2 \sum_{j=1}^{k} M_j . \tag{10}$$

Если, наконец, одна из компонент скорости, V_r или $V_\perp$ изменяется на величину δV, то за время $t - t_0$ положение спутника изменится на величину $\delta r = (t - t_0)\delta V$. Суммируя затем δr^2 по всем прохождениям, получим

$$\delta F = \delta V^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{M_i} (t_{i,j} - t_0)^2 . \tag{11}$$

Здесь t_0 – исходный момент, определяемый для начального прохождения.

Требуя в (9)–(11) приблизительного равенства значений δF, вызванных изменениями выбранных параметров, получим

$$\delta a = \frac{\sqrt{\delta F}}{\sqrt{C+D}} ;$$

$$\delta x_0 \approx \delta y_0 \approx \delta z_0 = \frac{\sqrt{\delta F}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} M_j}} ; \tag{12}$$

$$\delta V = \frac{\sqrt{\delta F}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{M_j} (t_{i,j} - t_0)^2}} .$$

Здесь j – номер прохождения, M_j – используемое количество точек данного прохождения, N_j – число витков,

$$C = (0.00054)^2 \sum_{j=1}^{M_1} (t_j - t_0)^2 , \text{ а } D = 9.42^2 \sum_{j=2}^{k} M_j N_j^2 .$$

Если, например, имеются наблюдения двух прохождений спутника под номерами 1 и 2, разделенные 15-ю витками, и при этом каждое из них содержит по 5 точек с интервалами 1.0 мин, то формулы (9), (11) дадут

$$\delta a = \frac{\sqrt{\delta F}}{316} , \quad \delta x_0 = \frac{\sqrt{\delta F}}{3.16} , \quad \delta V = \frac{\sqrt{\delta F}}{465} .$$

Если, например, при этом $\sqrt{\delta F} = 0.2$, то $\delta a \approx 0.00063$ км, $\delta x_0 \approx 0.063$ км, а $\delta V \approx 0.00043$ км/с.

При минимизации удобно перейти к новым переменным

$$a^* = a\sqrt{C+D} , \quad x_0^* = x_0 \sqrt{\sum_{j=1}^{k} M_j} , \quad V^* = V \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{M_i} (t_{i,j} - t_0)^2} . \tag{13}$$

При этом одинаковым отклонениям этих параметров от истинных значений будут соответствовать примерно равные изменения функционала F.

4. ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНАЛА В СЛУЧАЕ ОДНОГО ПРОХОЖДЕНИЯ

В случае определения орбиты спутника по данным наблюдений одного прохождения формулы (10) и (11) примут вид:

$$\delta F_1 = M_1\, \delta x_0^2\,, \tag{14}$$

$$\delta F_1 = \delta V^2 \sum_{j=1}^{M_1} (t_j - t_0)^2\,. \tag{15}$$

Формула (9) изменится более существенно, так как в этом случае при вычислении функционала используются изменения расстояний δr, возникающие только лишь *за одно прохождение.* При той же круговой орбите ($a = 7000$ км, $V = 7.546$ км/с), величина $\delta V = 0.00054 \cdot \delta a$ км/с и соответствующая моменту t величина δr определится как

$$\delta r = (t - t_0)\delta V = 0.00054(t - t_0)\delta a\,.$$

Тогда изменение функционала будет равно

$$\delta F_1 = (0.00054)^2 \sum_{j=1}^{M_1} (t_j - t_0)^2\, \delta a^2\,, \tag{16}$$

откуда

$$\delta a = \frac{\sqrt{\delta F_1}}{0.00054 \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{M_1} (t_j - t_0)^2}}\,. \tag{17}$$

5. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СОЗДАННОГО АЛГОРИТМА

Анализ вторых частных производных функционала по параметрам минимизации вблизи минимума позволяет сделать оценку точности созданного алгоритма. Так формулы (14) – (17) дают, что для одного прохождения, с приводимыми выше параметрами, $\delta a \approx 0.798$ км, $\delta x_0 \approx 0.089$ км и $\delta V \approx 0.00061$ км/с. Таким образом, при учете других прохождений точность определения большой полуоси δa возрастает более чем на три порядка (более чем в 1000 раз). Такая точность определения большой полуоси, а следовательно и периода обращения, неоднократно подтверждалась вычислениями орбит ИСЗ с помощью программы "Орбита–М" [14], составленной авторами по разработанному ими алгоритму, и наблюдениями этих ИСЗ, проводимыми в течение наблюдательных сезонов 1993–1997 гг.

Представим далее (15) с учетом (16) в виде

$$\delta F_1 \approx (0.00054)^2 M_1 (t_m - t_0)^2\, \delta a^2\,, \tag{18}$$

где $t_m = \dfrac{t_1 + t_{M_1}}{2}$. Справедливость (18) очевидна для нечетного числа равноотстоящих по времени точек.

Если в каждом из k прохождений имеется равное число точек одинаковой точности, то вблизи минимума функционала может иметь место примерное равенство

$$\delta F_k \approx k\, \delta F_1\,. \tag{19}$$

В связи с этим формулу (11) можно представить в виде

$$\delta F_k \approx k\, \delta F_1 \approx (0.00054)^2\, k\, M_1 (t_m - t_0)^2\, \delta a^2\,. \tag{20}$$

Выражения (14), (18) и (20) наглядно показывают, что точность определения $\delta a, \delta x$ и δV можно повысить путем использования оптимального количества точек в каждом прохождении, а главное, –

правильным выбором начального момента времени t_0.

Обычно в одном прохождении $t_i - t_0$ невелико, если за t_0 принимать одну из зарегистрированных временных точек, как это принято в классических алгоритмах. Из (17) видно, что при $t_i = t_0$ одно из слагаемых будет равно нулю, что существенно снижает точность алгоритма. Однако, если за t_0 принять, например, вычисленный в первом приближении момент прохождения восходящего узла, отстоящего, для наблюдателя находящегося в средних широтах, даже в случае полярных орбит, как минимум, на 12 минут от первой зарегистрированной точки, то, при тех же данных, точность определения большой полуоси по одному прохождению возрастет более чем в 5 раз и, согласно (17), составит $\delta a \approx 0.138$ км. Увеличение числа точек в два раза позволяет найти полуось с точностью $\delta a \approx 0.082$ км. Теоретически, согласно формул (14), (18) и (20), увеличение числа точек может повысить точность определения параметров δa, δV, δx_0 в $\sqrt{\frac{M_1}{M}}$ раз, однако на практике этот коэффициент оказывается несколько ниже. К тому же с увеличением числа точек резко возрастает время вычислений.

Таким образом новые оценки алгоритма, проведенные с учетом сделанных замечаний, позволяют делать вывод, что созданный алгоритм определения орбит ИСЗ по данным сети станций позволит вычислять большую полуось орбиты с точностью более чем на четыре порядка (более чем в 10000 раз) большей, чем это позволяют делать упомянутые выше адаптированные для ИСЗ алгоритмы классической небесной механики [10].

1. Астрономический Календарь. Постоянная часть / под ред. В.К.Абалакина. – М.: Наука, 1981. – 704 с.
2. *Батраков Ю.В.* Определение первоначальных орбит искусственных спутников из наблюдений, моменты которых известны приближенно // Бюллетень ИТА, том VII, № 7 (90). – М.–Л.: Изд. АН СССР, 1960. – С.570–579.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
5. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г.Н.Дубошина, – М.: Наука, 1971. – 584 с.
6. *Киселев А.А., Быков О.П.* Определение эллиптической орбиты спутника по параметрам его видимого движения. – АН, 1976. – **53**, вып. 4. – С.879–888.
7. *Колесник С.Я., Пальцев Н.Г.* О минимизации функционала в задаче определения орбит ИСЗ // Збірник тез всеукраїнської молодіжної науково-практичної конференції «Людина і космос» присвяченої дню космонавтики. Дніпропетровськ, 1999. – С.56.
8. *Куликов Д.К., Батраков Ю.В.* Метод улучшения орбит искусственных спутников Земли по наблюдениям с приближенными моментами // Бюллетень ИТА, том VII, № 7 (90). – М.-Л.: Изд. АН СССР, 1960. – С.554–569.
9. *Пальцев Н.Г.* Определение полуоси, эксцентриситета и истинной аномалии по трем и более положениям// Наблюдения искусственных небесных тел. № 86, ч. 2, Москва, 1990. – С.52–54.
10. *Пальцев Н.Г.* Об оценках шагов минимизации функционала в задаче определения орбит искусственных спутников Земли (ИСЗ). Сб. тезисов докладов международной мемориальной научной конференции «Астрономия 2000 года» посвященной 150-летию со дня рождения А.К. Кононовича и 135-летию Одесского государственного университета им. И.И. Мечникова. – Одесса, Астропринт, 2000. – С.15.
11. Проблема загрязнения космоса (космический мусор). Сборник научных трудов. – М.: Космосинформ, 1993.
12. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
13. *Чеботарев Г.А., Макарова Е.Н., Сочилина А.С.* Определение орбит и вычисление эфемерид искусственных спутников Земли // Наблюдения искусственных спутников Земли. № 2, Варшава, 1963. – С.64–79.
14. *Sheptoon A.D., Kolesnik S.Ja., Paltsev N.G.* Program of AES orbit determination from measurement data of astronomical station ("ORBITA–M") // Odessa astronomical publications. – 1997. – **10**. –P.147–148.

Поступила в редакцию 26.06.2001