



ISSN 1607–2855

Том 1 • № 2 • 2000 С. 106 – 110

УДК 524.3

## Фрактальные свойства идеальных иерархических звездных систем

В.Г. Сурдин

Государственный Астрономический институт им. П.К.Штернберга, Московский университет, Россия

*Показано, что простейшие (идеальные) иерархические звездные скопления обладают фрактальной структурой, объемная размерность которой у динамически устойчивых скоплений ( $0 \div 0,33$ ) существенно меньше фрактальной размерности молекулярных облаков ( $2,3 \div 2,5$ ). Это различие может служить одной из причин низкой частоты формирования иерархических скоплений.*

*ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ІДЕАЛЬНИХ ІЄРАРХІЧНИХ ЗОРЯНИХ СКУПЧЕНЬ, Сурдін В.Г. – Показано, що найпростіші (ідеальні) ієрархічні зоряні скупчення мають фрактальну структуру, об'ємна розмірність якої у динамічно стійких скупчень ( $0 \div 0,33$ ) істотно менше від фрактальної розмірності молекулярних хмар ( $2,3 \div 2,5$ ). Це різниця може слугувати однією з причин низької частоти формування ієрархічних скупчень.*

*FRactal origin of the ideal hierarchical star clusters, by Surdin V.G. – It is shown that the simplest (ideal) hierarchical star clusters have fractal structure. The volume fractal measure of the dynamical stable clusters ( $0 \div 0,33$ ) is less than on of the molecular clouds ( $2,3 \div 2,5$ ). Perhaps this is a reason why formation of hierarchical star clusters take place very rare.*

### ВВЕДЕНИЕ

Известны два типа структуры звездных систем: 1) *хаотический*, к которому относится подавляющее большинство звездных скоплений и, по-видимому, все галактики; 2) *иерархический*, представленный малонаселенными системами типа кратной звезды  $\epsilon$  Луг. С точки зрения теории формирования звезд иерархические системы намного интереснее, ибо они длительное время сохраняют исходное распределение масс и размеров своих подсистем, что дает возможность, как минимум, судить о процессе гравитационной фрагментации, сопровождающей формирование такого агрегата. Некоторые вопросы строения и динамической эволюции иерархических звездных систем ранее обсуждались [9, 2, 3]. В этой статье мы рассмотрим фрактальные свойства идеальных (но возможных с точки зрения галактической звездной динамики) иерархических звездных скоплений.

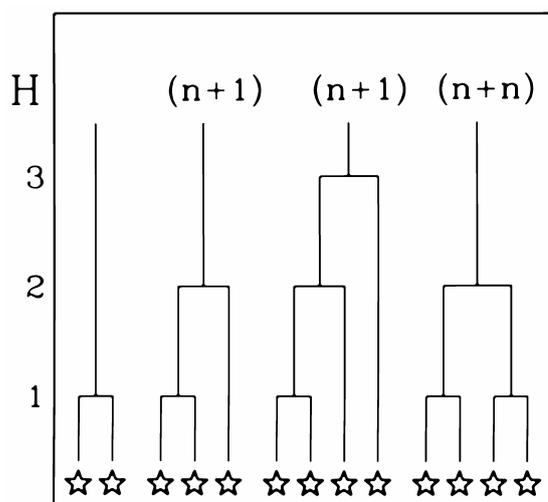
### 1. ИЕРАРХИЧЕСКОЕ ЗВЕЗДНОЕ СКОПЛЕНИЕ

Примеры малонаселенных иерархических систем дают кратные звезды типа  $\epsilon$  Луг, состоящей из двух сравнительно тесных звездных пар, разделенных значительным расстоянием. Такие системы в динамическом смысле устойчивы и не подвержены диссипации, как это имеет место у хаотических систем типа рассеянных или шаровых звездных скоплений. Но если это так, то почему в наших каталогах значительно богаче представлены хаотические системы (С-системы от chaotic), чем иерархические (Н-системы, от *hierarchical*)? Ответ, казалось бы, очевиден: С-системы формируются чаще, чем Н-системы, поскольку природе проще производить бесструктурное скопление звезд, чем сложноорганизованную в сложном диапазоне масштабов звездную группу. Однако можно привести немало примеров, когда в природе преимущественно формируются высокоупорядоченные (и, как следствие, устойчивые) системы

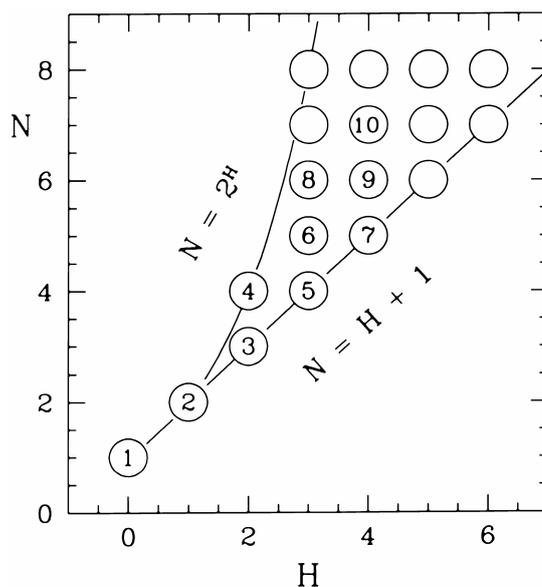
– вспомним кристаллы, вихревые дорожки, автоколебательные системы и т.п. Поэтому вопрос о возможности формирования и об эволюции  $N$ -скоплений требует более внимательного исследования.

Одним из способов выяснить возможность формирования  $N$ -систем в “естественных условиях” является сравнение их структурных характеристик со свойствами родительских молекулярных облаков. В частности, сравнение их фрактальных размерностей, разумеется, если оба класса объектов обладают фрактальной структурой. Относительно молекулярных облаков, в которых формируются звезды, и даже относительно межзвездной среды в целом этот вопрос решен положительно [8, 5]. Поэтому нам остается выяснить фрактальные свойства и размерность звездных  $N$ -систем. Мы сделаем это, теоретически построив  $N$ -системы двух предельных типов – “плотные” и “рыхлые”.

$N$ -система характеризуется количеством входящих в нее звезд ( $N$ ) и максимальным уровнем иерархии в их объединении ( $H$ ). Связь между этими параметрами зависит от типа “упаковки” звезд, который может варьироваться от предельно плотного до предельно рыхлого. Первый из них можно назвать по методу построения типом  $\{n+n\}$ , поскольку переход на более высокий уровень иерархии происходит путем зеркального удвоения системы предыдущего уровня (пример –  $\epsilon$  Lyr). А наиболее рыхлую упаковку назовем системой типа  $\{n+1\}$ , поскольку каждый следующий уровень иерархии образуется добавлением в систему одной звезды. Структурные диаграммы простейших  $N$ -скоплений (рис.1) демонстрируют, что разделение  $N$ -систем на указанные два типа скоплений при переходе от  $N=2$  к  $N=4$ . При  $N \geq 4$  количество звезд в системе и иерархичностью  $H$  заключено в пределах от  $N=H+1$  для систем типа  $\{n+1\}$  до  $N=2^H$  для систем типа  $\{n=n\}$  (рис.2). Разумеется, помимо  $N$ -систем указанных предельных типов возможно существование и  $N$ -систем смешанного типа, что демонстрирует, например, кратная звезда  $\nu$  Sco (рис.3), содержащая 7 членов, размещенных на четырех уровнях иерархии [13].



**Рис.1.** Структурные диаграммы простейших иерархических звездных систем.  $H$  – уровень иерархии. Начиная с 4-кратных систем возможны два предельных типа упаковки: максимально плотный ( $n+n$ ) и минимально плотный ( $n+1$ ).



**Рис.2.** Диаграмма «кратность–иерархичность» для  $N$ -систем. Здесь  $N$  – число звезд в системе (кратность),  $H$  – степень иерархии системы. Формулы указывают связь между  $N$  и  $H$  для предельных типов упаковки: вверху – для максимально плотной, внизу – для минимально плотной. Примеры систем: 1 – одиночные, 2 – двойные, 3 – тройные, 4 –  $\epsilon$  Lyr, 5 –  $\epsilon$  Boo, 6 –  $\zeta$  Uma+80UMa (система Мицар–Алькор, где сам Мицар – система типа  $\epsilon$  Lyr), 7 – DN UMa, 8 – Кастор, 9 –  $\beta$  Cap, 10 –  $\nu$  Sco.

## 2. ИДЕАЛЬНОЕ Н-СКОПЛЕНИЕ

Идеальным мы назовем Н-скопление, состоящее из звезд равной массы и обладающее самоподобной структурой: орбиты всех звезд и подсистем имеют одинаковый эксцентриситет ( $e$ ), а их большие полуоси имеют одинаковое соотношение ( $a_{i+1}/a_i = k$ ). Все орбиты считаем лежащими в одной плоскости, а размером системы из  $N$  звезд ( $L_N$ ) считаем максимальную разделенность ее крайних членов. Тогда для Н-систем типа  $\{n = n\}$  имеем:

$$L_2 = a(1+e), \quad (1)$$

$$L_4 = a(1+e)(k+1), \quad (2)$$

$$L_8 = a(1+e)(k^2 + k + 1), \quad (3)$$

и в общем виде

$$L_{N\{n+n\}} = a(1+e) \left( \frac{k^{\log_2 N} - 1}{k - 1} \right), \quad (4)$$

где  $a$  – большая полуось двойных систем нижнего уровня иерархии.

Соответственно для Н-систем типа  $\{n + 1\}$  имеем:

$$L_3 = a(1+e) \left( k + \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

$$L_4 = a(1+e) \left( k^2 + \frac{2}{3}k \right), \quad (6)$$

$$L_5 = a(1+e) \left( k^3 + \frac{3}{4}k^2 \right), \quad (7)$$

и в общем виде

$$L_{N\{n+1\}} = a(1+e)k^{N-3} \left( k + \frac{N-2}{N-1} \right). \quad (8)$$

В предыдущей работе [3] мы изучили устойчивость реальных Н-систем во внешнем приливном поле, время их жизни и возможность обнаружения. Теперь рассмотрим их структурные свойства в связи с возможностью формирования таких агрегатов в молекулярных облаках.

## 3. ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ИДЕАЛЬНЫХ Н-СКОПЛЕНИЙ

Согласно Мандельброту [11], фрактальное множество – “это математический объект, чья фрактальная размерность (по Хаусдорфу)  $D_H$  строго больше его топологической размерности  $D_T$ ”. Для распределения конечного множества точек/звезд в трехмерно пространстве топологическая размерность составляет  $D_T = 0$ , а размерность Хаусдорфа-Безиковича, если она существует, заключена в диапазоне  $0 \leq D_H \leq 3$ , причем  $D_H = 3$  для однородного распределения [6].

Легко видеть, что построенные нами идеальные Н-системы из звезд одинаковой массы являются фракталами, т.е. самоподобными системами при больших значениях  $N$ . Их размерность определим как фрактальную размерность кластера  $D_c$ , вычисляя число частиц системы внутри сферы произвольного радиуса:  $N \propto R_C^D$  [4, 8]. В качестве радиуса

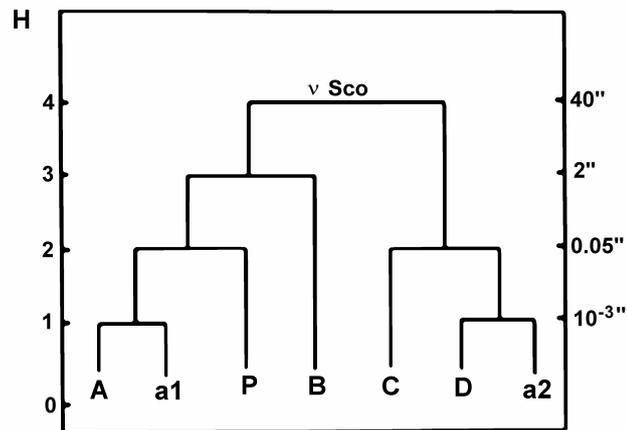


Рис. 3. Структура кратной звезды  $v$  Sco. По вертикальной оси слева указан уровень иерархии ( $H$ ), справа – характерный наблюдаемый масштаб системы на указанном уровне.

системы примем половину ее максимального размера:  $R = L_N / 2$ . Для Н-систем типа  $\{n+n\}$  легко получить при больших  $N$  зависимость

$$L_{N\{n+n\}} \propto k^{\log_2 N} = N^{\log_2 k}$$

Отсюда фрактальная размерность составляет

$$D_{\{n+n\}} = \frac{\log N}{\log L} = \frac{1}{\log_2 k} = \log_k 2. \quad (9)$$

Принимая для устойчивых Н-систем минимальное значение  $k = 8$  [3], найдем, что размерность таких систем  $D_c = 1/3$ . Это максимальное значение  $D$  для долгоживущих Н-систем, и при этом оно весьма мало. Например, у химических и физических систем, управляемых короткодействующими силами (типа Ван-дер-Ваальса) таких малых размерностей не встречается. Очевидно, в нашем случае это связано с дальнедействующим характером гравитационной силы и высокой динамической устойчивостью Н-систем. Уменьшая значение параметра устойчивости  $k$ , можно увеличить  $D$ , но по смыслу построения Н-систем ее значение не превзойдет  $D_{\max} = 1$ .

Системы минимальной населенности типа  $\{n+1\}$  в пределе при  $N \rightarrow \infty$  также становятся фракталами с размерностью  $D_c = 0$ :

$$D_{\{n+1\}} = \frac{\log N}{\log L} = \frac{1}{N} \rightarrow 0 \quad (10)$$

В этом смысле они являются экстремальными объектами.

Таким образом, идеальные Н-скопления являются фракталами с размерностью  $D < 1$ . С физическими фракталами столь низкой размерности ранее мы не были знакомы. Однако математические объекты с подобными свойствами хорошо известны: например, это триадное канторовское множество, фрактальная размерность которого  $D$ , совпадающая с его размерностью подобия  $D_S$  и размерностью кластера  $D_c$ , заключена в пределах  $0 < D < 1$  [4].

Среди реальных звездных систем ранее фракталы обнаруживались на внегалактических масштабах: в диапазоне размеров 0.1–100 Мпк этими свойствами обладает распределение галактик и их скоплений [1]. Однако его фрактальная размерность все же довольно высока ( $D \approx 1.2$ ), что указывает на небольшой динамический возраст Вселенной в этих масштабах. Можно сказать, что скопления и сверхскопления галактик еще не испытали естественного отбора на динамическую устойчивость. Иерархия их пространственного распределения вероятно сложилась в эпоху газодинамических эффектов.

#### 4. Н-СКОПЛЕНИЯ И МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ОБЛАКА

Исследование межзвездной среды (МЗС) с различных точек зрения указывает на ее фрактальные свойства, проявляющиеся во всех ее компонентах: горячей, теплой и холодной. В данной работе нас интересует молекулярная (протозвездная) составляющая МЗС, традиционно описываемая как ансамбль молекулярных облаков. Изучение их геометрических особенностей показывает, что границы облаков в проекции на небо имеют фрактальные свойства с размерностью  $\sim 1.3$  (см. [7]). Другими индикаторами их фрактальной структуры служат зависимость “масса–размер”, а также функция распределения масс и размеров ансамбля облаков. В совокупности для диапазона масс молекулярных облаков от  $10^{-2}$  до  $10^7 M_\odot$  они дают объемную фрактальную размерность  $D \approx 2.3$  [8]. Это значение достаточно хорошо согласуется с данными других авторов:  $D = 2.35 \div 2.40$  [12] и  $D = 2.5$  [10].

Как видим, значение фрактальной размерности идеальных звездных Н-скоплений находится весьма далеко от фрактальной размерности реальных межзвездных молекулярных облаков. Это должно служить заметным препятствием для формирования иерархических звездных скоплений и, возможно, является одним из факторов их низкой распространенности.

Автор признателен Ю.А. Данилову за дружеское участие, Х. Циммерману (Dr. Helmut Zimmermann, Univ. Sternwarte, Jena, Germany) за плодотворные дискуссии и А.А. Токовину за возможность пользоваться “Каталогом кратных звезд” до его опубликования.

1. *Луккин Ф.* Кластеризация во Вселенной // Фракталы в физике. Под ред. Л.Пьетронеро и Э.Тозатти. – М.: Мир, 1988. – С.464.
2. *Сурдин В.Г.* О количестве звезд в кратных системах типа  $\epsilon$  Лут // Астрон. цирк. – 1988. – № 1528. – С.17.
3. *Сурдин В.Г.* Иерархические звездные скопления максимальной населенности // Вестник МГУ, Серия: Физика, астрономия. – 1997. – № 1. – С.63–66.
4. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – С.40.
5. *Berkhuijsen E.M.* The volume filling factor of the WIM // The Local Bubble and Beyond. Eds. Breitschwerdt D., Freyberg M.J., Trümper J. Berlin: Springer. 1988. P.301–304.
6. *Borgani S., Plionis M., Valdarnini R.* Multifractal analysis of cluster distribution on two dimensions // Astrophys. J. – 1993. – 404. – P.21–37.
7. *Elmegreen B.G.* Intercloud structure in a turbulent fractal interstellar medium // Astrophys. J. – 1997. – 477. – P.196–203.
8. *Elmegreen B.G., Falgarone E.* Fractal origin for the mass spectrum of interstellar clouds // Astrophys. J. – 1996. – 471. – P.816–821.
9. *Evans D.S.* Stars of higher multiplicity // Quart. J. Roy. Astron. Soc. – 1968. – 9. – P.388–400.
10. *Fleck R.C.* Scaling relations for the turbulent, non-self-gravitating, neutral component of the fractal interstellar medium // Astrophys. J. – 1996. – 458. – P.739–741.
11. *Mandelbrot B.B.* The Fractal geometry of Nature. – San Francisco: Freeman. 1982. – P.388–400.
12. *Perdang J.M.* Geometry and dynamics of fractal sets // Applying Fractals in Astronomy. Eds Heck A., Perdang J.M. Berlin: Springer-Verlag. 1991. – P.1–41.
13. *Tokovinin A.A.* MSC – a catalogue of physical multiple stars // Astron. Astrophys. Suppl. Series. – 1997.–124.– P.75–84.

Поступила в редакцию 15.09.2000