Вісник Астрономічної школи
Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

**Том 1 • № 2 • 2000** С. 47 – 50

УДК 523.45

# Аппроксимация полей тяготения астероидов полем гравитационного диполя

**Ю.В. Александров, А.В. Портянкина**

Астрономическая обсерватория Харьковского национального университета, Украина

*Рассмотрена возможность аппроксимации полей тяготения астероидов полем гравитационного диполя (задача двух неподвижных центров) в предположении, что астероиды могут быть представлены однородными эллипсоидами вращения или трехосными эллипсоидами с последующим усреднением поля тяготения по периоду осевого вращения астероида.*

*АПРОКСИМАЦІЯ ПОЛІВ ТЯЖІННЯ АСТЕРОЇДІВ ПОЛЕМ ГРАВІТАЦІЙНОГО ДИПОЛЯ. Александров Ю.В., Портянкіна А.В. – Розглянута можливість апроксимації полів тяжіння астероїдів полем гравітаційного диполя (задача двох нерухомих центрів) в припущенні, що астероїди можуть бути представлені однорідними еліпсоїдами обертання або трьохосними еліпсоїдами з наступним осередненням поля тяжіння за періодом осьового обертання астероїда.*

*APPROXIMATION OF ASTEROIDS GRAVITATIONAL FIELDS BY THE GRAVITATIONAL DOUBLET, by Alexandrov U.V., Portyankina A.V. – The possibility of the approximation of asteroids gravitational fields by the gravitational doublet (the problem of two fixed centers) is considered with the assumption, that asteroids can be represented as homogeneous ellipsoids of revolution or as triaxial ellipsoids with the following averaging by the period of axial revolution.*

Анализ кривых блеска, инфракрасных и космических изображений астероидов показывает, что, по-видимому, двойственность астероидов не такое уж редкое явление. С той или иной степенью достоверности можно уже говорить о том, что двойными являются 10 астероидов. Все более расширяется исследование астероидов с помощью средств ракетно-космической техники, в том числе и с помощью искусственных спутников астероидов, примером чему служит КА NEAR, ставший искусственным спутником астероида 433 Эрос. Все это актуализирует вопрос об описании гравитационных полей астероидов с достаточно полным учетом их реальной формы. При этом нужно иметь в виду, что классический подход, применяемый к большим планетам, – разложение гравитационного потенциала по шаровым функциям может оказаться мало эффективным. Можно ожидать, что типичная форма астероидов – это трехосный эллипсоид с соотношением полуосей $a:b:c=2:\sqrt{2}:1$, а в этом случае эксцентриситеты полярных сечений лежат в пределах от $\sqrt{2}/2$ до $\sqrt{3}/2$. Об этом свидетельствуют результаты экспериментов по дроблению тел при их столкновениях [8]. Качественно с этим выводом согласуется оценка величины $a\sin i/b\,a$ по среднему значению амплитуды кривых блеска астероидов [5] ($i$ – угол между осью вращения астероида и лучом зрения). С другой стороны, в случае астероидов задача описания гравитационного поля упрощается тем, что их (кроме самых крупных) можно считать однородными телами. Кроме того, желательно иметь такое описание поля тяготения астероида, которое позволило бы решать те или задачи о движении в этом поле. Одну из таких возможностей предоставляет приближение поля тяготения небесного тела полем гравитационного диполя (обобщенная задача двух неподвижных центров, уравнения которой интегрируются в квадратурах, см. [1,2,4]).

Непосредственно приближение двух неподвижных центров применимо лишь к полям осесимметричных тел. Но при рассмотрении процессов на временах, значительно больших периода осевого вращения астероида ($>>10^h$), можно усреднить поле тяготения по всем ориентациям, возникающим в процессе осевого вращения астроида, и, таким образом, перейти к осесимметричному полю. Ниже рассматриваются следующие две задачи:

1) О точности аппроксимации полем гравитационного диполя поля эллипсоида вращения;
2) О точности аппроксимации усредненного по периоду вращения поля трехосного эллипсоида.

1) Гравитационный потенциал однородного эллипсоида вращения с полуосями *a* и *c* ($a > c$) равен [3]:

$$U = \frac{3fm}{2lc}\left\{arctg(lu) + \frac{x^2+y^2}{2l^2c^2}\left[\frac{lu}{1+l^2c^2} - arctg(lu)\right] + \frac{z^2}{l^2c^2}\left[arctg(lu) - lu\right]\right\}, \qquad (1)$$

где *f* – гравитационная постоянная, *m* – масса эллипсоида, $l = \sqrt{(a^2-c^2)}/c$ - его второй эксцентриситет, величина *u* определяется уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{1+l^2u^2} + \frac{z^2}{1} = \frac{c^2}{u^2}.$$

Потенциал симметричного гравитационного диполя равен [4]:

$$U = \frac{fm\lambda}{d\left(\lambda^2+\mu^2\right)}, \qquad (2)$$

где *m* – сумма масс точек диполя, λ и μ – эллипсоидальные координаты точки, в которой ищется потенциал, $\pm di$ – мнимые координаты точек диполя. Наибольшая погрешность при аппроксимации потенциала (1) потенциалом (2) будет, очевидно, на поверхности эллипсоида, где параметр *u* равен 1. Вводя условия нормировки $fm = 1$ и $a = 1$, представим потенциал (1) на поверхности эллипсоида как функцию эксцентриситета *e* его полярного сечения и полярного угла $\theta = \arccos t$ . Таким образом:

$$U_e(t) = \frac{3}{4e^3}\left\{e\sqrt{1-e^2}\left(1-3t^2\right) - \arcsin e\cdot\left[1-2e^2-\left(3-2e^2\right)t^2\right]\right\}. \qquad (3)$$

Поле диполя на поверхности эллипсоида запишем теперь как

$$U_d(t) = \frac{\lambda}{d\left(\lambda^2+\mu^2\right)}, \qquad (4)$$

где

$$\lambda^2, \mu^2 = \frac{s \pm p}{2}, p = \frac{1-e^2t^2-d^2}{d^2}, s = \sqrt{p^2+4q}, q = \frac{\left(1-e^2\right)t^2}{d^2}.$$

Теперь, приравнивая друг другу (3) и (4), нужно найти при заданном *e* параметр диполя *d* по способу наименьших квадратов. При этом нужно воспользоваться методом последовательных приближений в силу нелинейной зависимости потенциала (4) от параметра *d*. Будем иметь:

$$\Delta d_n = \frac{\int_0^1 \frac{\partial U_d\left(t, d_{n-1}\right)}{\partial d}\cdot U_e(t)dt}{\int_0^1 \left(\frac{\partial U_d\left(t, d_{n-1}\right)}{\partial d}\right)^2 dt}. \qquad (5)$$

В качестве начального приближения можно взять $d_0 = e/\sqrt{5}$. Это выражение следует из вида разложения потенциала $U_e$ по полиномам Лежандра [3] и сравнения его с соответствующим рядом для

**Таблица 1.** Погрешности аппроксимации поля эллипсоида полем диполя

| $e$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.98 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 0.045 | 0.134 | 0.223 | 0.267 | 0.309 | 0.348 | 0.375 | 0.376 | 0.361 |
| $\sigma / U_e(0)$ | 0.000 | 0.000 | 0.003 | 0.006 | 0.014 | 0.033 | 0.088 | 0.174 | 0.333 |

**Таблица 2.** Погрешности аппроксимации в зависимости от широты φ

| | $D$ | | | $\sigma/U_e(0)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | 30° | 45° | 60° | 30° | 45° | 60° |
| 0.95 | 0.466 | 0.432 | 0.453 | 0.015 | 0.056 | 0.117 |
| 0.98 | 0.495 | 0.447 | 0.334 | 0.014 | 0.074 | 0.204 |

**Таблица 3.** Погрешности аппроксимации поля трехосного эллипсоида

| | $e$ | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Δ | $b=\sqrt{ac}$ | $1\cdot10^{-4}$ | 0.001 | 0.003 | 0.008 | 0.021 | 0.040 |
| | $b=c$ | 0.001 | 0.006 | 0.032 | 0.074 | 0.194 | 0.384 |

гравитационного диполя [4]. Результаты вычислений величины $d$ и соответствующих значений среднеквадратичного уклонения приведены в табл. 1.

Видно, что до значения $e=0.5$ погрешность аппроксимации поля эллипсоида полем диполя достаточно мала, но при $e>0.5$ погрешность начинает нелинейно возрастать, но остается меньше 10 % при значениях $e$, меньших 0.9. При еще больших эксцентриситетах значительные величины погрешностей связаны с тем, что при значениях параметра диполя $d$, близких к величине малой полуоси $c$ резко возрастает различие между значениями поля на полюсе тела. Погрешность аппроксимации в среднем можно уменьшить, если ограничиться рассмотрением некоторой широтной зоны ±φ. Это демонстрирует табл. 3. В зоне ±45° погрешность не превышает 10 %.

2) Потенциал однородного трехосного эллипсоида равен [3]:

$$U=\frac{3}{4}fm\int_{\xi}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+v}-\frac{y^2}{b^2+v}-\frac{z^2}{c^2+v}\right)\frac{dv}{R(v)}, \tag{6}$$

где $R(v)=\sqrt{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}$, а нижний предел интегрирования ξ в общем случае зависит от координат $x, y, z$, но на поверхности эллипсоида его значение равно 0. Переходя в (6) к цилиндрическим координатам, проинтегрируем его по долготе φ от 0 до 2π. Получим усредненный потенциал

$$\overline{U}=\frac{3}{4}fm\int_{0}^{\infty}\left(1-\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{a^2+v}+\frac{1}{b^2+v}\right)+\frac{z^2}{c^2+v}\right)\frac{dv}{R(v)}. \tag{7}$$

Естественно аппроксимировать не зависящий от долготы усредненный потенциал трехосного эллипсоида потенциалом равновеликого ему по объему (а, значит, и по массе) двухосного эллипсоида. Это значит, что нужно положить большую полуось такого эффективного эллипсоида вращения $a_e=\sqrt{ab}$ .

Вычисляя теперь значения усредненного потенциала и потенциала эффективного эллипсоида вращения, найдем погрешность, возникающую при такой процедуре. Ясно, что наибольшая погрешность при этом возникает на экваторе, т.е. при $t=0$ . Потенциал трехосного эллипсоида (7) вычислялся сведением его к эллиптическим интегралам [6]. Были рассмотрены два случая: а) средняя полуось является средним геометрическим большой и малой ( $b=\sqrt{ac}$ ), что содержит, как частный случай, упомянутое выше соотношение между полуосями эллипсоида, описывающего типичную форму астероидов, и б) эллипсоид с наибольшим возможным сжатием в экваториальной плоскости ( $b = c$ ). Результаты соответствующих вычислений приведены в табл. 2, где даны значения эксцентриситета $e$ полярного сечения эффективного эллипсоида вращения и относительной погрешности $\delta = \left|\overline{U}(0) - U_e(0)\right| / \overline{U}(0)$. В первом случае погрешность не превышает 10 %. В случае предельно сжатого эллипсоида она велика лишь при больших значениях полярного сжатия $(e \geq 0.9)$. К полюсам величина погрешности должна значительно уменьшаться.

Нужно также иметь в виду, что и в случае 1) и в случае 2) рассматривались значения гравитационных потенциалов на поверхности тела, а в окружающем это тело пространстве погрешности аппроксимации будут уменьшаться с увеличением расстояния от поверхности тела. Так, если в соответствии со сказанным в конце пункта 1) на полюсе эллипсоида с эксцентриситетом 0,98 (сжатие $\approx 1:5$) погрешность аппроксимации велика и составляет 37 %, то при $r = 2c$ на полярной оси она равна уже 8 %, а при $r = 3c$ – всего 1 %.

Не представляет принципиальных трудностей аппроксимация полем асимметричного диполя поля тяготения тела, состоящего из двух полуэллипсоидов вращения с одинаковой большой полуосью и различными эксцентриситетами $e_1$ и $e_2$. Ясно, что погрешность такой аппроксимации будет лежать между погрешностями для эллипсоидами с эксцентриситетами $e_1$ и $e_2$. Однако значения потенциала $U(e_1,e_2,t)$ при этом придется вычислять, находя с помощью численного интегрирования необходимое число коэффициентов его ряда по полиномам Лежандра. Затем методом наименьших квадратов нужно будет найти массы точек диполя и их координаты, последние в этом случае будут комплексными сопряженными величинами.

Конечно, описание формы астероидов с помощью эллипсоидов является лишь первым приближением. Поверхность эллипсоида – это только некая референц-поверхность, относительно которой могут иметь место значительные отклонения. В этом мы можем наглядно убедиться по имеющимся уже космическим изображениям астероидов. Но без определенной степени регуляризации формы астероидов тоже обойтись нельзя. С другой стороны, если уж потребуется описать поле тяготения какого-либо конкретного астероида с учетом особенностей его формы, то эффективным способом может быть представление этого поля полем гравитационного мультиполя [7]. Сделанное выше может рассматриваться как первое приближение в указанном направлении.

1. *Гребенников Е.А., Демин В.Г., Аксенов Е.П.* Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле тяготения Земли // Искусственные спутники Земли. – 1961. – № 8. – С. 64–72.
2. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
3. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968. – 799 с.
4. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1964. – 560 с.
5. *Мухамед Р.А.* Вращение, форма и кривые блеска астероидов // Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1995. – 234 с.
6. *Муратов Р.З.* Потенциалы эллипсоида. – М.: Атомиздат, 1976. – 144 с.
7. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М.: Наука, 1988. – 268 с.
8. *Fujwara A., Cerront P., Davis D.R. at all.* Experiment and sealing laws on catastrophic collision // Asteroids II/Eds. Binzel R., Gehrels T., Mattewws M. – Tuson: Univ. Arizona Press, 1989. – P.240–265.

Поступила в редакцию 20.05.2000