Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

ISSN 1607–2855

Том 1 • № 2 • 2000 С. 38 – 41

УДК 530.12:531.51

Релятивистские конфигурации анизотропной жидкости

В.В. Бурликов

Украинский государственный химико-технологический университет, Днепропетровск, Украина

Получены и исследованы новые точные решения уравнений общей теории относительности для нестатических сферически-симметричных конфигураций анизотропной жидкости с однородной плотностью энергии. Массовая функция считается равной нулю в центре конфигураций. Исследована возможность сшивки полученных решений с пустым пространством.

РЕЛЯТИВІСТСЬКІ КОНФІГУРАЦІЇ АНІЗОТРОПНОЇ РІДИНИ, Бурліков В.В. – Знайдено та досліджено нові точні розв'язки рівнянь загальної теорії відносності для нестатичних сферично-симетричних конфігурацій анізотропної рідини з однорідною густиною енергії. Вважається, що масова функція дорівнює нулю у центрі конфігурації. Досліджено можливість зшивки знайдених розв'язків з пустим простором.

SPHERES OF ANISOTROPIC FLUID IN GENERAL RELATIVITY, by Burlikov V.V. – The class of new exact solutions for non-static spherically symmetric configurations of anisotropic fluid is derived and investigated. It is assumed that the mass function vanishes at center and the energy density is uniform. The matching of the obtained solutions to the empty space is studied.

ВВЕДЕНИЕ.

Получение и исследование точных решений уравнений общей теории относительности по-прежнему остается одним из важнейших направлений современной теории гравитации. Наиболее исследованными в этой области являются сферически-симметричные модели с уравнениями состояния идеальной жидкости и пылевидной материи. Кроме того, в последние годы все больше появляется работ, посвященных исследованию конфигураций анизотропной жидкости. Появление локальной анизотропии может быть вызвано скалярным полем, излучением нейтрино или наличием в конфигурациях кристаллического ядра. Смесь идеальных жидкостей, движущихся с различными скоростями, также может рассматриваться как анизотропная жидкость [7]. Был получен ряд нестатических анизотропных решений с различными дополнительными соотношениями (см., например, работы [2], [3], [6]).

Одним из наиболее изученных среди нестатических сферически-симметричных решений для идеальной жидкости является однородная модель, в которой плотность энергии является функцией только временной координаты, а давление зависит и от временной, и от пространственной координат [1], [4], [9]. Поэтому представляет интерес построение анизотропных аналогов такой модели. Однако, насколько известно автору, работ, в которых рассматривались бы такие модели, опубликовано не было.

Целью настоящей работы является построение и исследование нестатических сферически-симметричных решений для анизотропной жидкости с однородной плотностью энергии.

1. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ.

Рассмотрим нестатическую сферически-симметричную конфигурацию анизотропной жидкости. Интервал запишем в виде

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dR^2 - r^2 d\sigma^2 , \tag{1}$$

где ν, λ и r – функции радиальной R и временно́й t координат, $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ (θ и φ – сферические угловые координаты). Система отсчета считается сопутствующей, при этом тензор энергии–импульса анизотропной жидкости имеет диагональный вид: $T_0^0 = \varepsilon$, $T_1^1 = -p_r$, $T_2^2 = T_3^3 = -p_\perp$, где ε – плотность энергии, p_r и $p_\perp$ – "радиальное" и "тангенциальное" давление.

Уравнения Эйнштейна, описывающие такую конфигурацию, могут быть записаны в следующем виде:

$$2\dot{r}' = \dot{\lambda} r' + \nu' \dot{r}, \tag{2}$$

$$\dot{m} = -8\pi r^2 r' p_r, \tag{3}$$

$$\dot{m} = 8\pi r^2 r' p_\perp, \tag{4}$$

$$-2p_r' = \nu'(p_r + \varepsilon) + 4\frac{r'}{r}(p_r - p_\perp), \tag{5}$$

где $m(R,t)$ – массовая функция, введенная Мизнером и Шарпом [8]:

$$m(R,t) = r\left(1 + \dot{r}^2 e^{-\nu} - r'^2 e^{-\lambda}\right). \tag{6}$$

Физический смысл массовой функции состоит в том, что значение $m(R,t)$ равно полному количеству массы-энергии, заключенному внутри сферы радиуса $r(R,t)$.

Уравнение (5) может также быть записано как

$$-2\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}(p_r + \varepsilon) + 4\frac{\dot{r}}{r}(p_\perp + \varepsilon). \tag{7}$$

Гласс [5] при исследовании конфигураций идеальной жидкости предложил записать массовую функцию в виде

$$m(R,t) = \frac{8\pi}{3}\varepsilon(R,t) r^3 + E(R,t), \tag{8}$$

при этом функция $E(R,t)$ рассматривалась как вклад гравитационного поля в полную массу – энергию системы. Он показал, что величина $E(R,t)$ связана с тензором Вейля и записал полевые уравнения (3), (4) через функцию $E(R,t)$. Оказалось, что при $E = 0$ решение является конформно – плоским, при $E = E(R)$ – бессдвиговым, при $E = E(t)$ – однородным.

Позднее Понсе де Леон [10] нашел связь между массовой функцией и тензором Вейля в случае анизотропной жидкости:

$$m = \frac{8\pi}{3}(\varepsilon + p_r - p_\perp) r^3 + W, \tag{9}$$

где $W(R,t) = rC_{232}^3$. При этом функция $W(R,t)$ играет роль полного количества энергии гравитационного поля внутри сферы радиуса $r(R,t)$. Очевидно, что функции $E(R,t)$ и $W(R,t)$ связаны соотношением $E = \frac{8\pi}{3}(p_\perp - p_r) r^3 + W$. В случае идеальной жидкости $E = W$, для конформно-плоских решений $W = 0$.

Для изучения однородных конфигураций ($\varepsilon' = 0$) оказалось удобно записать уравнения поля (3) – (5) через функцию $E(R,t)$ в виде

$$E' = -\frac{8\pi}{3}\varepsilon' r^3, \tag{10}$$

$$\dot{E} = -\frac{8\pi}{3}\dot{\varepsilon} r^3 - 8\pi(p_r + \varepsilon) r^2 \dot{r}, \tag{11}$$

$$\frac{6\dot{E}}{8\pi r^3} = \left(\dot{\lambda} - 2\frac{\dot{r}}{r}\right)(p_r + \varepsilon) + 4\frac{\dot{r}}{r}(p_\perp - p_r) \tag{12}$$

Непосредственно из уравнения (10) следует, что в случае однородной плотности энергии ($\varepsilon' = 0$) функция E зависит только от временной координаты: $E = E(t)$. Анизотропные решения с $E = E(R)$ обладают отличным от нуля сдвигом.

2. МОДЕЛИ.

Рассмотрим конфигурацию однородной ($\varepsilon' = 0$) анизотропной жидкости. Для того, чтобы массовая функция обращалась в нуль в центре конфигурации, потребуем $E = 0$. Такое решение является анизотропным аналогом однородного решения для идеальной жидкости, рассмотренного в [1], [4], [9].

Будем считать, что анизотропная жидкость удовлетворяет уравнению состояния

$$\Delta p \equiv 8\pi(p_\perp - p_r) = 4\pi k(p_r + \varepsilon) \tag{13}$$

где k – произвольная постоянная. Значение $k = 0$ соответствует идеальной жидкости.

Для рассматриваемой конфигурации получено решение:

$$ds^2 = \left(\frac{\dot r}{r}\right)\frac{r^{2k}}{\Psi^2(t)}dt^2 - r^{2-2k}f^2(R)dR^2 - r^2(R,t)d\sigma^2 \tag{14}$$

$$p_r = -\frac{\dot\varepsilon r}{3\dot r} - \varepsilon\,, \quad p_\perp = \frac{k}{2}\left(\frac{k+2}{k}p_r + \varepsilon\right), \tag{15}$$

где $\varepsilon(t)$, $\Psi(t)$ и $f(R)$ – произвольные функции, а функция $r(R,t)$ определяется уравнением

$$\frac{r'^2}{r^{2-2k}f^2(R)} = 1 + \Psi^2 r^{2-2k} - \frac{8\pi}{3}\varepsilon r^2 \tag{16}$$

которое в общем случае не интегрируется в квадратурах.

Рассмотрим частное решение с $k = 1$. В этом случае

$$ds^2 = \frac{\dot r^2}{\Psi^2(t)}dt^2 - dR^2 - r^2 d\sigma^2\,,\; p_\perp = \frac{3}{2}p_r + \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

функция $f(R)$ для удобства выбрана равной единице.

Интегрирование (16) дает

$$r(R,t) = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{\left(1+\Psi^2(t)\right)}{\pi\varepsilon(t)}}\sin\left[R\sqrt{8\pi\varepsilon(t)/3} + \eta(t)\right] \tag{18}$$

где $\eta(t)$ – произвольная функция интегрирования.

Для построения модели жидкой сферы требуем, чтобы в центре конфигурации функция $r(R,t)$ обращалась в нуль. В этом случае произвольная функция $\eta(t)$ имеет следующий вид: $\eta(t) = -R_c\sqrt{8\pi\varepsilon/3}$ где $R_c = const$ – значение радиальной координаты, соответствующее центру конфигурации. Без потери общности можно положить $R_c = 0$ $(\eta = 0)$.

Будем считать, что конфигурация окружена пустым пространством. Из условий сшивки метрик [8]

$$m(R_b,t) = r_g\,, \quad -T_1^1(R_b,t) = p_r(R_b,t) = 0 \tag{19}$$

получим

$$\varepsilon = \frac{3r_g}{8\pi r_b^3}\,, \quad \Psi^2(t) = \frac{r_g}{r_b\sin^2\left(R_b\sqrt{r_g r_b^{-3}}\right)} - 1 \tag{20}$$

где $R_b = const$ – значение радиальной координаты на поверхности сшивки. Теперь решение содержит только одну произвольную функцию времени $r_b(t)$. Отметим, что из условия положительности производной $\partial r/\partial R$ следует $R_b \le \left(\pi r_b\sqrt{r_b/r_g}\right)/2$ Это условие также можно записать как $r_b \ge \left(2R_b\sqrt{r_g}/\pi\right)^{2/3}$.

Радиальное давление для рассматриваемой модели имеет вид

$$p_r = \varepsilon\left[\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r_b}{r_g}}\cot\left(R\sqrt{r_g r_b^{-3}}\right)\frac{R-R_b}{r_b}\right)^{-1} - 1\right] \tag{21}$$

В центре $p_r = p_\perp = -\varepsilon$, на поверхности $p_r = 0$, $p_\perp = \varepsilon/2$.

Эволюция модели с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с поверхностью конфигурации, описывается следующим уравнением:

$$\left(\frac{dr_b}{d\tau}\right)^2 = \Psi^2 = \frac{r_g}{r_b \sin^2\left(R_b \sqrt{r_g r_b^{-3}}\right)} - 1 \tag{22}$$

В частном случае $R_b = \pi r_g / 2$ сфера сжимается от бесконечности до точки остановки $r^{(T)} \approx 1{,}2811 r_g$, после чего неограниченно расширяется.

Также получено конформно – плоское решение для однородной анизотропной модели. В этом случае $p_\perp - p_r = \frac{3E(t)}{8\pi r^3}$, где $E(t)$ – произвольная функция времени. Значение $E = 0$ соответствует идеальной жидкости. При $E \neq 0$ решение описывает сферический слой с $r \neq 0$. Уравнения поля для конфигурации с таким уравнением состояния удалось проинтегрировать только при условии, что решение является бессдвиговым $\left(\dot{\lambda} = 2\dot{r}/r\right)$. При этом оказалось, что $r' = 0$, то есть полученное решение является Т-решением и описывает только Т-область пространства-времени $(m/r > 1)$.

Полученное конформно – плоское решение имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{\dot{E}^2}{4E^2\Psi^2} dt^2 - r^2(t) F^2(t) dR^2 - r^2(t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{23}$$

$$r^2(t) = AE(t), \quad \Psi^2(t) = \frac{8\pi}{3}\varepsilon(t) + \frac{E - r(t)}{r^3(t)}, \tag{24}$$

$$p_r = -\varepsilon - \frac{2\dot{\varepsilon}E}{3\dot{E}} - \frac{1}{4\pi A r(t)}, \quad p_\perp = p_r + \frac{3}{8\pi A r(t)}, \tag{25}$$

где $E(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и $F(R)$ – произвольные функции, $A = const$. Функция $E(t)$ должна иметь постоянный знак, а $\Psi^2(t)$ – быть неотрицательной. Конфигурация является однородной – $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $p_r = p_r(t)$, $p_\perp = p_\perp(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Построены и исследованы два частных нестатических сферически – симметричных решений для анизотропной жидкости с однородной плотностью энергии. Первое из них является анизотропным аналогом однородного решения для идеальной жидкости, второе – конформно–плоским Т-решением. Исследована возможность сшивки полученных решений с пустым пространством.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору кафедры теорфизики Днепропетровского университета Коркиной М.П. за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

1. *Бурликов В.В., Коркина М.П.* Однородные сферические конфигурации переменной пространственной кривизны // Изв. вузов. Физика. – т.41. – 1998, № 3. – с.12–17.
2. *Cosenza M., Herrera L., Esculpi M. and Witten L.* Evolution of radiating anisotropic spheres in general relativity // Phys. Rev. D – v. 25. – 1982, № 10. – pp.2527 – 2535.
3. *Bayin S.S.* Anisotropic fluid spheres in general relativity // Phys. Rev. D – v. 26. – 1982, № 6. – pp.1262 – 1274.
4. *Burlikov V.V. and Korkina M.P.* Fluid spheres of uniform density with variable space curvature. // Proceedings of the eighth Marcel Grossman meeting on general relativity (in 2 parts). – World Scientific. 1999. – Vol.1. – p.316 – 318.
5. *Glass E.N.* Shear – free gravitational collapse // J. Math. Phys. – v.20. – 1979, № 7. – pp.1508 – 1513.
6. *Herrera L. and Ponce de León J.* Anisotropic spheres admitting a one – parameter group of conformal motions // J. Math. Phys. – v.26. – 1985, №8. – pp.2018 – 2023.
7. *Letelier P.S.* Anisotropic fluids with two-perfect-fluid components // Phys. Rev. D – v.22. – 1980, № 44. – pp.807 – 813.
8. *Misner C.W. and Sharp D.H.* Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse // Phys. Rev. – v.136. – 1964, № 2B. – pp.B571 – B576.
9. *Ponce de León J.* Fluid spheres of uniform density in general relativity // J.Math.Phys.– v. 27. – 1986, № 1.– pp.271 – 276.
10. *Ponce de León J.* Weil curvature tensor in static spherical sources // Phys. Rev. D – v.37. – 1988, №2. – pp.309 – 317.

Поступила в редакцию 15.09.2000