Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

Том 1 • № 1 • 2000 С. 82 – 85

УДК 521; 528

Про густину самогравітуючих дисків, зовнішні потенціали яких співпадають з гравітаційними потенціалами еліпсоїдів обертання

О.В. Завізіон

Уманський педагогічний університет, Україна

Космічні тіла відповідають стану відносної рівноваги і можуть мати еліпсоїдальну форму. Для знаходження їх зовнішніх гравітаційних потенціалів застосовують різні моделі. Однією з таких моделей є система самогравітуючих дисків. Суть її полягає у знаходженні густини кругового диска, потенціал якого в зовнішньому просторі відповідає потенціалу еліпсоїда обертання. В даному випадку ми маємо специфічну обернену гравітаційну задачу, яку розв'язують, використовуючи теорію моментів. В роботі знайдено дійсний розв'язок для стиснених та уявний для видовжених еліпсоїдів.

О ПЛОТНОСТИ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ ДИСКОВ, ВНЕШНИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ ЕЛЛИПСОИДОВ ВРАЩЕНИЯ, Завизион О.В. – Космические тела соответствуют состоянию относительного равновесия и могут иметь эллипсоидальную форму. Для нахождения их внешних гравитационных потенциалов применяют различные модели. Одной из таких моделей есть система самогравитирующих дисков. Суть её в нахождении плотности кругового диска, потенциал которого во внешнем пространстве соответствует потенциалу эллипсоида вращения. В данном случае мы имеем специфическую обратную гравитационную задачу, которая решается, используя теорию моментов. В работе найдены действительное решение для сжатых и мнимое для вытянутых эллипсоидов.

ON THE DENSITY OF SELF-GRAVITING DISKS HAVING EXTERNAL POTENTIALS WHICH COINCIDE WITH GRAVITATIONAL POTENTIALS OF ELLIPSOIDS OF REVOLUTION, by Zavizion O.V. – Cosmic bodies conform to the state of relative equilibrium and can have ellipsoidal form. Various models are used for estimation their external gravitational potentials. Some model is a system of self-gravitating disks. Its necessary to determine density of the circular disk having external potential which coincides with the gravitational potential of ellipsoid of revolution. In this case we have specific inverse gravitational problem which can be solved using theory of moments. The real solution for oblate ellipsoids and the imaginary solution for prolate ellipsoids are found.

Існує багато форм описання гравітаційного потенціалу небесних тіл. Ефективним методом описання є метод апроксимації зовнішнього гравітаційного потенціалу планет зовнішнім гравітаційним потенціалом диска, який розташований в площині перпендикулярній вісі обертання планети, при умові суміщення центрів мас планети і диска. Іншими словами, даний метод відображує задання об'ємного потенціалу планети потенціалом неоднорідного плоского диска певного радіуса:

$$G \cdot \iiint\limits_V \frac{\rho(Q_1)}{l_{PQ_1}} \cdot dv_{Q_1} = G \cdot \iint\limits_S \frac{\sigma(Q_2)}{l_{PQ_2}} \cdot ds_{Q_2}\,, \tag{1}$$

в лівій частині рівняння (1) маємо об'ємний зовнішній гравітаційний потенціал планети, в правій – потенціал диска; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot с^2}$ – гравітаційна стала; Q_1 – точка, до якої віднесені елемент об'єму dv і густина ρ планети; Q_2 – точка, до якої віднесені елемент площі ds і густина σ диска; P – точка, в якій визначається гравітаційний потенціал; l_{PQ_1} і l_{PQ_2} – відстані між відповідними точками; V – об'єм, обмежений поверхнею планети; S – площа замінюючого диска.

Таким чином, перед нами поставлена обернена гравітаційна задача, яка буде полягати в визначенні густини $\sigma(Q_2)$ і розмірів диска, якщо вважати відомою величину зовнішнього гравітаційного потенціалу.

ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ЕЛІПСОДІВ ОБЕРТАННЯ

Одним із методів розв'язку поставленої задачі є метод моментів, який полягає в рівності мас і гравітаційних моментів планет і диска. Для вісесиметричного тіла згідно даного метода отримаємо наступну систему рівнянь [3]:

$$2 \cdot \pi \cdot P_{2n}(0) \cdot \int\limits_0^{R_x} \sigma(R') \cdot R'^{(2n+1)} \cdot dR' = \iiint\limits_{V} \rho(r') \cdot r'^{2n} \cdot P_{2n}(\cos\theta') \cdot dv', \quad n = 0 \ldots \infty, \tag{2}$$

де $P_{2n}(\cos\theta) = P_{2n}(t) = \frac{1}{4^n \cdot (2n)!} \cdot \frac{d^{2n}}{dt^{2n}}\left(t^2 - 1\right)^{2n}$ – парні поліноми Лежандра чи сферичні функції першого роду;

$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ – аргумент полінома Лежандра

Визначимо умови розв'язку системи (2) для еліпсоїда обертання:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$R(z) = a \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Перші чотири рівняння системи мають загальний вигляд:

$$\begin{cases} R_x^2 = k_1 \\ R_x^4 = k_2 \cdot (a^2 - A \cdot c^2) \\ R_x^6 = k_3 \cdot (a^4 - B \cdot a^2 \cdot c^2 - D \cdot c^4) \\ R_x^8 = k_4 \cdot (a^6 - E \cdot a^4 \cdot c^2 - F \cdot a^2 \cdot c^4 - K \cdot c^6) \end{cases}, \tag{3}$$

де k_1, k_2, k_3, k_4, A, B, D, E, F, K – сталі, величини яких залежать від характеру функцій $\sigma(R')$, $\rho(r')$, фігури тіла та меж інтегрування.

Система рівнянь (3) може мати розв'язок лише при умові:

$$\begin{cases}(a^2 - A\cdot c^2)^2 = a^4 - B\cdot a^2\cdot c^2 + c^4 \\ (a^2 - A\cdot c^2)^3 = a^6 - E\cdot a^4\cdot c^2 + F\cdot a^2\cdot c^4 - K\cdot c^6\end{cases}, \tag{4}$$

чи

$$B = 2\cdot A, D = A^2, E = 3\cdot A, F = 3\cdot A^2, K = A^3. \tag{4*}$$

Точний розв'язок оберненої задачі можливий лише в випадку, коли поверхня еліпсоїда є еквіпотенціальною поверхнею, тобто розподіл мас у еліпсоїда повинен зберігати гомологічну стратифікацію. Таким розподілом густини може бути закон:

$$\rho(R,z) = \rho_0\left(\alpha + \beta\left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right),\ \alpha \ge 0,\ \alpha + \beta \ge 0$$

Крім того, коефіцієнт A буде дорівнювати одиниці ($A=1$). Тоді з системи (3) робимо однозначний висновок про розмір диска:

$$R_x^2 = a^2 - c^2, \tag{5}$$

тобто умова дійсності радіуса диска R_x і розв'язку задачі:

$$a > c, \tag{6}$$

іншими словами, дійсний розв'язок можливий тільки для стиснених еліпсоїдів обертання, для видовжених отримаємо уявний розв'язок.

Розв'яжемо систему (2) відносно $\sigma(R')$, враховуючи результат (5), для

- однорідного:
  1) $\rho = \rho_0 = const$;
- неоднорідних софокусних:
  2) $\rho(R,z) = \rho_0\cdot\left(1 - \frac{R^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$;
  3) $\rho(R,z) = \rho_0\cdot\left(1 + \frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$;
  4) $\rho(R,z) = \rho_0\cdot\left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$;

  еліпсоїдів обертання.

Отримаємо однозначний точний розв'язок:

1) $$\sigma(R) = \frac{2\cdot a^2 c\cdot\rho_0}{a^2 - c^2}\cdot\sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2 - c^2}}, \tag{7.1}$$

про подібний розв'язок, отриманий ще Ріманом, згадується в роботі Мещерякова Г.О. [5];

2) $$\sigma(R) = \frac{4\cdot a^2 c\cdot\rho_0}{3\cdot(a^2 - c^2)}\cdot\left(1 - \frac{R^2}{a^2 - c^2}\right)^{\frac{3}{2}}; \tag{7.2}$$

3) $$\sigma(R) = \frac{4\cdot a^2 c\cdot\rho_0}{3\cdot(a^2 - c^2)}\cdot\left(2 + \frac{R^2}{a^2 - c^2}\right)\cdot\sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2 - c^2}}; \tag{7.3}$$

4) $$\sigma(R) = \frac{2\cdot a^2 c\cdot\rho_0}{3\cdot(a^2 - c^2)}\cdot\left(1 + \frac{2\cdot R^2}{a^2 - c^2}\right)\cdot\sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2 - c^2}}. \tag{7.4}$$

ВИСНОВКИ

- Точний аналітичний розв'язок оберненої гравітаційної задачі можливий тільки для еліпсоїдів обертання, поверхні яких є еквіпотенціальними.
- Дійсний розв'язок можливий лише для стиснених еліпсоїдів ($a>c$).

Еліпсоїд обертання – це найпростіша і найпоширеніша математична модель. Якщо розглядати планету як еліпсоїд обертання, який можна розділити на систему шарів еліпсоїдальної форми, що відповідає вище вказаним висновкам, то в такому випадку зовнішній гравітаційний потенціал планети можна точно описати зовнішнім гравітаційним потенціалом неоднорідного кругового диска, або системи неоднорідних дисків.

1. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М.: Наука, 1988. – 272 с.
2. *Ахиезер Н., Крейн М.* О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: ДНТВУ, 1938. – 256 с.
3. *Дубошин Г.Н.* Теория притяжения. – М.: Физматгиз, 1961. – 288 с.
4. *Машимов М.М.* Планетарные теории геодезии. – М.: Недра, 1982.– 261 с.
5. *Мещеряков Г.А.* Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. – М.: Наука, 1991. – 216 с.
6. *Мориц Г.* Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. – К., 1994. – 240 с.

Надійшла до редакції 02.07.99