Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 1 • № 2 • 2000 С. 5 – 11

УДК 521; 528

К проблеме замещающих самогравитирующих дисков в теории потенциала

В.А. Антонов[1], О.А. Железняк[2], Б.П. Кондратьев[3]

[1] Главная астрономическая обсерватория РАН, С.- Петербург, Россия
[2] Уманский педагогический университет, Украина
[3] Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

Рассматриваются методы нахождения распределения плотности круговых самогравитирующих дисков, гравитационный потенциал которых совпадает с внешним потенциалом осесимметричных космических тел. Такие эквигравитирующие диски существуют не для всякого осесимметричного тела. В ряде случаев плотность диска удается найти только формально с помощью комплексного интегрирования.

ДО ПРОБЛЕМИ ЗАМІЩУЮЧИХ САМОГРАВІТУЮЧИХ ДИСКІВ В ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ, Антонов В.А., Железняк О.О., Кондратьєв Б.П. – Розглядаються методи знаходження розподілу густини кругових самогравітуючих дисків, гравітаційний потенціал яких співпадає з зовнішнім потенціалом вісесиметричних космічних тіл. Такі еквігравітуючі диски існують не для всякого вісесиметричного тіла. У ряді випадків густину диска вдається знайти тільки формально за допомогою комплексного інтегрування.

ON THE PROBLEM OF SUBSTITUTING SELF-GRAVITATING DISKS IN THE POTENTIAL THEORY, by Antonov V.A, Zheleznyak O.A., Kondratyev B.P. – Methods to construct the density distribution of circular self-gravitating disks, whose gravitational potential coincides with external potential of axial-symmetric celestial bodies, are considered. Such equigravitating disks exists not for any axial-symmetric body. In a number of cases the disk's density can be found only by complex integration.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, распределение плотности притягивающих тел в экваториальной плоскости сплюснутой галактики можно определить по кривой ее вращения. Такая задача решается однозначно, см. например, [1]. Но возможен и другой подход, когда из каких-то теоретических соображений задается потенциал $V(z)$ осесимметричного тела на оси вращения. Тем самым, задается разложение в ряд Лапласа и в целом внешний потенциал тела. Если заданный потенциал соответствует какой-то реальной плотности диска, то последняя определяется однозначно, поскольку она, в принципе, находится по напряженности поля непосредственно вблизи диска [2]. Формально же определение плотности $\sigma(R)$ сводится к решению интегрального уравнения

$$2\pi G\int_0^a \frac{R\,\sigma(R)\,dR}{\sqrt{R^2+z^2}} = V(z) \tag{1}$$

где a – радиус диска, G – гравитационная постоянная.

В других случаях σ есть не истинная, а условная плотность диска, замещающего тело ненулевой толщины. Такие условные диски появляются, в сущности, уже у Маклорена [3, 4], несколько более сложные примеры развиты в [5]. Определение таких дисков позволяет сравнивать между собой гравитирующие тела, обладающие разной внутренней структурой, но дающие одинаковый внешний потенциал. Вместо одного диска радиуса a иногда при этом может появиться кольцо или же система нескольких колец и дисков. Возможно и $a \to \infty$, но массу самогравитирующего диска при этом желательно оставить конечной. Таким образом, мы можем изображать широкое множество более или менее плоских звездных систем, в частности, с кольцевыми структурами с ядрами и без них [6, 7]. Использование замещающих дисков позволяет, кстати, легко определить радиус сходимости Лапласа, если a конечно: тогда это радиус совпадает с a.

Если мы хоти построить только замещающий, а не реальный диск, то в некоторых случаях его определение с условием конечности массы

$$\int_0^\infty R\,|\sigma(R)|\,dR < \infty$$

невозможно, по крайней мере, без каких-то дополнительных условий. Как будет показано ниже, иногда помогает делу переход к интегрированию в комплексной плоскости.

От исходной функции $V(z)$ ($z > 0$) требуем выполнения необходимых условий:

1) на бесконечности должна соблюдаться ньютоновская асимптотика точечной массы

$$V(z) = \frac{GM}{z} + O\left(z^{-2}\right), \tag{2}$$

где M – полная масса тела;

2) все производные должны быть непрерывны.

Однако, такие условия являются, строго говоря, все же недостаточными для существования физически допустимой плотности $\sigma(R)$.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Первый этап решения (1) заключается в дифференцировании этого уравнения по z. Тогда

$$V'(z) = -2\pi G z \int_0^a \frac{R\,\sigma(R)\,dR}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\,. \tag{3}$$

Левую и правую части (3) теперь умножаем на $z\big/\sqrt{z^2-u^2}$ и интегрируем от $z = u$ до $z = \infty$, где u – произвольный положительный параметр. Меняя порядок интегрирования, берем сначала интеграл по z и получаем

$$\int_u^\infty \frac{V'(z)}{\sqrt{z^2-u^2}}\,dz = -2\pi G \int_0^a \frac{R\,\sigma(R)\,dR}{u^2+R^2}\,. \tag{4}$$

Обозначим через $\varphi(u)$ интеграл в правой части, т.е.

$$\varphi(u) = \int_0^a \frac{R\,\sigma(R)\,dR}{u^2+R^2} \tag{5}$$

По исходному определению, $u > 0$, но далее можно придавать переменной u значения на комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} u > 0$. Рассмотрим аналитическое продолжение $\varphi(u)$ до мнимой оси. Пусть $u = i\nu + \varepsilon$, где ν и ε вещественны и положительны, параметр ε считается малым. Мы можем переписать (5) в виде

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\sigma(R)\,dR}{R+iu} + \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\sigma(R)\,dR}{R-iu}\,,$$

или

$$\varphi(i\nu+\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{\sigma(R)dR}{R-\nu+i\varepsilon}+\frac{1}{2}\int_0^a \frac{\sigma(R)dR}{R+\nu-i\varepsilon}. \tag{6}$$

При предельном переходе $\varepsilon \to 0$ во втором интеграле (6) никакой сингулярности не появляется. Напротив, предельное значение первого интеграла раскрывается по формуле Сохоцкого [8]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(i\nu+\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_0^a \sigma(R)dR-\frac{\pi i}{2}\sigma(\nu)+\frac{1}{2}\int_0^a \frac{\sigma(R)dR}{R+\nu} \tag{7}$$

где черта означает главное значение интеграла в смысле Коши. Теперь, взяв мнимую часть полученного выражения, находим искомую формулу для замещающей плотности

$$\sigma(R)=\frac{1}{\pi^2 G}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\operatorname{Im}\int_u^\infty \frac{V'(z)\,dz}{\sqrt{z^2-u^2}}\right]_{u=R+i\varepsilon} \tag{8}$$

3. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ

1) Задан потенциал

$$V(z)=\ln\frac{\alpha+z}{\beta+z}=\frac{\alpha-\beta}{2}+\ldots$$

При применении общей формулы (8) встречаются интегралы

$$\int_u^\infty \frac{dz}{(\alpha+z)\sqrt{z^2-u^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-u^2}}\ln\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-u^2}}{u} & (u<\alpha)\\ \dfrac{1}{\sqrt{u^2-\alpha^2}}\arccos\dfrac{\alpha}{u} & (u>\alpha)\end{cases}$$

Оба выражения соответствуют друг другу в смысле аналитического продолжения, но при замене $u=i\nu+\varepsilon$ удобнее пользоваться верхней формулой. Получаем

$$\operatorname{Im}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\nu^2}}\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\nu^2}}{i\nu}=-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\nu^2}}$$

и в силу (8) распределение плотности:

$$\sigma(R)=\frac{1}{2\pi G}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+R^2}}\right).$$

В справедливости полученной формулы можно убедиться и сразу по виду первого члена в разложении потенциала. В данном случае диск простирается до бесконечности, хотя масса конечна и равна $(\alpha-\beta)/G$.

2) Другой пример

$$V(z)=\sqrt{a^2+z^2}-z=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+z^2}+z}=\frac{a^2}{2z}+\ldots$$

На этот раз приходим к интегралу

$$\int_u^\infty\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-1\right)\frac{dz}{\sqrt{z^2-u^2}}=\ln\frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

Замена $u=i\nu+\varepsilon$ дает

$$\ln\frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}=\ln\frac{i\nu+\varepsilon}{\sqrt{a^2-\nu^2+2i\varepsilon\nu+\varepsilon^2}}=\begin{cases}\ln\dfrac{i\nu}{\sqrt{a^2-\nu^2}} & (\nu<a)\\ \ln\dfrac{i\nu}{\sqrt{\nu^2-a^2}} & (\nu>a)\end{cases}$$

и силу (8) получаем

$$\sigma(R)=\frac{1}{2\pi G}\quad (R<a),\qquad \sigma(R)=0\qquad (R>a)$$

Получается однородный диск радиуса a.

3) Несколько более сложный потенциал, но сводящийся к только что рассмотренному

$$V(z)=\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}+\sqrt{b^2+z^2}}\qquad (a>b)$$

Иное представление

$$V(z)=\frac{\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right)-\left(\sqrt{b^2+z^2}-z\right)}{a^2-b^2}$$

с учетом предыдущего примера сразу дает

$$\sigma(R)=\frac{1}{2\pi G}\quad (b<R<a),\qquad \sigma(R)=0\qquad (R<b\ \text{ или }\ R>a),$$

т.е. получаем однородное кольцо.

4. СИНГУЛЯРНЫЕ СЛУЧАИ

Различные примеры аномальных ситуаций мы располагаем в порядке возрастающей степени сингулярности.

1*) Пример со слабой сингулярностью

$$V(z)=\operatorname{arctg}\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-\ldots\qquad (a>0)$$

В данном случае

$$\int_u^\infty\frac{V'(z)\,dz}{\sqrt{z^2-u^2}}=\frac{1}{2\sqrt{u^2+a^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2+u^2}-a}{\sqrt{a^2+u^2}+a}$$

После замены $u=i\nu+\varepsilon$ и использования (8) находим

$$\sigma(R)=\frac{1}{2\pi G\sqrt{a^2-R^2}}\quad (R<a),\qquad \sigma(R)=0\qquad (R>a),$$

Связь между $\sigma(R)$ и $V(z)$ в данном случае легко и непосредственно проверить по формуле (1) или сославшись на то, что мы имеем дело с потенциалом гомотетической (сжатой) сфероидальной оболочки. Хотя плотность и обращается в ∞ при $R=a$, но эта интегрируемая особенность во время перехода $\varepsilon\to 0$ и после него.

Можно формально оперировать только с ограниченными значениями плотности σ, если прибегнуть к интегрированию в комплексной плоскости. Тогда (1) заменяется на

$$V(z)=2\pi G\int_l\frac{\nu\tilde{\sigma}(\nu)d\nu}{\sqrt{\nu^2+z^2}}\tag{9}$$

где символ l означает путь интегрирования от начала координат снизу отрезка $[0,a]$ с обходом справа точки $\nu=a$ и затем сверху того же отрезка обратно к началу координат. При этом надо брать

$$\tilde{\sigma}(\nu)=-\frac{\sigma(\nu)}{2}=-\frac{1}{4\pi G\sqrt{a^2-\nu^2}}$$

с учетом правила обхода контура против часовой стрелки и различия знаков $\sqrt{a^2-\nu^2}$ по обе стороны отрезка. Собственно говоря, у нас нет в (9) настоящего замкнутого контура, поскольку на обоих концах петли l, совпадающих с началом координат, значения корня $\sqrt{a^2-\nu^2}=\mp a$ не одинаковы. При желании можно формально присоединить еще одну, симметричную петлю, чтобы получить истинно замкнутый путь в виде знака ∞, но при этом для компенсации надо уменьшить $\tilde{\sigma}(\nu)$ еще вдвое.

Одновременно с (9) в силу однозначности аналитического продолжения гармонических функций в пространстве действует формула

$$V(R,z)=G\int_0^{2\pi}d\theta\int_l\frac{\nu\tilde{\sigma}(\nu)d\nu}{\sqrt{z^2+\nu^2+R^2-2\nu R\cos\theta}} \tag{10}$$

для внешнего потенциала в произвольной точке пространства.

2*) Несколько особое положение занимает потенциал

$$V(z)=\frac{1}{\sqrt{R_0^2+z^2}} \qquad (R_0>0)$$

В данном случае

$$\int_u^\infty\frac{V'(z)dz}{\sqrt{z^2-u^2}}=-\int_u^\infty\frac{z\,dz}{\left(R_0^2+z^2\right)^{3/2}\sqrt{z^2-u^2}}=-\frac{1}{R_0^2+u^2}$$

Но при взятии мнимой части

$$\operatorname{Im}\frac{1}{R_0^2+(i\nu+\varepsilon)^2}=\frac{\varepsilon}{2R_0}\left[\frac{1}{(R_0+\nu)^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{(R_0-\nu)^2+\varepsilon^2}\right]$$

переход $\varepsilon\to 0$ наталкивается во втором члене, в отличие от примеров предыдущего пункта, на существенную неравномерность вблизи точки $\nu=R_0$. Строго говоря, этот предельный переход дает не нуль, а функцию Дирака. Действительно, данный потенциал соответствует бесконечно узкому кольцу массы G^{-1} радиуса R_0.

В этом примере легко при необходимости перейти к контурному интегрированию по формуле Коши: аналогично (9) имеем

$$V(z)=\frac{1}{\pi i}\oint_o\frac{\nu\,d\nu}{\left(\nu^2-R_0^2\right)\sqrt{\nu^2+z^2}},$$

где o – контур, окружающий точку a, и точно так же строится формула для $V(R,z)$.

3*) Дифференцируя потенциал примера 1) по параметру a, получаем функцию

$$V(z)=\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{arctg}\frac{a}{z}=\frac{z}{a^2+z^2}$$

В силу линейности связей между $\sigma(R)$ и $V(z)$, то же самое дифференцирование можно произвести и в (9) и роль функции σ теперь будет играть

$$-\frac{1}{4\pi G}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{a^2-\nu^2}}=\frac{a}{4\pi G\left(a^2-\nu^2\right)^{3/2}}$$

В обычном же, не комплексном интеграле дифференцирование по параметру в данном случае невыполнимо, т.е. реального замещающего диска не существует, но формула типа (9) или (10) дает нужный потенциал.

4) Однородный круговой тор.

Введем параметры: R_0 – радиус осевой линии, a – радиус поперечного сечения, ρ – объемная плотность ($R_0 > a$). Интегрирование в цилиндрических координатах дает сначала

$$V(z) = 2\pi G\rho \int_{-a}^{a} d\xi \int_{R_2}^{R_1} \frac{R\,dR}{\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} = 2\pi G\rho \int_{-a}^{a} \left[\sqrt{R_1^2 + (z-\xi)^2} - \sqrt{R_2^2 + (z-\xi)^2} \right] d\xi ,$$

где $R_{1,2} = R_0 \pm \sqrt{a^2 - \xi^2}$.

После подстановки $\xi = a\sin\lambda$ в одном интеграле и $\xi = -a\sin\lambda$ в другом находим

$$V(z) = 2\pi G\rho a \int_{0}^{2\pi} \sqrt{R_0^2 + a^2 + z^2 - 2az\sin\lambda + 2aR_0\cos\lambda}\,\cos\lambda\, d\lambda ,$$

а если сместить начало отсчета вспомогательного угла λ на некоторую постоянную, то получается

$$V(z) = \frac{2\pi G\rho a R_0}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{R_0^2 + a^2 + z^2 + 2a\sqrt{R_0^2 + z^2}\cos X}\,\cos X\, dX .$$

Это выражение сводится к стандартным полным эллиптическим интегралам, но для наших целей удобно сразу представить его в виде ряда, воспользовавшись биномиальным разложением

$$\sqrt{1+\mu} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!}\mu^m \qquad (|\mu| \le 1).$$

Тогда

$$V(z) = 2\pi G\rho a R_0 \int_{0}^{2\pi} \left(1 + \frac{ae^{ik}}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{ae^{-ik}}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} \right)^{1/2} \cos X\, dX =$$

$$= 2\pi^2 G\rho a R_0 \left[\frac{a}{2\sqrt{R_0^2 + z^2}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-3)!!(2m-1)!!}{(2m)!!(2m+2)!!} \left(\frac{a}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} \right)^{2m+1} \right]$$

Выделенный первый член, как уже отмечалось, допускает интегральное представление

$$\frac{1}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} = \frac{1}{\pi i} \oint_{o} \frac{\nu\, d\nu}{(\nu^2 - R_0^2)\sqrt{\nu^2 + z^2}} ,$$

а его интегрирование m раз по параметру R_0^2 аналогично переходу от примера 1*) к примеру 3*), дает

$$\frac{(2m-1)!!}{2^m} \left(R_0^2 + z^2 \right)^{-\frac{2m+1}{2}} = i\frac{m}{\pi} \oint_{o} \frac{\nu\, d\nu}{\left(R_0^2 - \nu^2 \right)^{m+1} \sqrt{\nu^2 + z^2}} .$$

Таким образом, все члены ряда выражаются однотипными контурными интегралами. Собирая их вместе и пользуясь опять некоторым биномиальным разложением, приходим к окончательной формуле типа (9) или (10) с

$$\tilde{\sigma}(\nu) = \frac{2\rho R_0}{3} \left(\frac{\nu^2 - R_0^2 + a^2}{R_0^2 - \nu^2} \right)^{3/2} . \qquad (11)$$

При этом, однако, мы должны были перейти к интегрированию по несколько более широкому контуру s, что не сказывается на величине отдельных интегралов, но необходимо для обеспечения сходимости ряда в целом. Достаточно, если контур s охватывает вещественный отрезок $\left[\sqrt{R_0^2 - a^2}\,,\, R_0\right]$. Кроме того, мы отбросили возникающее в ходе выкладок постоянное слагаемое в $\tilde{\sigma}(\nu)$, так как для контурных интегралов оно значения не имеет.

Рассмотрение $\tilde{\sigma}(\nu)$ в (11) немедленно показывает сингулярность в точке R_0, не интегрируемую в рамках функций вещественного переменного. По этой причине реальный замещающий диск построить нельзя, мы имеем только формулу с контурным интегралом. По ней, в частности, сразу видно, что область сходимости ряда Лапласа для тора ограничена сферой радиуса R_0.

5) Однородный вытянутый сфероид.

Это пример, когда развитый в данной статье алгоритм непосредственно не применим: аналитическое продолжение $V(z)$ наталкивается на особенности в фокальных точках и не доходим до мнимой оси z представление $V(z)$ потенциалом замещающего диска возможно только в смысле интегрирования по мнимой оси R.

1. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М.: Наука, 1976. – 447 с.
2. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М.: Наука, 1988. – 269 с.
3. *Кондратьев Б.П.* Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. – М.: Физматгиз, 1989. – 270 с.
4. *Дубошин Г.Н.* Теория притяжения. – М.: Физматгиз, 1961. – 288 с.
5. *Завізіон О.В.* Про густину самогравітуючих дисків, зовнішні потенціали яких співпадають з гравітаційними потенціалами еліпсоїдів обертання // Вісник Астрономічної школи. Т.1, № 1, 2000, с.82–85.
6. *Воронцов-Вельяминов В.А.* Внегалактическая астрономия. – М.: Наука, 1972. – 464 с.
7. *Malin D.F., Carter D.* Astrophys. J. 1983. v.274. P.534–540.
8. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Гостехтеориздат, 1954. – 444 с.

Поступила в редакцию 15.09.2000