Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

Том 1 • № 1 • 2000 С. 74 – 78

УДК 539.2; 538.13

Пример аналогии между взаимодействием неоднородных распределений намагниченности в ферромагнетике и гравитационным взаимодействием.

О.Ю. Горобец

Институт Магнетизма НАНУ Украины

Найдено медленно убывающее с расстоянием локализованное неоднородное распределение намагниченности ферромагнетика. Учтены инварианты более высокого порядка при записи обменной энергии ферромагнетика. Показано, что потенциал взаимодействия двух таких распределений пропорционален $1/r$ *, как и потенциал гравитационного и электростатического взаимодействия*

ПРИКЛАД АНАЛОГІЇ МІЖ ВЗАЄМОДІЄЮ НЕОДНОРІДНИХ РОЗПОДІЛІВ НАМАГНІЧЕНОСТІ У ФЕРОМАГНЕТИКУ І ГРАВІТАЦІЙНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ . Горобець О.Ю. – Знайдено повільно спадаючий з відстанню локалізований неоднорідний розподіл намагніченості феромагнетика. Враховано інваріанти більш високого порядку при записі обмінної енергії феромагнетика. Показано, що потенціал взаємодії двох таких розподілів пропорційний $1/r$ *, як і потенціал гравітаційної та електростатичної взаємодії.*

THE EXAMPLE OF ANALOGY BETWEEN THE INTERACTION OF NON-HOMOGENEOUS DISTRIBUTIONS OF MAGNETIZATION OF FERROMAGNETIC AND THE GRAVITATIONAL INTERACTION, by Gorobets O.Yu. – The slowly decreasing with distance localized non-homogeneous distributions of magnetization of ferromagnetic are found in the paper. The exchange energy of the ferromagnetic includes more invariants than it includes usually. It is shown that the potential energy of interaction of two such distributions is proportional to $1/r$*, just like the potential energy of gravitational and electrostatic interaction.*

В настоящее время большой интерес и внимание физиков, работающих в самых различных разделах физики, и математиков вызывают работы, посвященные солитонам, а также нелинейным явлениям [1–3]. Кроме того, во многих работах описаны интересные аналогии и связи между такими разделами физики, как физика твердого тела и физика элементарных частиц, и другими областями физической науки [4–5]. В частности отмечена аналогия между взаимодействием неоднородных распределений намагниченности, возникающих на дефектах кристаллической структуры, и гравитационным взаимодействием [6]. Кроме того, в [6, 7] найдено локализованное распределение намагниченности в окрестности магнитного ефекта в ферромагнетике с анизотропией типа "легкая плоскость". Такое неоднородное распределение намагниченности характеризуется тем, что оно стремится к однородному при удалении от дефекта на бесконечность. В [3] вычислена энергия взаимодействия двух таких неоднородных распределений намагниченности (когда два дефекта находятся на расстоянии r друг от друга), которая имеет вид $U = \frac{C \cdot \phi_{01}\phi_{02}}{|r|}$, где С – коэффициент пропорциональности, ϕ_{01}, ϕ_{02} – граничные условия на первом и втором дефектах, которые играют роль аналогичную массам при гравитационном взаимодействии и зарядам при электростатическом. Но распределение намагниченности типа [6] не является солитоном в общепринятом смысле слова, т.к. неограниченное возрастание азимутального угла вектора намагниченности $\vec{M}$ при $|\vec{r}| \to 0$ делает необходимым введение дефекта в нуле. В данной работе предложена модель, позволяющая получить статическое медленное убывающее с расстоянием трехмерное локализованное ограниченное во всех точках координатного пространства и гладкое решение уравнения Ландау–Лифшица в легкоплоскостном ферромагнетике. При этом распределение намагниченности, полученное в данной работе, переходит в решение [6] при $|\vec{r}| \to \infty$.

Запишем энергию ферромагнетика E в обменном приближении, считая, что характерные размеры неоднородного распределения намагниченности малы и, следовательно, магнитостатику можно не учитывать:

$$E = \int\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\beta}{2}\left(\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2 - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_i}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_j}\right)^2 + \tau\left(\frac{\partial^3\vec{M}}{\partial x_i^3}\right)^2\right\}dV + \delta\int M_Z^2 dV \tag{1}$$

Здесь: α, β, τ, γ – обменные постоянные, δ – постоянная анизотропии типа легкая плоскость.

В отличие от [6], в (1) включены по аналогии с работой [8] инварианты более высокого порядка, чем стандартный вид энергии ферромагнетика в обменном приближении. Как правило [8], по порядку величины для обменных постоянных при старших инвариантах справедливы следующие оценки:

$$\beta \approx \alpha c^2;\ \gamma \approx \alpha c^2;\ \tau \approx \alpha\cdot c^4$$

Считая легкоплоскостную анизотропию достаточно сильной, введем следующую параметризацию:

$$\begin{cases} M_x = M_0\cos\varphi \\ M_y = M_0\sin\varphi \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где M_0 – величина намагниченности; φ – угол между $\vec{M}$ и осью ОХ.

Тогда из (1) с учетом (2) можно получить:

$$\begin{aligned} E = \frac{M_0^2}{2}\int dV\Bigg\{&\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \beta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}\right)^2 - \chi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 + \tau\Bigg(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^6 + \\ &+ 9\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_i^3}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_i^3}\Bigg)\Bigg\} \end{aligned} \tag{3}$$

где $\chi = -\beta + \gamma M_0^2$

Из условия экстремума энергии $\delta E = 0$ следует:

$$\alpha\Delta\varphi - \beta\Delta(\Delta\varphi) = \hat{L}\varphi,$$

где

$$\hat{L} = 2\chi\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right] - 3\tau\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^5\right] - \tau\frac{\partial^6}{\partial x_i^6} - 9\tau\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right)^2\right] + 9\tau\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\right] + 3\tau\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_i^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\right] + \tau\frac{\partial^3}{\partial x_i^3}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^3\right] \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) методом последовательных приближений в виде:

$$\varphi = \varphi_0(r) + \varphi_1 \quad (5)$$

где

$$\alpha\Delta\varphi_0 - \beta\Delta(\Delta\varphi_0) = 0 \quad (6)$$

В общем виде ограниченное радиально-симметричное решение уравнения (6), обращающееся в ноль на бесконечности имеет вид:

$$\varphi_0 = \frac{A}{r}\left(1 - e^{-\lambda r}\right) \quad (7)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, A – константа, имеющая смысл характерного масштаба распределения.

Нетрудно заметить что решение (7) асимптотически ведет себя при $r \to \infty$, как и решение $\varphi_0 = \frac{C}{r}$ из работы [6], но распределение намагниченности (7) не имеет особенности в нуле. Ввиду того, что на больших расстояниях решение (7) ведет себя, как и решение из работы [6], то формула $U = \frac{C \cdot \phi_{01}\phi_{02}}{|r|}$ из [6] описывает взаимодействие неоднородных распределений типа (7) на больших расстояниях. Но в такой модели постоянные ϕ_{01}, ϕ_{02} не являются граничными условиями, их можно оценить, исходя из значений обменных постоянных (т. е. свойств ферромагнетика).

Для поправки к нулевому приближению φ_1 справедливо уравнение:

$$\alpha\Delta\varphi_1 - \beta\Delta(\Delta\varphi_1) = \hat{L}\varphi_0 \quad (8)$$

Как известно, решение этого уравнения существует тогда и только тогда, когда решение однородного уравнения ортогонально правой части. Отсюда следует

$$\int \varphi_0\hat{L}\varphi_0 dV = 0 \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой искомое уравнение для определения константы A. После несложных преобразований из (9) можно получить:

$$S_1A^4 - S_2A^2 + S_3 = 0 \quad (10)$$

где

$$S_1 = \iiint 3\tau\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\rho_i}\right)^5\right]\cdot\lambda^4\cdot\Phi_0 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3$$

$$S_2 = \iiint \Phi_0 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \left\{ 2\chi \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left[\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_i}\right)^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_i}\right] - 9\tau \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_i}\cdot\left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_i^2}\right)^2\right]\cdot\lambda^2 + \right.$$

$$\left. +9\tau\cdot\lambda^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial \rho_i^2}\left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_i^2}\cdot\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_i}\right)^2\right] + 3\tau\frac{\partial}{\partial \rho_i}\left[\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \rho_i^3}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_i}\right)^2\right]\cdot\lambda^2 + \tau\frac{\partial^3}{\partial \rho_i^3}\left[\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_i}\right)^3\right]\cdot\lambda^2 \right\}$$

$$S_3 = \iiint \tau \Phi_0 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{\partial^6 \Phi_0}{\partial \rho_i^6}$$

Здесь $\Phi_0(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}\cdot\left(1 - \exp(-\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2})\right)$, ρ_1, ρ_2, ρ_3 – безразмерные переменные интегрирования

Из (10) можно получить два возможных значения A:

$$A_{12} = \sqrt{\frac{S_2^2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4S_1S_2}}{2S_1}} \tag{11}$$

Так как вычисление соответствующих интегралов в S_1, S_2, S_3 представляется довольно громоздким, оценим A_{12} по порядку величины. Для этого положим

$$\begin{cases} S_1 = I\tau\lambda^4 \\ S_2 = K_1\chi + K_2\tau\lambda^2 \\ S_3 = M\tau \end{cases} \tag{12}$$

где I, K_1, K_2, M – безразмерные числа. Допуская, что по порядку величины $I \approx K_1 \approx K_2 \approx M$ имеем:

$$A_{12} = \sqrt{\frac{\chi + \tau\lambda^2 \pm \sqrt{\chi^2 + 2\chi\tau\lambda^2}}{2\tau\lambda^4}} \tag{13}$$

$A_1 \approx 10^{-6} - 10^{-7}\,см$; $A_2 \approx 10^{-8}\,см$ для значений параметров χ, τ, для которых справедливы оценки – $\beta \approx \alpha c^2$; $\gamma \approx \alpha c^2$; $\tau \approx \alpha \cdot c^4$.

Проще всего понять физический смысл полученного результата, минимизируя энергию методом Ритца на классе функций $\varphi = \dfrac{A}{r}\left(1 - e^{-\lambda r}\right)$ для нахождения A.

Значению параметра A_2 соответствует максимум энергии, A_1 – минимум. Однородному состоянию $A = 0$ также соотвествует минимум энергии.

Т.е. состояние с распределением намагниченности (7) на данном классе функций является квазистабильным при некоторых диапазонах изменения параметров χ, τ и это состояние отделено от однородного энергетическим барьером. В результате данной работы показано, что учет в обменной энергии ферромагнетика, кроме инварианта, содержащего первые производные намагниченности в квадрате, также инвариантов, содержащих вторые производные намагниченности в квадрате, первые производные в четвертой степени и третьи производные в квадрате, позволяет получить локализованные неоднородные распределения намагниченности, которые взаимодействуют на больших расстояниях с потенциалом типа

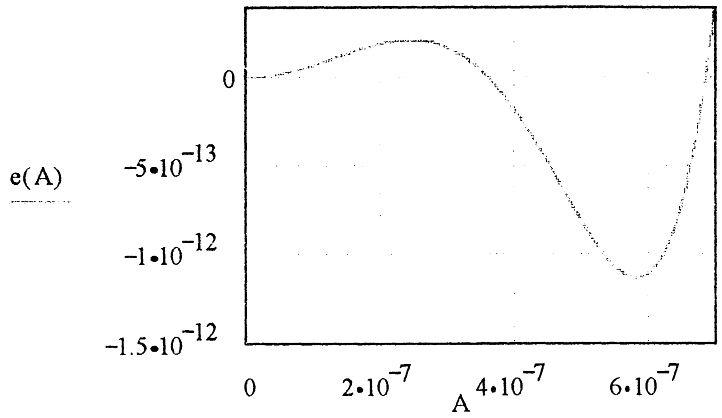

Рис.1 Схематический график зависимости e(A)

$U = \dfrac{C \cdot \phi_{01}\phi_{02}}{|r|}$ из [4]. Этот результат можно интерпретировать следующим образом: полученные возмущения неоднородного состояния ферромагнетика ведут себя как «частицы», обладающие «массами» (или «зарядами») при взаимодействии друг с другом. Причем учет старших инвариантов позволяет «убрать» расходимость таких решений в нуле, и следовательно показана принципиальная возможность возникновения таких распределений намагниченности естественным образом, исходя из значения обменных постоянных ферромагнетика, без введения магнитных дефектов, а следовательно и «искусственных» граничных условий на поверхности магнитного дефекта. Хотя вопрос устойчивости подобных распределений намагниченности на более широком классе функций, чем $\varphi = \dfrac{A}{r}\left(1 - e^{-\lambda r}\right)$, требует дальнейшего исследования.

1. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны немагниченности. Динамические и топологические солитоны. – К.: Наукова думка, 1983. – 190 с.
2. Современные проблемы теории магнетизма // Сб. науч. трудов. – К.: Наукова думка, 1986. – 168 с.
3. *Иванов Б.А.* Локальные моды и рассеяние спиновых волн в изотропном ферромагнетике // Письма в ЖЭТФ, № 11, 1992, с. 898–902
4. *Фомин П.И.* О кристаллоподобной структуре физического вакуума на планковских расстояниях // Сб. науч. тр. Проблемы физической кинетики и физики твердого тела. – К.: Наукова думка, 1990.
5. *Кройц М.* Кварки, глюоны и их решетки. – М.: Мир, 1987.
6. *Горобець О.Ю.* Розподіл намагніченості в околі точкового дефекту в феромагнетику // Український фізичний журнал. Т.42, № 6, 1997
7. *Горобец О.Ю.* Distribution of magnetization of the easy plane ferromagnetic and antiferromagnetic that include point magnetic defects // Вестник Донецкого госуниверситета, № 1, 1999.
8. *Хуберт А.* Теория доменных стенок в упорядоченных средах. – М: Мир, 1977. – 306 с.

Поступила в редакцию 01.06.99