Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

Том 1 • № 1 • 2000 С. 6 – 15

УДК 542

Устойчивость и эволюция галактик

В.А. Антонов

Главная астрономическая обсерватория РАН, С.-Петербург, Россия

Обзор проблем устойчивости гравитирующих газовых и звездных систем, с замечаниями исторического характера. Обсуждаются интересные и трудные задачи, связанные с эволюцией самогравитирующих систем.

СТІЙКІСТЬ ТА ЕВОЛЮЦІЯ ГАЛАКТИК, Антонов В.А. – Огляд проблем стійкості гравітуючих газових і зоряних систем, із зауваженнями історичного характеру. Обговорюються цікаві і важкі задачі, пов'язані з еволюцією самогравітуючих систем.

STABILITY AND EVOLUTION OF GALAXIES, by Antonov V.A. – It is a review of problems concerning the stability of gaseous and stellar gravitating systems with historical comments. Interesting and difficult problems connected with evolution of self-gravitating systems are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Галактики принадлежат к числу основных элементов мироздания; поэтому понятен постоянный интерес к проблемам их структуры и эволюции. Начинающие ученые при первом знакомстве со звездной динамикой часто склоняются к одной из крайних точек зрения:

1) структура галактик непосредственно отражает условия их возникновения;
2) галактики принимают термодинамически равновесную форму и строение, подобно многим телам, наблюдаемым обычной лабораторной физикой.

Ни то, ни другое не верно. Истина лежит посередине.

1. РАЗМЕРЫ ГАЛАКТИК

В простейшем случае речь идет просто о радиусе какой-нибудь сферической галактики. Изложу вкратце вопрос по воспоминаниям о прежних дискуссиях с профессором К.Ф.Огородниковым. Используем обычные обозначения: M – масса галактики, R – ее эффективный радиус, m и v – средние масса и скорость отдельных звезд, N – число звезд в системе, Γ – фазовый объем галактики, G – гравитационная константа, ρ – пространственная плотность.

Условие равновесия сферической системы грубо, по порядку величины записывается как

$$\frac{GM}{R^2} \sim \frac{\mathrm{v}^2}{R} \tag{1}$$

а фазовый объем задается соотношением

$$\Gamma \sim (R\mathrm{v})^3 \tag{2}$$

Полная же энергия системы

$$H \sim -\frac{GM^2}{R} \tag{3}$$

в силу (1) и (2) для равновесной системы может быть выражена как

$$H \sim -G^2 M^3 \Gamma^{-2/3} \tag{4}$$

Возникает впечатление, что здесь слишком много инвариантов (величина Г инвариантна по теореме Лиувилля). Одно значение H, данное приближенной формулой (4), соответствует стационарному состоянию. Естественно считать, что меньшие значения H при данных M, Г и N просто не могут реализоваться ни при каком состоянии системы, и это подтверждается более точными расчетами, см. особенно [4]. Но ничего не мешает рассматривать начальные состояния с бóльшим H, чем правая часть (4). Это может быть либо разреженное состояние сразу после конденсации большого числа звезд из газопылевой среды [25], либо, наоборот, компактное состояние как следствие разлета звезд из одного центра [1]. Какой бы космогонической концепции мы ни придерживались, вряд ли можно вообразить, что галактики стационарны с самого начала. Следовательно, они обязаны были пульсировать (то же самое относится, конечно, и к звездным скоплениям).

Кажется, что пульсации должны происходит бесконечно, поскольку первоначальные значения инвариантов не удовлетворяют равенству (4). Но К.Ф.Огородников всегда настаивал, что это не так [19], и следует специально отметить его проницательность, поскольку вывод был сделан задолго до численно-экспериментального использования вычислительных машин. Доводы К.Ф.Огородникова сводились в общем к тому, что отдельные слои звезд, на которые можно мысленно разделить систему, пульсируют не в фазе: внутренние слои из-за большей окружающей плотности гравитирующего вещества все время опережают наружные. А так как они свободно проходят друг сквозь друга, то результатом является перемешивание (см. также более частную модель в [10]). Система не теряет ни массу, ни энергию: M и H сохраняются. Но теорема Лиувилля уже не работает в буквальном смысле, и эффективное значение Г приспосабливается к равенству (4), т.е. система стремится успокоиться в стационарном состоянии. Позднее было много попыток более точно определить и классифицировать фазовое перемешивание [8, 30], хотя оно и сейчас остается трудно формализуемым понятием.

Численные эксперименты все это подтвердили без существенных оговорок. Незатухающие колебания встречаются лишь как редкое исключение [31]. Правилом же является асимптотическая стационарность. Последняя может надолго запаздывать в разреженной внешней «короне» системы, что, впрочем, и не вызывало сомнений. Вполне однородные модели играют особую роль, поскольку допускают пульсации неограниченно долго. См. по этому поводу все же не вполне очевидный результат [7], потом несколько раз переоткрывавшийся.

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПУЛЬСАЦИЙ.

Те же численные эксперименты, если только в них принудительно не заложено сохранение сферической симметрии, показывают, что пульсации достаточно большой относительной амплитуды сопровождаются возникающими из флуктуаций и бурно нарастающими отклонениями от сферической симметрии. Это явление тоже было заранее предсказано аналитически [2], но по существу есть одно из проявлений неустойчивости Джинса. Действительно, систематические пульсации, пока они существуют, забирают значительную часть кинетической энергии, который соответственно меньше остается на долю пекулярных движений, в частности трансверсальных. В трансверсальном направлении система оказывается достаточно «холодной» с критической длиной существенно меньше размеров системы; это и создает предпосылки для неустойчивости типа джинсовской. Численные эксперименты, подтверждая данные рассуждения, показывают также обратное стремление к сферической симметрии на более поздних этапах эволюции [21, 29, 32, 33, 34]. Иногда симметрия возвращается с хорошей точностью, иногда следы неустойчивости закрепляются в виде некоторой эллипсоидальности финального, стационарного состояния. Неустойчивость радиальных движений одинаково хорошо проявляется как при падении гравитирующих частиц к центру, так и на фоне их разлета из почти точечной области. Крайним случаем последнего в смысле малости пекулярных скоростей является космологическое расширение. Своеобразной чертой исторического развития науки явилось то, что соответствующая неустойчивость Джинса сперва доказывалась методами общей теории относительности и лишь потом выяснилась достаточность ньютоновской механики для этой цели [13, 28]. Заметим, что неустойчивость наступает и при разлете небольшого (но >2) числа частиц [16].

3. ВРАЩЕНИЕ

С возникновением вращения у галактик, кажется, нет особых трудностей. Галактики или протогалактики могут получить вращательный импульс, например, при разрыве более крупной массы, частями которой они первоначально являлись. Возможно и вторичное появление момента при близких сближениях и слияниях с другими галактиками.

Предмет заботы теоретиков, скорее, составляет необходимость объяснить, с одной стороны, предпочтение определенных, а не любых форм галактик. С другой стороны, надо считаться и с беспрестанными отклонениями от «стандартной» морфологии галактик и с аномальными объектами.

В отношении общих форм мы опять-таки должны отметить немалую заслугу К.Ф.Огородникова, настаивавшего на аналогии общих фигур галактик с одной стороны, и известными фигурами равновесия несжимаемой жидкости [26] с другой стороны. Важной стороной этой аналогии является подчеркивание устранения мелких неправильностей, «шероховатостей» в ходе эволюции. Не могут галактики сразу рождаться такими гладкими, какими мы их видим сейчас, но их сделали гладкими необратимые процессы типа фазового перемешивания. Численные эксперименты последних лет и здесь подтверждают теоретическое предсказание.

Конечно, речь идет скорее о качественном сравнении без особой точности. Точности аналогии мешает, во-первых, постулат о несжимаемости звездного «газа». Для пульсаций, обсуждавшихся в предыдущем разделе, он определенным образом неверен. Сжимаемость играет центральную роль и для понимания локальных джинсовских неустойчивостей внутри системы. Но за вычетом этого остается широкий круг процессов, где как показывают различные исследования, действительно, возмущения развиваются так или иначе при постоянной пространственной плотности – звездная система «имитирует» несжимаемую жидкость. По-видимому, правильно будет сказать, что форма галактик близко следует предсказаниям классической теории фигур равновесия, о общий размер определяется другими закономерностями.

Во-вторых, никто не давал гарантий, что «давление» в галактиках в самом деле изотропно, как это требуется для применимости обычных газодинамических уравнений. В пользу изотропии диаграммы скоростей говорят смутные представления о росте энтропии. Но известная H-теорема Больцмана подразумевает участие столкновений частиц в широком смысле, что в звездной динамике именуют иррегулярными силами. Но в галактиках (оставляя в стороне особенно плотные системы и звездные скопления) мы должны констатировать ничтожную роль иррегулярных сил как по теоретическим оценкам, так и на основании реально наблюдаемой асимметрии звездных движений в окрестности Солнца. Недаром Джинс предусмотрительно вывел, а К.Ф.Огородников подробно развил гидродинамические уравнения звездной динамики с учетом анизотропии «давления». Так и более поздние наблюдения дают основания считать, что многие сплюснутые галактики вращаются медленнее [27], чем следовало бы по формулам для классических фигур равновесия.

Вероятно, можно сказать, что состояние с изотропной диаграммой скоростей является для звездной системы идеалом, к которому она стремится, останавливаясь, однако, на полдороге из-за того, что иррегулярные силы слишком медлительны, а коллективные неустойчивости отключаются. Действительно, благодаря исследованиям В.Л.Поляченко и др. [29, 32], мы знаем что неустойчивость Джинса, связанная с относительной малостью трансверсальных движений, перестает действовать, прежде чем они сравняются по величине дисперсии с радиальными движениями (стационарные же системы с перевесом трансверсальной компоненты дисперсии скоростей вообще, насколько удается проверить, устойчивы). Вращающиеся модели K.C.Freeman, даже далекие от изотропности давления, тоже, по-видимому, устойчивы в широкой области изменения параметров [22].

4. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Здесь уместно упомянуть, что само понятие устойчивости используется в динамике звездных систем (а также в приложении ко многим другим природным процессам) на совсем так, как в технике, где оно было развито из-за неотложных практических потребностей. Действительно, инженерная практика состоит в том, что строят некий объект в натуре, на модели или на бумаге, а затем смотрят, будет ли он устойчиво стоять, не обрушится ли. Применение правил устойчивости инженером носит, таким образом, разовый характер. Но по отношению к природе мы должны рассуждать иначе – и к этому надо привыкать во избежание разных ошибочных трактовок. Здесь выводы об устойчивости надо прилагать к непрерывно развивающимся процессам.

До некоторой степени эта смена точек зрения отражена в современной теории катастроф [9]. Более конкретно мы должны представить эволюционный путь природной системы в пространстве тех или иных параметров. Продвижение по этому пути вызывается медленно действующими причинами, практически не нарушающими факта равновесия, но постепенно сдвигающими его параметры. Для галактик причинами такого роза являются иррегулярные силы, звездообразование, некоторые неустойчивости с очень малым инкрементом, воздействие соседних систем и т.д. Но эволюционный путь может привести к точке, где устойчивость сменяется неустойчивостью. После этого возможны следующие варианты событий:

1) Перестройка в темпе, гораздо более быстром, чем предшествовавшая плавная эволюция. Благодаря исследованиям А.М.Ляпунова [26], мы знаем, что такая скачкообразная перестройка должна происходить с жидкими эллипсоидами Якоби по достижении ими точки бифуркации с грушевидными фигурами и приводить к отрыву по крайней мере одного спутника. Надо думать, по аналогичному механизму отрываются некоторые спутники галактик. В физике твердого тела быструю перестройку называют фазовым переходом первого рода.

2) Сворачивание на боковой, уже устойчивый путь эволюции, обычно с потерей части элементов симметрии системы. Классический пример – переход от эллипсоидов Маклорена к эллипсоидам Якоби. Такой же переход к трехосности очень естественно ожидать в определенных условиях в звездных системах. Аналогом в физике твердого тела является фазовый переход второго рода.

3)Скольжение вдоль границы устойчивости, когда сама неустойчивость едва возникнув, каждый раз приводит к последствиям, устраняющим ее. Наиболее известным примером является конвекция неравномерно нагретой жидкости, распространяющаяся, конечно, и на межзвездный газ в определенных условиях. В чисто звездных системах нечто подобное известно в отношении довольно искусственных моделей [20].

Заметим, что при эволюционном подходе главную роль надлежит отводить раньше других срабатывающим, а не имеющим больший инкремент, как иногда ошибочно считают. Вообще, подобные эволюционные вопросы очень трудны. Некоторая информация эпизодически получается из численных экспериментов, если в них чередуются периоды медленного и быстрого развития. Аналитическое исследование пока относится к очень упрощенным моделям [18].

Важен также вопрос, всегда ли можно трактовать неустойчивости в звездных системах по Джинсу. Безусловно, ряд видов локальных неустойчивостей радиальных движений можно отнести к категории джинсовских. Кроме уже упомянутой неустойчивости радиальных движений, сюда попадает неустойчивость сильно вытянутых образований по отношению к распаду на отдельные «капли» [22] и неустойчивость сильно сплюснутой, почти дискообразной системы с малой дисперсией радиальных скоростей по отношению к распаду на отдельные кольца. Последний случай приобрел особенное значение в связи с теорией волн плотности [12, 22] (локальная неустойчивость Джинса свойственна также газовым облакам в некотором диапазоне термодинамических параметров).

Однако с некоторой общей точки зрения локальный характер неустойчивости Джинса проявляется как исключение, хотя бы и космогонически важное, а правилом является ее глобальное поведение. Действительно, критическую длину, рассчитанную по классической формуле

$$l \sim \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{G\rho}}$$

(v играет, очевидно, роль скорости звука) легко переписать в виде

$$l \sim \mathrm{v}(GM)^{-1/2} R^{3/2}$$

и из (1) ясно, что она по порядку величины просто совпадает с размером системы R, если нет каких-то особых причин для введения больших коэффициентов.

Таким образом, неустойчивость Джинса непрерывно смыкается с глобальными неустойчивостями (см. рис. 1). Из числа последних применительно к системам с ротационной симметрией важнейшими являются неустойчивости со следующими признаками: уже упоминав-

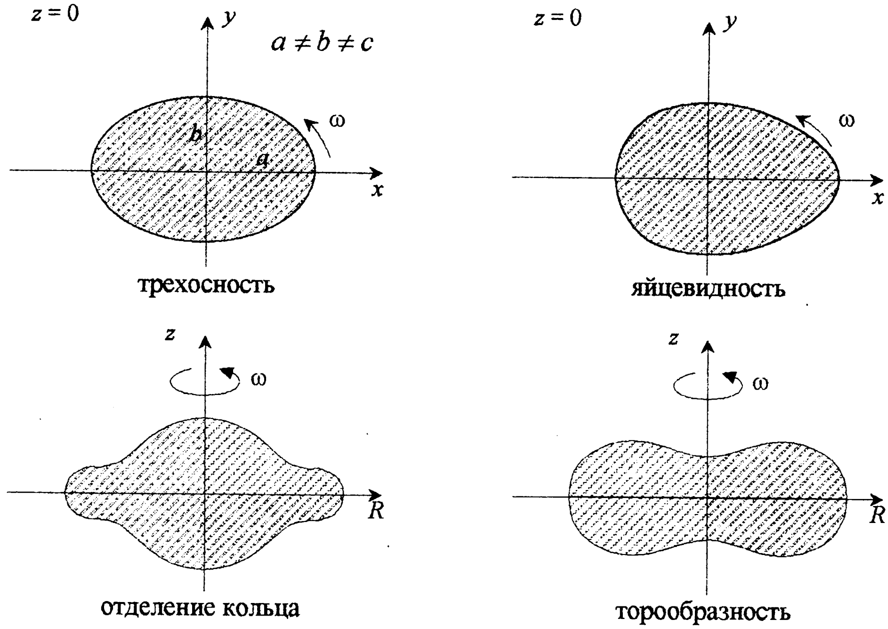

Рис.1. Глобальные неустойчивости самогравитирующих конфигураций

шаяся трехосность; смещение ядра вбок (яйцевидность); самовозбуждающаяся прецессия; отделение тонкого кольца с краю или при другом знаке возмущения, тенденция к образованию торообразных фигур [36, 37].

Заметим, что вследствие специфики звездной динамики и наличия анизотропии скоростей последовательность появления вышеуказанных видов неустойчивости вовсе не обязана совпадать с той, которую мы видим у фигур равновесия однородной жидкости [3]. Для систем, трехосных уже в стационарном состоянии, после грушевидности в качестве важнейшего проявления неустойчивости мы рассматриваем деление пополам или, при другом знаке возмущения, заострение концов.

Противопоставление локальных и глобальных неустойчивостей, конечно, имеет смысл больше с субъективной точки зрения, чем по сути дела. Просто наш математический аппарат плохо приспособлен к разным промежуточным ситуациям, не попадающим четко под понятия локальности и глобальности.

Однако, упрощенные теории не всегда сразу согласуются с действительностью. Ясно, что последствия многих колебаний и неустойчивости мы наблюдаем в реальных галактиках. Например, многокольцевая структура, очень характерная как проявление локальной неустойчивости, фактически встречается очень редко. На первый же план выходит спиральная структура, не укладывающаяся в теорию по ряду причин:

1) По теории, любое медленно растущее или стационарное возмущение ротационно симметричной системы в линейном приближении (а нелинейной модели у нас фактически нет) должно само иметь меридиональную плоскость симметрии. Это так называемая антиспиральная теорема [22], известная, впрочем, и раньше в математически той же ситуации в теории атомного ядра, где в ее применимости пока что никто не сомневается.
2) Линейная теория допускает суперпозицию возмущений разного типа, что привело бы к структурам типа крестов или шахматных досок. Этого почти никогда нет, зато часто встречаются развилки ветвей, теоретически очень странные.

3) Нет удовлетворительного объяснения частой физической связи спиралей с кольцевидной структурой или спутниками галактик.
4) Нет хотя бы грубой пропорциональности между выраженностью спиралей и трехосности центрального тела, подозреваемой в качестве причины возмущений.
5) Непонятно безусловное преобладание двухрукавных спиралей.

Все это заставляет нас думать, что специалисты поторопились поставить чисто динамические малые возмущения, с их уже достаточно выясненными законами, в более или менее прямую связь с феноменом спиральной структуры. Скорее, спирали возникают в результате очень сложных, пока не выясненных, необратимых физических процессов, для которых волна плотности играет роль только спускового крючка или стимула. Поэтому далеко не всякая волна плотности воплощается в видимую спираль и, в частности, пропадает обратная волна, которая создавала бы симметрию. Для стимула нет и надобности быть пропорциональным реакции.

5. ШЛАНГОВАЯ И ДРУГИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Она была впервые обнаружена в работах R.M.Kulsrud и Z.W.-K.Mark, подробное описание есть в [22]. Данная неустойчивость развивается, когда горизонтальная дисперсия скоростей в сильно сплюснутой системе достаточно велика (существенно больше вертикальной) или в сильно вытянутой системе продольная дисперсия много больше поперечной. Таким образом, шланговая неустойчивость требует условий, противоположных, чем джинсовская, и они в каком-то смысле дополняют друг друга. Физически природа шланговой (или мембранной, как ее лучше называть применительно к слою) неустойчивости состоит в том, что прогнувшийся вбок кусок системы получает от быстрых частиц импульс по типу центробежных сил, заставляющий данный кусок изгибаться дальше и способный перевесить гравитацию остальной части системы.

Шланговая неустойчивость принципиально отличается от неустойчивости радиальных движений тем, что происходит не в квазиоднородной среде. Наоборот, необходимо наличие достаточно резкой границы с пустотой или пассивной средой, чтобы активной подсистеме было куда изгибаться.

Кстати, работы [11, 23] неправильно квалифицируют найденную неустойчивость как градиентную. Речь в них идет о цилиндрической системе, составленной из подсистем с меньшей и большей продольной температурой. Более «горячие» подсистемы имеют достаточно резкую границу, и их изгиб идет по типичной схеме шланговой неустойчивости.

Так же мы не считаем целесообразным выделять специальную категорию пучковой неустойчивости для гравитирующих систем, хотя в плазме известно такое понятие. Но анализ примеров гравитирующего слоя с двумя встречными пучками звезд [22] показывает, что при раздвижении пучков на диаграмме скоростей плавно наступает переход от неустойчивости Джинса в обоих пучках как едином целом к такой же неустойчивости Джинса только в каком-нибудь одном, обособившемся пучке.

С другой стороны, существует еще мало кем замеченный вид неустойчивости в таких (плоских или нитевидных) гравитирующих системах, который можно назвать расщепительной неустойчивостью. Она существенно отличается от шланговой тем, что развивается на фоне уже искривленной или качающейся системы. Вдоль нее звезды должны двигаться с разными скоростями, тогда, встречая искривление или наклонный участок, они будут стремиться оторваться друг от друга. Этому препятствует взаимное тяготение, но если щель между потоками разной скорости станет достаточно глубокой, обратного схождения вместе уже не произойдет и такая система начнет «полнеть». Подобный механизм, возможно, важен для динамики некоторых струевидных образований в кратных галактиках.

6. ГРАДИЕНТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Много раз подозревалась возможность развития неустойчивости в газовом диске за счет постепенного изменения поверхностной плотности вдоль радиуса. Но нам не удалось найти в литературе убедительного доказательства с четко сформулированными условиями и расчетом, поддающимся проверке. Во всяком случае, анализ этого вопроса в коротковолновом приближении для твердотельно вращающегося диска в поле тяготения большой системы [5] показал устойчивость. Расчет велся в так называемом дрейфовом приближении, приспособленном специально для медленно развивающихся возмущений и исключающем из поля зрения неустойчивость Джинса: рассматриваемые возмущения почти «бездивергентны».

Однако неустойчивость появляется в той же модели, если газу придать известное свойство второй вязкости, вызывающей «утечку» энергии. Но и при этом одного градиента плотности мало – для неустойчивости необходимо также наличие градиента энтропии, причем направленного в ту же сторону. Это очень похоже на критерий устойчивости планетной или звездной атмосферы с той лишь разницей, что в условиях галактического диска «низ» находится там, где больше плотность, что не всегда означает направление на центр системы.

Добавлю еще соображения об энергетическом истолковании данного результата. Составим приращение энергии в узкой кольцевой зоне по отношению к системе координат, в которой эта зона покоится (собственно говоря, это не энергия, а инвариант Якоби), по отношению к динамически допустимым возмущениям. Под динамически допустимым возмущением подразумеваем любое такое , какое можно создать наложением собственных или внешних потенциальных полей. Несколько кропотливый расчет показывает, что приращение энергии в первом порядке обращается в нуль, как и во многих других задачах, а оставшаяся форма второго порядка способна приобретать отрицательный знак и тем самым включать механизм вековой неустойчивости как раз при вышеупомянутом условии на градиенты. Это приводит к еще не проверенному предположению, что и другие механизмы потери энергии, не связанные с обычным внутренним трением (с которым вопрос сложнее из-за вызываемого им дрейфа самого основного состояния), дадут тот же результат. Более того, возникает идея, что и диск, составленный из звезд, в котором нет аналога второй вязкости, но потеря энергии все ж возможна путем гравитационного взаимодействия с гало, должен показывать сходные закономерности градиентной неустойчивости. Роль энтропии при этом могут играть некоторые параметры распределения звезд по скоростям.

Заметим еще, что градиентная неустойчивость не совсем укладывается в рамки обычного поиска экспоненциального нарастания мод, если учитывается дифференциальность вращения. На самый критерий неустойчивости она влияет мало, но возникающие возмущения будут иметь конечное время жизни, так как они по своей природе не обладают ротационной симметрией и должны все время закручиваться дифференциальным вращением в одну и ту же сторону, пока не затухают вовсе из-за неизбежного перемешивания газа. Но этого времени, предоставленного возмущениям, по-видимому достаточно для того, чтобы они создавали подобие турбулентности и через нее – вторичную эффективную вязкость в диске и диффузию по содержанию химических элементов.

Пространственное изменение угловой скорости Ω самой по себе также может быть в принципе фактором неустойчивости. Опять-таки неизвестны убедительные доводы о возникновении неустойчивости за счет плавного градиента Ω, кроме случаем явного резонанса между разными зонами. Так, в обзоре [17], хотя он относится к несколько иным задачам, все время речь идет о резких разрывах Ω как источниках неустойчивости. Применительно к системам со значительной ролью самогравитации проблему устойчивости такого тангенциального разрыва изучали А.Г.Морозов и др. [14]. В [6] дан анализ для случаев «размазанного» разрыва.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Я не стремился дать полного обзора, и за пределами данной публикации остается например, проблема устойчивости отдельных орбит, часто тесно переплетающейся с коллективной устойчивостью. Равным образом не рассмотрены многочисленные, запутывающие общую картину, но медленно действующие резонансные неустойчивости. Не ясен вопрос о теоретическом обосновании (возможном ли вообще?) критерия Ostriker-Peebles. Но в любом случае устойчивость звездных систем задает интересные задачи, заставляющие нас напрягаться и приближающие к пониманию свойств материи в необычных ее формах. Кроме упоминавшихся выше в тексте к числу трудных вопросов, примыкающим к проблеме устойчивости, относятся, например, постепенное рассеяние звезд с периферии звездных скоплений, поиски дополнительных интегралов движения, взаимодействие разных подсистем галактик, роль магнитных полей в формировании галактических структур.

1. *Амбарцумян В.А.* Проблема эволюции Вселенной. – Ереван, 1968.
2. *Антонов В.А.* В сборнике: Динамика галактик и звездных скоплений. – Алма-Ата, 1973.
3. *Антонов В.А.* Фигуры равновесия // Итоги науки, сер. Астрономия. – т.10. – 1975. – 156 с.
4. *Антонов В.А.* В сборнике: Вопросы небесной механики и звездной динамики. – Алма-Ата, 1990. – с. 66-70
5. *Антонов В.А., Баранов В.С.* Астрон. ж. – 1998. – **75**, № 3. – с. 467–475.
6. *Антонов В.А., Баранов В.С.* Астрон. ж. – 1998. – **75**, № 5. – с. 668–673.
7. *Антонов В.А., Нуритдинов С.Н.* Вестник Ленинградского университета // сер. мат. мех. астрон. – 1975, № 7. – с. 133–138.
8. *Антонов В.А., Нуригдинов С.Н., Осипков Л.П.* В сборнике: Динамика галактик и звездных скоплений. – Алма-Ата, 1973.
9. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – Изд. 3. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
10. *Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б., Фридман А.М.* ДАН СССР. – 1968. – **182**, № 4. – с. 794-796.
11. *Бисноватый-Коган Г.С., Михайловский А.В.* Астрон. ж. – 1973. – **50**, № 2. – с. 312–319.
12. *Ефремов Ю.Н., Корчагин В.И., Марочник Л.С., Сучков А.А.* УФН – 1989. – **157**, № 4. – с. 599–629.
13. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Релятивистская астрофизика. – М.: Наука, 1967. – 654 с.
14. *Морозов А.Г., Поляченко В.Л., Файнштейн В.Г., Фридман А.М.* Астрон. ж. – 1976. – **53**, № 5. – с. 946–949.
15. *Мухин К.Н.* Экспериментальная ядерная физика. Книга 1. Часть I. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 376 с.
16. *Нежинский Е.М.* ДАН СССР – 1972. – **206**, № 3. – Р. 566–567.

17. *Незлин М.В.* УФН – 1986. – **150**, № 1. – с. 3–60.
18. *Нуритдинов С.Н.* Астрофизика. – 1978. – **14**, № 4. – с. 671–678.
19. *Огородников К.Ф.* Динамика звездных систем. – М.: Физматгиз, 1958. – 627 с.
20. *Пальчик М.Я., Паташинский А.З., Пинус В.К.* Препринт ИЯФ СОАН СССР – № 100. – Новосибирск, 1970. – 13 с.
21. *Поляченко В.Л.* Письма в АЖ– 1981. – **7**, № 3. – с. 142–148.
22. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М.: Наука, 1976. – 447 с.
23. *Поляченко В.Л., Шухман И.Г.* Астрон. ж. – 1973. – **50**, № 3. – с. 649–650.
24. *Поляченко В.Л., Шухман И.Г.* Астрон.ж. – 1981. – **58**, № 5. – с. 933–948.
25. Происхождение и эволюция галактик и звезд / под ред. *С.Б.Пикельнера.* – М.: Наука, 1976. – 407 с.
26. *Субботин М.Ф.* Курс небесной механики. Т. III. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
27. *Binney J.* Annu. Rev. Astron. Astrophys. – vol. 20. – 1982. – P. 399–429.
28. *Bonnor W.B.* Mon. Notic. RAS – 1957. – **117**. – P. 104–112.
29. *Cannizzo J.K., Hollister T.C.* Astrophys. J. – 1992. – **400**, № 1. – P. 58–64.
30. *Lynden-Bell D.* Mon. Notic. RAS – 1967. – **136** – P. 101–132.
31. *Mathur S.D.* Mon. Notic. RAS – 1990. – **243**. – P. 529–536.
32. *Merrit D., Aguilar L.* Mon. Notic. RAS, 1985. – **217**. – P. 787–
33. *Meza A., Zamorano N.* Astrophys. J. – 1997. – **490**. – P. 136–147.
34. *Min K.W., Choi C.S.* Mon. Notic. RAS – 1989. – **238**. – P. 253–259.
35. *Saha P.* Mon. Notic. RAS – 1991. – **248**. – P. 494–452.
36. *Железняк О.А.* Астрон. Циркуляр БАС АН СССР. – 1989, № 1536. – с. 11.
37. *Антонов В.А., Железняк О.А.* Астрофизика. – 1989. – т. 30. – с. 635–642.

Поступила в редакцию 1.06.99