Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

Том 1 • № 1 • 2000 С. 64 – 68

УДК 530.12; 531.51

# Квазистационарные состояния квантовой Вселенной со скалярным полем и излучением

**В.В. Кузьмичев**

Институт теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова Национальной Академии наук Украины

*Рассматривается квантовая модель Вселенной Фридмана, заполненной скалярным полем и излучением. Излучение используется для задания системы отсчета, позволяющей устранить неоднозначность в выборе временной координаты. Показано, что квантовая Вселенная, у которой изменения потенциала скалярного поля малы по сравнению с его абсолютной величиной, может находиться в квазистационарных состояниях. В такой Вселенной проблема сингулярности не возникает, и она может эволюционировать в добарьерной области с малой вероятностью протуннелировать за барьер.*

*КВАЗІСТАЦІОНАРНІ СТАНИ КВАНТОВИМ ВСЕСВІТОМ З СКАЛЯРНИМ ПОЛЕМ І ВИПРОМІНЮВАННЯМ, Кузьмічов В.В. – Розглядається квантова модель Всесвіту Фрідмана, заповненого скалярним полем і випромінюванням. Випромінювання використовується для задання системи відліку, що дозволяє усунути неоднозначність у виборі часової координати. Показано, що квантовий Всесвіт, у якого зміни потенціалу скалярного поля малі в порівнянні з його абсолютною величиною, може знаходитися в квазістаціонарних станах. У такого Всесвіту проблема сингулярності не виникає, і вона може еволюціонувати в добар'єрній області з малою можливістю протунелювати за бар'єр.*

*QUASISTATIONARY STATES OF THE QUANTUM UNIVERSE FILLED WITH THE SCALAR FIELD AND RADIATION, by Kuzmichev V.V. – Quantum model of the Friedmann universe filled with the scalar field and radiation is considered. The radiation is used to define a reference frame allowing to remove an ambiguity concerning the choice of time coordinate. It is shown that if the rate of change of scalar field is small in comparison with its absolute value the quantum universe can be found in quasistationary states. In such universe the singularity problem does not arise and it can evolve in the region before the barrier with small probability of tunneling through the barrier.*

Приложение квантово-механических принципов к теории гравитации сталкивается с принципиальными трудностями, которые имеют модельно-независимый характер. Они связаны с общей проблемой выделения действительных динамических степеней свободы в ОТО. Принято считать, что главной причиной такого рода трудностей является отсутствие априори способа определения пространственно-временных событий в общековариантной теории [6]. Например, для однородного, изотропного и замкнутого мира они отражены в неопределенности в выборе временной координаты. Для однозначного выбора временной координаты теорию следует дополнить координатным условием.

Рассмотрим для конкретности однородную, изотропную и замкнутую Вселенную с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера. Предположим, что Вселенная изначально заполнена скалярным полем $\phi$ с некоторым потенциалом $V(\phi)$, который в ранней Вселенной представляет собой достаточно медленно меняющуюся функцию $\phi$ и определяет плотность энергии вакуума, обеспечивающую хаббловское расширение. Зададим систему отсчета с помощью дополнительного материального источника, и введем его в систему с помощью координатного условия, записанного в параметрическом виде [3, 4]

$$g^{00}(dT/d\eta)^2 = 1/a^2, \tag{1}$$

где $T$ – привилегированная временная координата, которая зависит от произвольного параметра $\eta$, связанного с синхронным собственным временем $t$ соотношением $dt = N(\eta)\,a\,d\eta$, здесь $N(\eta)$ – функция, которая задает масштаб отсчета времени, $a$ – масштабный фактор, который определяет кривизну пространства. Присоединим условие (1) к действию, записанному в канонической форме, с помощью множителя Лагранжа $P$. Ограничиваясь минимальной связью между геометрией и скалярным полем и варьируя новое действие, придем к уравнению связи

$$\frac{1}{2}\left(-\pi_a^2 + \frac{2}{a^2}\pi_\phi^2 - a^2 + a^4 V(\phi)\right) + P = 0, \tag{2}$$

где $\pi_a$ и $\pi_\phi$ – импульсы, канонически сопряженные переменным $a$ и $\phi$.

Каноническое уравнение

$$dP/d\eta = [P, \mathrm{H}] = 0,$$

где

$$\mathrm{H} = N\left[P + \frac{1}{2}\left(-\pi_a^2 + \frac{2}{a^2}\pi_\phi^2 - a^2 + a^4 V(\phi)\right)\right]$$

– гамильтониан, легко интегрируется: $P = E/2$, где $E$ – константа. Выписав полную систему уравнений, найдем, что $E$ связано с тензором энергии-импульса $\widetilde{T}^\alpha_\beta$ излучения [3]: $\widetilde{T}^0_0 = E/a^4$, $\widetilde{T}^1_1 = \widetilde{T}^2_2 = \widetilde{T}^3_3 = -E/3a^4$ и $\widetilde{T}^\alpha_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Это означает, что присоединение координатного условия (1) к действию привело к добавлению в систему источника в виде излучения. Если предположить, что на ранней стадии эволюции Вселенной преобладает релятивистское вещество, то фиксирование системы отсчета с помощью условия (1) представляется физически оправданным.

В квантовой теории уравнение связи (2) становится условием на волновую функцию $\Psi(a, \phi, T)$, которая описывает Вселенную, заполненную скалярным полем и излучением. Заменяя канонические переменные соответствующими операторами, получим уравнение типа Шредингера в искривленном пространстве

$$2i\,\partial_T\Psi = \left(\partial_a^2 - \frac{2}{a^2}\partial_\phi^2 - U\right)\Psi, \tag{3}$$

где $U = a^2 - a^4 V(\phi)$ играет роль потенциала. Можно ввести положительно определенное скалярное произведение $\langle\Psi|\Psi\rangle < \infty$, определить пространство физических состояний как гильбертово и построить квантовую механику для данной модели Вселенной.

Общее решение уравнения (3) можно представить в виде

$$\Psi(a,\phi;T) = \int_0^\infty dE\, e^{\frac{i}{2}ET}\, C(E)\, \psi_E(a,\phi),$$

где $C(E)$ характеризует распределение по $E$ состояния Вселенной в момент времени $T = 0$, а $\psi_E(a,\phi)$ и $E$ – собственные функции и собственные значения уравнения

$$\left(-\partial_a^2 + \frac{2}{a^2}\partial_\phi^2 + U - E\right)\psi_E = 0\,. \tag{4}$$

Возможные решения уравнения (4) определяются свойствами скалярного поля. Рассмотрим Вселенную, у которой поле $\phi$ изменяется со временем $t$ медленно так, что $\left|\partial_t^2\,\phi\right| << \left|dV/d\phi\right|$. Тогда, используя уравнение поля для $\phi$: $T^{\alpha}_{0\,;\alpha} = 0$, найдем, что в этом случае $\frac{2}{a^2}\pi_\phi^2 \approx \frac{a^4}{18}\left(\frac{1}{H}\frac{dV}{d\phi}\right)^2$, где $H = \partial_t a / a$ – постоянная Хаббла, и уравнение (4) сводится к приближенному

$$\left(-\partial_a^2 + \widetilde{U} - \varepsilon\right)\varphi_\varepsilon = 0, \tag{5}$$

где $\widetilde{U} \equiv U - \frac{a^4}{18}\left(\frac{1}{H}\frac{dV}{d\phi}\right)^2$. Оно содержит $\phi$ в качестве параметра. Если $\left|\frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi}\right| << 1$, то с хорошей точностью $E = \varepsilon$. Если $V(\phi)$ является всюду положительно определенной функцией, то по переменной $a$ потенциал $\widetilde{U}$ имеет форму барьера с шириной $\Delta a = a_2(\varepsilon) - a_1(\varepsilon)$, где $a_1(\varepsilon) < a_2(\varepsilon)$ – классические точки поворота, определяемые уравнением $\widetilde{U} = \varepsilon$. В таком потенциале в области $a \le a_1$ стационарные состояния не могут реализоваться. Однако, если $V(\phi) << 1$, то внутри барьера могут существовать квазистационарные состояния со временем жизни больше планковского. Положение $\varepsilon_n$ и ширина $\Gamma_n$ таких состояний определяются решениями уравнения (5) с граничными условиями в форме волны, уходящей в сторону больших $a$.

Выберем значение $R \ge a_2$. Тогда в области $a > R$ решение уравнения (5) можно представить в виде

$$\varphi_\varepsilon(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varphi_\varepsilon^{(-)}(a) - S(\varepsilon)\,\varphi_\varepsilon^{(+)}(a)\right],$$

где $\varphi_\varepsilon^{(-)}$ и $\varphi_\varepsilon^{(+)}$ описывают соответственно «падающую» на барьер (Вселенная сжимается) и «уходящую» (Вселенная расширяется) волны. В ВКБ-приближении, которое применимо для состояний с $\varepsilon << a^4 V$, имеем

$$\varphi_\varepsilon^{(\pm)}(a) = \frac{1}{\sqrt{2}\,(\varepsilon - \widetilde{U})^{1/4}}\exp\left\{\mp i\int_{a_2}^{a}\sqrt{\varepsilon - \widetilde{U}}\,da \pm \frac{i\pi}{4}\right\}.$$

Коэффициент $S(\varepsilon)$ есть аналог матрицы рассеяния [1]. Она имеет вид

$$S(\varepsilon) = e^{2i\delta(\varepsilon)}, \qquad \delta(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) + \delta_{res}(\varepsilon),$$

где $\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{2i}\ln\left[\varphi_\varepsilon^{(-)}(R)/\varphi_\varepsilon^{(+)}(R)\right]$, а $\delta_{res}(\varepsilon) = \arctan\frac{\Gamma_n}{\varepsilon - \varepsilon_n}$ – резонансная часть фазы $\delta(\varepsilon)$. В области $a < R$ волновую функцию $\varphi_\varepsilon$ можно представить как произведение

$$\varphi_\varepsilon = A(\varepsilon)\,\varphi_\varepsilon^{(0)},$$

где $\varphi_\varepsilon^{(0)}$ – нормированное на единицу регулярное в точке $a = 0$ решение на интервале $0 < a < R$, которое слабо зависит от $\varepsilon$, а $A(\varepsilon)$ имеет полюс в комплексной плоскости $\varepsilon$ при $\varepsilon = \varepsilon_n + i\,\Gamma_n$, так что

$$|A(\varepsilon)|^2 \approx \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma_n}{(\varepsilon - \varepsilon_n)^2 + \Gamma_n^{\,2}}.$$

Оценка

$$|\varphi_{\varepsilon_n}(a)|_{a<R} \sim \left(\frac{2}{R\,\Gamma_n}\right)^{1/2} |\varphi_{\varepsilon_n}(a)|_{a>R}$$

показывает, что при $\Gamma_n \ll 1$ волновая функция $\varphi_\varepsilon(a)$ имеет резкий максимум при $\varepsilon = \varepsilon_n$ и сосредоточена в основном в области, ограниченной барьером. Если $\varepsilon \neq \varepsilon_n$, то для максимального значения функции $\varphi_\varepsilon$ справедлива оценка

$$|\varphi_\varepsilon|^2_{\max} \sim \frac{\Gamma_n}{R}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon - \varepsilon_n)^2}|\varphi_\varepsilon|^2_{a=a_0},$$

где $\left.\widetilde{U}\right|_{a=a_0} = 0$. Отсюда следует, что для $\Gamma_n \ll 1$ волновая функция достигает больших значений на границе барьера, а под барьером $\varphi_\varepsilon \sim O(\Gamma_n)$. Параметры $\varepsilon_n$ и $\Gamma_n$ можно найти из уравнений:

$$\int_0^{a_1}\sqrt{\varepsilon_n - \widetilde{U}}\,da = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right), \qquad \Gamma_n \approx \exp\left\{-2\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{\widetilde{U} - \varepsilon_n}\,da\right\}, \qquad \Gamma_n \ll \varepsilon_n$$

Первый уровень с $\varepsilon_0 = 1.3\hbar$ и $\Gamma_0 \approx 0.3/t_p$ появляется при $V = 0.08 = 4.5\times10^{-2}\,m_p^4$, где $t_p$ и $m_p$ – время и масса Планка. Для заданного $\varepsilon_n$, чем меньше величина $a^4 V$, тем больше и шире потенциальный барьер $\widetilde{U}$, и, следовательно, меньше $\Gamma_n$. Для малых значений $\Gamma_n$ в пределах времени распада $\tau = 1/\Gamma_n$ возможностью распада можно пренебречь и состояние $\varphi_\varepsilon^{(0)}$ можно рассматривать как стационарное с определенным значением $\varepsilon_n$.

Изучение инфляционных сценариев эволюции Вселенной показало, что реалистический потенциал $V$ с увеличением времени должен уменьшаться [5]. С уменьшением $V$ число квантовых состояний $(\varepsilon_n, \Gamma_n)$ увеличивается, а вероятность распада экспоненциально уменьшается. Так, при $V = 0.02$ в системе имеется три состояния с параметрами: $\varepsilon_2 = 9.9$, $\Gamma_2 = 3\times10^{-3}$; $\varepsilon_1 = 6.6$, $\Gamma_1 = 10^{-6}$; $\varepsilon_0 = 2.9$, $\Gamma_0 = 7\times10^{-11}$, где $\varepsilon_n$ взяты в единицах $\hbar/2$, а $\Gamma_n$ в $t_p^{-1}$. При $V \leq 0.03$ в системе образуется два и больше состояний, так, что возникает конкуренция между процессами туннелирования за барьер и переходами из одних состояний в другие. Расчеты в приближении двухуровневой Вселенной показывают [3,4], что для времен $\Delta T < 50\, t_p$ переходы преобладают над распадами, при достижении $\Delta T \sim 10^2 t_p$ оба процесса становятся равновероятны, а при $\Delta T > 10^2\, t_p$ Вселенная с большей вероятностью туннелирует за барьер, чем совершает переходы. Предположим, что переходы осуществляются за счет взаимодействия $-\dfrac{a^4}{18}\left(\dfrac{1}{H}\dfrac{dV}{d\phi}\right)^2$ в потенциале $\widetilde{U}$. Тогда вероятность перехода $m(T_0) \to n(T)$ можно оценить по формуле

$$W_{n\,m} \approx \left|\langle \varphi_n \left| U_I(T, T_0) \right| \varphi_m \rangle\right|^2 \exp\{-\Gamma_n (T - T_0)\},$$

где $\varphi_n, \varphi_m$ – собственные функции оператора $[-\partial_a^2 + U]$, $U_I$ – соответствующий оператор эволюции в представлении взаимодействия [2]. Предполагая, что амплитуды перехода за время $\Delta T = T - T_0$ малы, найдем, что $W_{n+1,\,n} > W_{n-1,\,n}$, т.е. переход $n \to n+1$ более вероятен, чем переход $n \to n-1$. Это означает, что имеется отличная от нуля вероятность перехода квантовой Вселенной на более высокий уровень. Поскольку ширина $\Gamma_n$ уровней стремится к нулю быстрее, чем падает потенциал $V$, то уменьшение $V$ со временем приводит к тому, что процессы переходов становятся доминирующими над распадами. В пределе $V \to 0$ происходит полное запирание Вселенной в добарьерной области. Так как среднее ожидаемое значение масштабного фактора $\bar{a} \sim \sqrt{n}$, то можно заключить, что по мере возбуждения неуспевшей протуннелировать Вселенной, ее характерный размер увеличивается, т.е. она расширяется, находясь в области $0 < a < a_1$.

В нижайшем состоянии $n = 0$ Вселенная имеет «собственный размер» $d \approx \pi\, \bar{a} \approx 3 \times 10^{-33}$ см и плотность энергии $\rho \approx 0.64\ m_p^4$, т.е. в такой квантовой Вселенной проблема сингулярности не возникает.

Если квантовая Вселенная протуннелирует за барьер из состояния с определенными $(\varepsilon_n, \Gamma_n)$, то ее последующая эволюция будет определяться уравнениями Эйнштейна с константами $E = \varepsilon_n$ и $V$, которые отвечают распавшемуся состоянию.


1. *Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. – М.: Наука, 1966. – 339 с.
2. *Дирак П.* Принципы квантовой механики. – М: Наука, 1979.– 480 с.
3. *Кузьмичов В.В.* Квантовий Всесвіт Фрідмана з скалярним полем та випромінюванням // Укр. фіз. журн. – 1998. – **43**, № 8. – С. 896–906.
4. *Кузьмичев В.В.* Эволюция квантовой Вселенной Фридмана с излучением // Ядерная физика. – 1999. – **62**, № 4.
5. *Линде А.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М.: Наука, 1990. – 280 с.
6. *Kuchař K.V., Torre Ch.G.* Gaussian reference fluid and interpretation of quantum geometrodynamics // Phys. Rev. D. – 1991. – **43**, № 2. – P. 419–441.


Поступила в редакцию 17.05.99