Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

Том 1 • № 1 • 2000 С. 59 – 63

УДК 527.12:528.51

Статические сферические конфигурации анизотропной жидкости

В.В. Бурликов

Днепропетровский госуниверситет, Украина

Получен и исследован ряд новых решений уравнений общей теории относительности для статической сферически–симметричной конфигурации анизотропной жидкости. Плотность энергии считается постоянной. Получены решения с различными уравнениями состояния для радиальной и тангенциальной составляющих тензора энергии – импульса. Исследована возможность сшивки полученных решений с внешним решением Шварцшильда для пустого пространства.

СТАТИЧНІ СФЕРИЧНІ КОНФІГУРАЦІЇ АНІЗОТРОПНОЇ РІДИНИ, Бурліков В.В. – Отримано і досліджено ряд нових розв'язків рівнянь загальної теорії відносності для статичної сферично–симетричної конфігурації анізотропної рідини. Густина енергії вважається постійною. Здобуто розв'язки з різноманітними рівняннями стану для радіальної та тангенціальної складових тензора енергії – імпульсу. Досліджено можливість зшивки здобутих розв'язків із зовнішнім розв'язком Шварцшильда для пустого простору.

STATIC SPHERICALLY SYMMETRIC DISTRIBUTION OF ANISOTROPIC MATTER, by Burlikov V.V. – A number of new solutions for a static spherically symmetric distributions of anisotropic matter in general relativity are derived and investigated. The energy density is assumed to be constant. The solutions with various equations of state for the stresses are derived. Some of the solutions can be matched with the Schwarzschild exterior metric for empty space.

ВВЕДЕНИЕ

Построение и исследование моделей сферически-симметричных конфигураций на основе точных аналитических решений уравнений общей теории относительности по-прежнему остается актуальной задачей современной теории гравитации. В последние годы появляется все больше работ, посвященных конфигурациям анизотропной жидкости (радиальная и тангенциальная составляющая тензора энергии – импульса в сопутствующей системе отсчета не равны). Был получен ряд анизотропных решений, в частности, статические решения с постоянной плотностью энергии [1] – [5]. Однако, в этих решениях в качестве дополнительного условия выбирались определенные уравнения для давления и метрических коэффициентов, в то время как с физической точки зрения было бы предпочтительнее задать уравнение состояния для радиального и тангенциального давления. Целью настоящей работы является построение новых статических решений для анизотропной жидкой сферы с постоянной плотностью энергии и разными уравнениями состояния.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Рассмотрим статическую сферически–симметричную конфигурацию анизотропной жидкости. Интервал запишем в координатах кривизн:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\sigma^2, \tag{1}$$

где $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$. Тензор энергии – импульса такой конфигурации имеет диагональный вид: $T_0^0 = \varepsilon$ – плотность энергии, $-T_1^1 = p_r$ и $-T_2^2 = -T_3^3 = p_\perp$ – радиальное и тангенциальное давление, соответственно. Уравнения Эйнштейна для метрики (1) имеют следующий вид (штрих означает дифференцирование по r):

$$8\pi\varepsilon = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{2}$$

$$8\pi\, p_r = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}, \tag{3}$$

$$8\pi\, p_\perp = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right), \tag{4}$$

Для построения модели релятивистской конфигурации внутреннее решение необходимо сшить с внешним, в качестве которого выберем решение Шварцшильда для пустого пространства (r_g – гравитационный радиус):

$$ds^2 = \left(1 - r_g / r\right)\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g / r} - r^2 d\sigma^2. \tag{5}$$

Из условий сшивки сферически – симметричных метрик ($ds^2_{(in)} = ds^2_{(out)}$, $m_{(in)} = m_{(out)}$, $T^1_{1(in)} = T^1_{1(out)}$, где индексы *(in)* и *(out)* означает, что величины вычисляются на поверхности сшивки во внутреннем и внешнем решении, соответственно, а $m = r - re^{-\lambda}$ – массовая функция), получим: $ds^2_{(in)} = ds^2_{(out)}$, $m(r_b) = r_g$, $p_r(r_b) = 0$, где r_b – радиус поверхности сшивки.

Далее, будем считать, что плотность энергии является постоянной величиной: $\varepsilon = Const$. Тогда уравнение (2) интегрируется. Массовая функция оказывается равной $m = 8\pi\varepsilon\, r^3/3 + m_0$, где m_0 – произвольная постоянная. Для модели, в которой вещество полностью заполняет объем внутри сферы граничного радиуса, требуем, чтобы массовая функция в центре $(r = 0)$ обращалась в нуль (значение массовой функции $m(r)$ равно полному количеству массы – энергии внутри сферы радиуса r). Тогда $e^{-\lambda} = 1 - 8\pi\varepsilon\, r^2/3$.

Для того, чтобы получить решение полевых уравнений (2) – (4), необходимо задать еще одно соотношение, например, уравнение состояния для p_r и $p_\perp$.

Наиболее известным является внутреннее решение Шварцшильда. Оно описывает конфигурацию идеальной жидкости ($p_r = p_\perp$). Интегрируя уравнения (2) – (4), получим в этом случае $8\pi(p+\varepsilon)=\left(C\sqrt{1-8\pi\,\varepsilon\,r^2/3}+3/(16\pi\,\varepsilon)\right)^{-1}=z$, $e^{\nu}=e^{\nu_0}z^{-2}$, где C и ν_0 – произвольные постоянные. Вводя константы $A=3\,e^{\nu_0/2}/(16\pi\,\varepsilon)$ и $B=-C\,e^{\nu_0/2}$, получим ($a^2=8\pi\,\varepsilon/3=Const$):

$$ds^2=\left(A-B\sqrt{1-a^2r^2}\right)^2dt^2-\frac{dr^2}{1-a^2r^2}-r^2d\sigma^2. \tag{6}$$

При $C\to 0$ это решение переходит в космологическую модель Эйнштейна:

$$ds^2=dt^2-\frac{dr^2}{1-8\pi\,\varepsilon\,r^2/3}-r^2d\sigma^2,\ p=-\frac{1}{3}\varepsilon, \tag{7}$$

а при $C\to\infty$, $e^{\nu_0}\to-\infty$ – в космологическую модель де Ситтера:

$$ds^2=\left(1-8\pi\,\varepsilon\,r^2/3\right)dt^2-\frac{dr^2}{1-8\pi\,\varepsilon\,r^2/3}-r^2d\sigma^2,\ p=-\,\varepsilon. \tag{8}$$

Ниже рассмотрены некоторые анизотропные решения для статической однородной сферы.

2. АНИЗОТРОПНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА.

Известно статическое анизотропное решение [1], описывающее конфигурацию постоянной плотности энергии с уравнением состояния $\Delta\,p=8\pi\,(p_\perp-p_r)=(1-h)r\,z\nu'/4$, где h – произвольная постоянная, $z=8\pi(p_r+\varepsilon)$. При $h\neq 0$ решение уравнений поля (2) – (4) имеет вид

$$ds^2=e^{\nu_0}(3\alpha-Y)^{2/h}dt^2-\frac{dr^2}{1-8\pi\,\varepsilon\,r^2/3}-r^2d\sigma^2, \tag{9}$$

$$p_r=\varepsilon\frac{Y-\alpha}{3\alpha-Y},\qquad p_\perp=p_r+\frac{2\pi}{3}(1-h)\frac{(p_r+\varepsilon)\,(3p_r+\varepsilon)r^2}{1-8\pi\,\varepsilon\,r^2/3}, \tag{10}$$

где введено обозначение $Y=\left(1-8\pi\,\varepsilon\,r^2/3\right)^{h/2}$, ν_0 и α – произвольные постоянные. При $h\to 0$ модель описывает конфигурацию с $p_r=\mathrm{Const}$. Эта модель будет рассмотрена в следующем пункте.

Решение (9), (10) может быть сшито с внешним решением Шварцшильда (5) для пустого пространства, в этом случае получим $\alpha=Y_b=\left(\sqrt{1-r_g/r_b}\right)^h$, $e^{\nu_0}=4^{-h}$. Такое решение рассматривалось в работах [1], [4]. В них, в частности, обсуждался вопрос о критическом значении радиуса такой конфигурации и о максимальной величине красного смещения.

Рассмотрим зависимость $p_r(r)$. При $h>0$ радиальное давление убывает от значения $p_r(0)=\varepsilon\,(1-\alpha)/(3\alpha\ -1)$ в центре до нуля на поверхности. При значениях радиуса конфигурации r_b, меньших критического значения $r_{крит}=3^{2/h}r_g/\left(3^{2/h}-1\right)$, функция $p_r(r)$ имеет разрыв $p_r\to\pm\infty$ в точке $r=\sqrt{r_b^3r_g^{-1}\left(1-3^{2/h}(1-r_g/r_b)\right)}$. Тангенциальное давление $p_\perp$ равно радиальному в центре модели. При $0<h<1$ величина $p_\perp$ положительна.

3. РЕШЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ ДАВЛЕНИЕМ.

Рассмотрим конфигурацию с постоянным радиальным давлением $p_r = Const$. Запишем уравнение состояния в виде $p_r = n\varepsilon$, где n – произвольный параметр модели. Интегрируя уравнения поля, получим:

$$ds^2 = e^{\nu_0}\left(\sqrt{1-8\pi\varepsilon\, r^2/3}\right)^{-1-3n} dt^2 - \frac{dr^2}{1-8\pi\varepsilon\, r^2/3} - r^2 d\sigma^2, \tag{11}$$

$$p_r = n\varepsilon, \quad p_\perp = \varepsilon\frac{3n + 2\pi\left(3n^2+1\right)\varepsilon\, r^2}{3-8\pi\,\varepsilon\, r^2} \tag{12}$$

($\nu_0 = Const$). В центре $(r=0)$ $p_r = p_\perp$. Это решение переходит в решение де Ситтера (8) при $n=-1$ и в модель Эйнштейна (7) при $n=-1/3$. Решение (11), (12) при $p_r = 0$ $(n=0)$ может быть сшито с внешним решением для пустого пространства. Такое решение рассматривал Флоридес [2]. В этом случае тангенциальное давление $p_\perp = \varepsilon\, r^2\left(r_b^3 r_g^{-1} - r^2\right)^{-1}/4$ возрастает от нуля в центре до значения $p_b = \varepsilon\left(r_b/r_g - 1\right)^{-1}/4$ на поверхности.

4. РЕШЕНИЯ С $\Delta\, p \sim \left(p_r + \varepsilon\right)$.

Уравнения поля (2) – (4) могут быть проинтегрированы в случае конфигурации с уравнением состояния

$$\Delta p = 4\pi\, k\left(p_r + \varepsilon\right), \tag{13}$$

где k – произвольная постоянная. Решение для конфигурации с уравнением состояния (13) принимает вид

$$ds^2 = e^{\nu_0}\frac{r^{2k}}{z^2}dt^2 - \frac{dr^2}{1-8\pi\,\varepsilon\, r^2/3} - r^2 d\sigma^2, \quad p_r = \frac{z}{8\pi} - \varepsilon, \quad p_\perp = \frac{k}{2}\left(\frac{2+k}{k}p_r + \varepsilon\right), \tag{14}$$

где $\nu_0 = Const$, а функция $z(r)$ определяется уравнением

$$z(r) = \frac{16\pi}{3}\left[1 - k\, x^{-k}\sqrt{1-x^2}\left(\int x^{k-1}\left(1-x^2\right)^{-1/2}dx + C\right)\right]^{-1}, \tag{15}$$

где $x = r\sqrt{8\pi\,\varepsilon/3}$, C – произвольная постоянная интегрирования. Выражение (15) может быть проинтегрировано для различных конкретных значений параметра k.

В решении де Ситтера (8) след тензора энергии – импульса равен $T_\mu^\mu = 4\varepsilon$. Рассмотрим далее модель анизотропной жидкой сферы с таким же уравнением: $T_\mu^\mu = \varepsilon - p_r - 2p_\perp = 4\varepsilon$. Это выражение эквивалентно уравнению (13) с $k=-3$. Решение для такой конфигурации имеет вид

$$ds^2 = e^{\nu_0}\frac{Y^2}{r^2}dt^2 - \frac{dr^2}{1-m/r} - r^2 d\sigma^2, \quad p_r = -\varepsilon + \frac{A}{4\pi\, r^2 Y}, \quad p_\perp = -\varepsilon - \frac{A}{8\pi\, r^2 Y}, \tag{16}$$

где введено обозначение

$$Y = A\left(2\frac{m}{r} - 1\right) + \sqrt{\frac{m}{r}\left(1-\frac{m}{r}\right)}, \quad m = \frac{8\pi}{3}\varepsilon\, r^3, \tag{17}$$

A и ν_0 – произвольные постоянные. Решение (16), (17) имеет сингулярность в центре

$\nu_0 \to \infty$, $p_r \to \infty$. При $A \to 0$, $e^{\nu_0} = 3/(8\pi\,\varepsilon)$ оно переходит в решение де Ситтера (8). Сшивая решение (16), (17) с внешним решением для пустого пространства, получим

$$A = \sqrt{r_g / r_b}\sqrt{1 - r_g / r_b}\,\left(2\left(r_g / r_b\right) - 1 - 2r_b / \left(3r_g\right)\right)^{-1}.$$

5. РЕШЕНИЕ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ ОБЩЕГО ВИДА.

Решение также может быть получено для конфигурации с уравнением состояния общего вида: $\Delta p = 8\pi\, f'(r)\, r\,(p_r + \varepsilon)$, где $f(r)$ – произвольная функция. Интегрируя (2) – (4), получим

$$ds^2 = e^{\nu_0}\,\frac{f^4(r)}{z^2(r)}\,dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 8\pi\,\varepsilon\, r^2/3} - r^2 d\sigma^2\ ,\quad p_r = \frac{z}{8\pi} - \varepsilon\ ,\ p_\perp = \frac{z}{8\pi}\left(r\, f' + 1\right) - \varepsilon\ , \tag{18}$$

где $\nu_0 = Const$, а функция $z(r)$ выражается через интеграл

$$z = 2e^{2f}\left(1 - 8\pi\,\varepsilon\, r^2/3\right)^{-1/2}\left(\int\left(1 - 8\pi\,\varepsilon\, r^2/3\right)^{-3/2} r e^{2f}\, dr + C\right)^{-1}, \tag{19}$$

C – произвольная постоянная. Отметим, что выбор произвольной функции $f(r)$ в виде $f(r) = k(\ln\ r)/2$ приводит к уравнению состояния (13).

Рассмотрим частное решение с $\exp(2f) = \left(1 - 8\pi\,\varepsilon\, r^2/3\right)^{3/2}$. В этом случае интегрирование уравнения (19) дает $z = 4\left(1 - 8\pi\,\varepsilon\, r^2/3\right)\left(r^2 + 2C\right)^{-1}$, и решение принимает вид

$$ds^2 = e^{\nu_0}\left(\frac{r^2 + 2C}{1 - m/r}\right)^2 \ln^4\left(1 - m/r\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - m/r} - r^2 d\sigma^2\ , \tag{20}$$

$$p_r = \frac{1 - m/r}{2\pi\left(r^2 + 2C\right)} - \varepsilon,\quad p_\perp = \frac{1 - 20\pi\,\varepsilon\, r^2/3}{2\pi\left(r^2 + 2C\right)} - \varepsilon\ ,\quad m = \frac{8\pi}{3}\varepsilon\, r^3, \tag{21}$$

Решение (20), (21) обладает сингулярностью $e^{\nu} \to 0$ в центре. При $C \to \infty$ оно переходит в решение де Ситтера (8). Радиальное давление в центре положительно при $0 \le C < (4\pi\,\varepsilon)^{-1}$. Функция $p_r(r)$ является убывающей при $C > -3(16\pi\,\varepsilon)^{-1}$. Из условий сшивки с пустым пространством получим $C = \left(6\left(r_b / r_g\right) - 7/8\right)r_b^2$. Таким образом, в этом случае p_r положительно и убывает $\left(r_b \ge r_g\right)$, $p_\perp$ также положительно и убывает с ростом r. В центре $p_\perp = p_r$.

1. Cosenza M., Herrera L., Esculpi M. and Witten L. Some models of anisotropic spheres in general relativity // J. Math. Phys-1981.– **v.22**,N1. – p.118–125.
2. Florides P.S. A new interior Schwarzschild solution // Proc. Roy. Soc. (London) A. – 1974. – **v.337**, N1611. – p. 529 – 535.
3. Ponce de Leon J. Gravitation repulsion in sources of the Reissner – Nordstrom field // J. Math. Phys – 1988. – **v.29**, N1. – p. 197 – 206.
4. Ponce de Leon J. Weil curvature tensor in static spherical sources // Phys. Rev. D – 1988. – **v.37**, N2. – p. 309 – 317.
5. Ponce de Leon J. Limiting configurations allowed by the energy conditions // Gen. Relativ. Gravitat. – 1993. – **v.25**, N11. – p. 1123 – 1137.

Поступила в редакцию 09.07.99